A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ:
ALEXITS GYÖRGY

IV. KÖTET 1—4. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1954

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója | Műszaki felelős: Farkas Sándor

Szegedi Nyomda Vállalat 55-3422 | Felelős vezető: Vincze György

TARTALOMJEGYZÉK

I. SZÁM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

KÖNYVISMERTETÉSEK

II. SZÁM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

KIVONATOK

Oldal

ANKÉTEK

KÖNYVISMERTETÉS

III. SZÁM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

IV. SZÁM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

V. KÖTET I. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1955.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

V. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Sztálin út 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 45-790-057-50-032) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

A MODULÁRIS CSOPORT GEOMETRIAI INTERPRETÁCIÓJÁRÓL

SZÁSZ PÁL

Bemutatta Hajós György r. tag az 1954. október 22-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Tekintsük az $\omega = x + iy$ komplex számok síkjának felső felét (amelyen $y > 0$) s nevezzük szokásos módon *körívháromszögnek* az olyan háromszöget ezen a félsíkon, amelynek oldalai a valós tengelyre merőleges körívek (vagyis amelyek mindegyikének középpontja a valós tengelyen van), ezek közé számítva a valós tengelyre merőleges egyenesdarabokat és félegyeneseket is. R. DEDEKIND [1] az elliptikus modulusfüggvények elméletét arra a tételre alapította, hogy azok a körívháromszögek, amelyek a

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \infty \tag{1}$$

szögpontokkal bíró körívháromszögből a racionális egész együtthatós

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{2}$$

lineáris transzformációkkal származnak, a felső félsíkot hézagmentesen és közös határpontoktól eltekintve egyrétűen kitöltik. E körívháromszögek mindegyikében két szög 60°, egy pedig 0-szög, az utóbbiak csúcspontjai a valós tengely racionális pontjainak összességét alkotják (a ∞ beleértésével), amint R. DEDEKIND az idézett helyen kiemeli. A (2) alatti lineáris transzformációk racionális egész együtthatók mellett is (amely esetről a fenti tételben szó van) csoportot alkotnak, amelyet *moduláris csoportnak* szokás nevezni. R. DEDEKIND tétele e csoportnak nevezetes és alapvető geometriai interpretációját fejezi ki. A szóbanforgó körívháromszögek hálózata a felső félsíknak ú. n. *moduláris felosztása* vagy más néven a *moduláris alakzat.* Ez utóbbi F. KLEIN [2] szerint úgy szerkeszthető, hogy a $0\,1\,\infty$ körívháromszögnek az oldalakra vonatkozó szukcesszív tükrözése (inverziója) által nyert hálózatban, mindegyik háromszöget a három magasságával (az egyes szögpontokból a szembenfekvő oldalakra bocsátott merőleges körívekkel) hat részre bontunk s az így nyert körívháromszögek közül kettőt-kettőt, amelyeknek közös oldalán derékszög és 0-szög van, egy háromszöggé egyesítünk. R. DEDEKIND tételét minden részletében először A. HURWITZ [3] bizonyította be. Ugyanő [4] később még egyszerűsítette bizonyítását. Más bizonyítással szolgálnak pl. F. KLEIN [5] és R. FRICKE a modulusfüggvényekről írt ismert monográfiájukban. H. POINCARÉ [6] azon vizsgálataiból, amelyek a felső félsíknak *reguláris felosztásaira* vonatkoznak [7] s a határkörrel bíró automorf függvények elméletének alapját képezik, ismét más bebizonyítás adódik [8]. Az újabb irodalomból S. SAKS [9] és A. ZYGMUND függvénytanát említjük, mint amelyben szintén megtalálható a tétel egyik bebizonyítása.

Az alábbiakban R. DEDEKIND e tételének elemi geometriai bebizonyítását mutatjuk be, egy számelméleti tétel felhasználásával. Először is a moduláris alakzatnak más szerkesztését adjuk (1. §), majd ennek alapján újra bebizonyítjuk, hogy a moduláris csoport a (2) alatt felírt valós együtthatós transzformációk közül éppen azoknak a csoportja, amelyek az (1) alatti szögpontok alkotta körívháromszöget a moduláris alakzat egyes háromszögeibe (az alakzatot önmagába) viszik át (2. §). Végül ismét megmutatjuk, hogy a moduláris alakzat az egész felső félsíkot kitölti (3. §).

A jelzett számelméleti tétel (amelyet az elemi geometrián túlmenően felhasználunk) abban áll, hogy minden racionális egész együtthatós (2) alatti lineáris törtfüggvény (amelyben $\alpha\delta-\beta\gamma=1$) az

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}=a_n-\cfrac{1}{a_{n-1}-\cfrac{\ddots}{\ddots-\cfrac{1}{a_1-\cfrac{1}{a_0+\omega}}}}$$

lánctört alakban írható, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_n$ racionális egész számok [10]. Nyilvánvaló, hogy minden ilyen lánctört a (2) alatti racionális egész együtthatós alakra hozható, tekintve, hogy racionális egész szám hozzáadása, valamint a negatív reciprok érték képezése a lineáris törtfüggvénynek egész együtthatós és 1 determinánsú voltát nem változtatja meg. Tehát összefoglalóan azt mondhatjuk, hogy a moduláris csoportot azok a

$$\omega'=a_n-\cfrac{1}{a_{n-1}-\cfrac{\ddots}{\ddots-\cfrac{1}{a_1-\cfrac{1}{a_0+\omega}}}} \tag{2*}$$

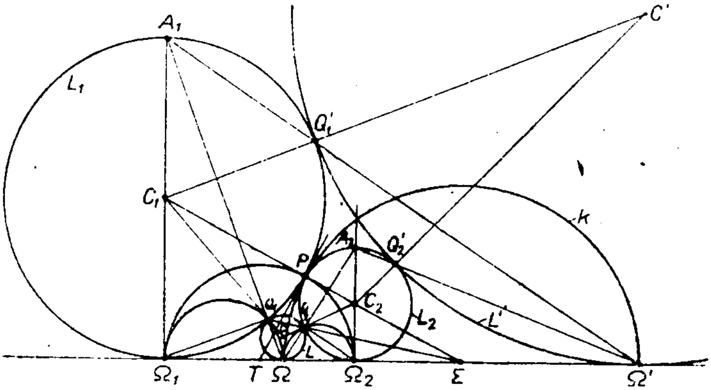
transzformációk alkotják, amelyekben $a_0, a_1, \ldots, a_n$ racionális egész számok. Ezt fogjuk a 2. §-ban felhasználni.

Megjegyezzük még, hogy a komplex szám fogalma csupán kifejezésmódunk rövidségét szolgálja s a tárgyalásból triviálisan ki volna küszöbölhető, ω alatt valós változót értve.

1. §. A moduláris alakzat szerkesztése

Tekintsünk a felső félsíkon a valós tengelyt érintő két kört, amelyek egymással kívülről érintkeznek. A moduláris alakzat szerkesztése annak a két körnek szerkesztésére vezethető vissza, amelyek a valós tengelyt és e két kört érintik. Ezeket következőképp szerkeszthetjük.

Legyenek az adott körök L_1 és L_2,[1]) középpontjaik C_1 és C_2, érintkezési pontjuk P s érintsék a valós tengelyt Ω_1 és Ω_2-ben (1. ábra). A C_1C_2 centrálisnak a valós tengellyel való Σ metszéspontja mint középpont körül rajzoljuk a k kört a P ponton át s jelöljük ennek a valós tengelyre eső pontjait Ω és Ω'-vel. Kössük össze Ω-t az L_1 körnek Ω_1-gyel átellenes A_1, valamint L_2-nek Ω_2-vel átellenes A_2 pontjával s legyen $A_1\Omega$, ill. $A_2\Omega$-nak az L_1, ill. L_2 körrel való másik metszéspontja Q_1, ill. Q_2. Akkor a C_1Q_1 és C_2Q_2 egyenesek C metszéspontját meghatározván, a C mint középpont körül Ω-n át



1. ábra

rajzolt L kör a valós tengelyt Ω-ban, az L_1 és L_2 köröket pedig Q_1, ill. Q_2-ben érinti. Ezt következőképpen bizonyítjuk be.

Az L_1 és L_2 körök P-beli közös érintőjének a valós tengellyel való metszéspontját T-vel jelölve $\overline{T\Omega_1} = \overline{TP} = \overline{T\Omega_2}$, tehát az Ω_1, P és Ω_2 pontok T középpontú félkörön vannak, s mivel $PT \perp C_1C_2$, e félkör a C_1C_2 centrálist P-ben érinti. Ennélfogva

$$\overline{P\Sigma}^2 = \overline{\Omega_1\Sigma} \cdot \overline{\Omega_2\Sigma}$$

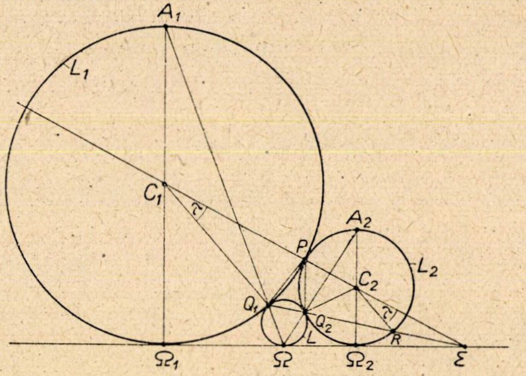
vagyis Ω_1 és Ω_2 egymás tükörképei a k körre vonatkozólag. Minthogy THALES tétele értelmében $\Omega_1Q_1 \perp \Omega A_1$, valamint $\Omega_2Q_2 \perp \Omega A_2$, azért az $\overline{\Omega\Omega_1}$ átmérőjű kör átmegy a Q_1, az $\overline{\Omega\Omega_2}$ átmérőjű pedig a Q_2 ponton. De e körök egymás tükörképei k-ra nézve, minthogy az előbbiek szerint Ω_1 és Ω_2 ilyenek. S mivel ugyanezen oknál fogva L_1 és L_2 is egymás tükörképei k-ra vonatkozólag, azért a Q_1 és Q_2 pontok szintén ilyenek. Tehát a Q_1, Q_2, Σ pontok egy egyenesen vannak és

$$\overline{Q_1\Sigma} \cdot \overline{Q_2\Sigma} = \overline{P\Sigma}^2 = \overline{\Omega\Sigma}^2$$

[1]) A felső félsíkot POINCARÉ-féle félsíknak tekintve, amely a hiperbolikus síknak egy megvalósítása (H. POINCARÉ [6], i. h. § 2, 6—8., resp. 112—114), a valós tengelyt érintő körök a vele párhuzamos egyenesekkel együtt a hiperbolikus sík *paraciklusai (horiciklusai)* vagyis BOLYAI JÁNOS [11] L-vonalai. Ez magyarázza fenti jelölésünket.

s így a Q_1, Q_2, Ω pontokon átmenő kör Ω-ban érinti a valós tengelyt. Ebből pedig következik, hogy e kör derékszögben metszi az $\Omega_1 Q_1 \Omega$ és $\Omega_2 Q_2 \Omega$ köröket s ennélfogva Q_1-ben érinti az előbbire merőleges L_1, Q_2-ben viszont az utóbbira merőleges L_2 kört. Tehát a $C_1 Q_1$ és $C_2 Q_2$ egyenesek C metszéspontja éppen e kör középpontja, vagyis e kör összeesik a C középpontú és az Ω ponton átmenő fenti körrel. Ezzel kimutattuk, hogy az utóbbi kör a valós tengelyt Ω-ban, az L_1 és L_2 köröket pedig Q_1, ill. Q_2-ben érinti.

Hasonlóan adódik a másik keresett L' kör, amely a valós tengelyt Ω'-ben, az L_1, ill. L_2 kört pedig Q_1', resp. Q_2'-ben érinti.



2. *ábra*

Az így szerkesztett két körön kívül más kör nincs, amely a kívánt tulajdonságú volna. Tegyük fel ui., hogy valamely L kör a valós tengelyt Ω-ban érinti s L_1 és L_2-vel Q_1, ill. Q_2-ben kívülről érintkezik (2. ábra). Akkor a $Q_1 Q_2$ egyenes tudvalevőleg átmegy L_1 és L_2 külső hasonlósági pontján, amely nem egyéb, mint a $C_1 C_2$ centrális és a valós tengely előbbi Σ metszéspontja. Jelöljük $Q_1 Q_2$-nek az L_2 körrel való második metszéspontját R-rel. Minthogy Σ a két kör külső hasonlósági pontja, azért $\tau = Q_1 C_1 \Sigma\sphericalangle = R C_2 \Sigma\sphericalangle$, tehát a kerületi szögek tétele alapján

$$Q_1 P \Sigma\sphericalangle = \pi - \frac{\pi - \tau}{2} = \frac{\pi + \tau}{2} = \Sigma Q_2 P\sphericalangle,$$

következőleg $P Q_1 \Sigma_\triangle \sim Q_2 P \Sigma_\triangle$ s így

$$\overline{Q_1\Sigma} : \overline{P\Sigma} = \overline{P\Sigma} : \overline{Q_2\Sigma}$$

vagyis

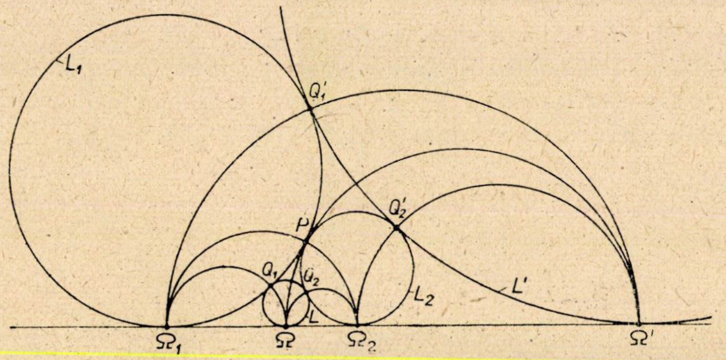
$$\overline{P\Sigma}^2 = \overline{Q_1\Sigma} \cdot \overline{Q_2\Sigma}.$$

De mivel a feltevés szerint L a valós tengelyt Ω-ban érinti, azért egyben

$$\overline{\Omega\Sigma}^2 = \overline{Q_1\Sigma} \cdot \overline{Q_2\Sigma}.$$

Ennélfogva $\overline{\Omega\Sigma} = \overline{P\Sigma}$ vagyis Ω az előbbi k kör és a valós tengely egyik metszéspontja. Mivel pedig Q_1 az L és L_1, Q_2 viszont az L és L_2 körök belső hasonlósági pontja, azért ΩQ_1 átmegy L_1-nek Ω_1-gyel átellenes A_1, ΩQ_2 pedig L_2-nek Ω_2-vel átellenes A_2 pontján. A feltételezett L kör tehát az előbb szerkesztett két kör egyikével azonos. E kettőn kívül tehát több ilyen kör valóban nincsen.

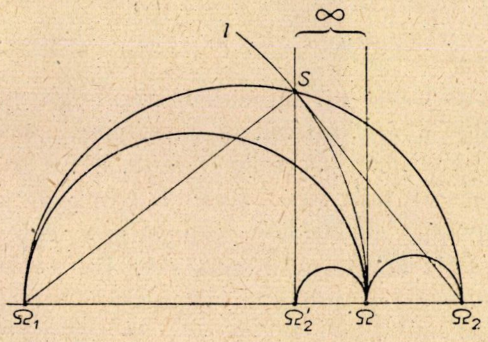
Minthogy a szerkesztés szerint Ω és Ω' a P-n át vezetett Σ középpontú k kör és a valós tengely metszéspontjai s e kör az $\Omega_1 P \Omega_2$ kört derékszögben metszi, azért e pontok egymás tükörképei az utóbbi körre vonatkozólag. Ebből pedig nyilván következik, hogy *az $\Omega_1\Omega_2\Omega$ és $\Omega_1\Omega_2\Omega'$ körívháromszögek is egymás tükörképei az $\Omega_1 P \Omega_2$ körre nézve* (3. ábra). Az $\Omega_1 P \Omega_2$



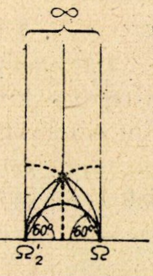
3. ábra

és $\Omega P \Omega'$ körök ortogonalitásából egyben az is látható, hogy *az $\overset{\frown}{\Omega P}$ ív az $\Omega_1\Omega_2\Omega$ körívháromszögnek, $\overset{\frown}{\Omega' P}$ pedig $\Omega_1\Omega_2\Omega'$-nek az $\overset{\frown}{\Omega_1\Omega_2}$ oldalhoz tartozó magassága.*

Megmutatjuk most, hogy általában, *ha Ω_1, Ω_2 és Ω a valós tengely különböző pontjai, az $\Omega_1\Omega_2\Omega$ körívháromszög magasságai egy ponton mennek át és egymást 120° alatt metszik.*[2])



4. ábra



5. ábra

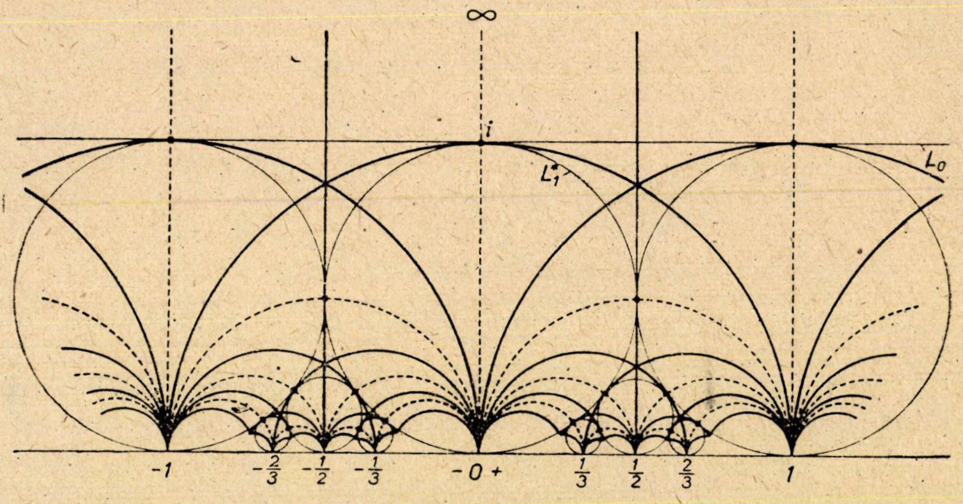
[2]) Ez a Poincaré-féle félsík révén (lásd az [1]) lábjegyzetet) elemi geometriai kifejezése a hiberbolikus sík aszimptotikus háromszögeire vonatkozó megfelelő tételnek.

Feltehetjük, hogy (amint a fenti ábrákon is) Ω az Ω_1 és Ω_2 közé esik (4. ábra). Tekintsük az Ω_1 középpontú és Ω-n átmenő l kört s jelöljük ennek az $\overparen{\Omega_1\Omega_2}$ félkörrel való metszéspontját S-sel. Ez l körre vonatkozó tükrözésnél Ω önmagába, Ω_1 pedig a ∞-be megy át. Ugyanekkor Ω_2 tükörképe az S pontnak a valós tengelyen levő Ω_2' vetülete, minthogy THALES tétele értelmében $\Omega_1 S \Omega_2 \sphericalangle$ derékszög és így

$$\overline{\Omega_1\Omega_2'}\cdot\overline{\Omega_1\Omega_2}=\overline{\Omega_1 S}^2.$$

Ezekből folyólag az $\Omega_1\Omega_2\Omega$ körívháromszögnek az l körre vonatkozó tükörképe a $\infty\Omega_2'\Omega$ körívháromszög. Mivel pedig az utóbbira nyilván igaz a tétel (5. ábra) és az inverziónál a szögek nagysága megmarad, azért a tétel érvényes az eredeti $\Omega_1\Omega_2\Omega$ körívháromszögre is.

Ha mármost kiindulva a valós tengelyt érintő és egymással kívülről érintkező két körből (amelyek egyike a valós tengellyel párhuzamos egyenes is lehet, mint azt a ∞-ben érintő elfajuló kör) a fenti módon megszerkeszt-



6. ábra

jük az ezeket és a valós tengelyt érintő két új kört, majd az így nyert négy kör közül kettő-kettőre ismételjük a szerkesztést, a most már nyolc körből álló rendszerben kettő-kettőre újra ismételjük s így tovább, akkor a mondottak szerint három-három egymással kettenként kívülről érintkező körnek a valós tengellyel való érintési pontjai alkotta körívháromszögek egy ilyennek az oldalakra vonatkozó szukcesszív tükrözésével adódnak. És a szerkesztés folyamán minden ilyen körívháromszög a három magassága által hat körívháromszögre bomlik, amelyeknek szögei 90°, 60° és 0°. Az így nyert háromszögek közül kettőt-kettőt, amelyeknek közös oldalán derékszög és 0-szög van, egy háromszöggé egyesítve, a körívháromszögeknek olyan hálózatát nyerjük, amelyben mindegyik háromszögnek két szöge 60°, egy pedig 0-szög.

Ezt a szerkesztést arra az esetre alkalmazva, amelyben a kiindulásul szolgáló két kör egyike a 0 és i pontokat összekötő egyenesdarabra mint átmérőre szerkesztett $x^2-y+y^2=0$ egyenletű kör, a másik pedig ezt az i pontban érintő $y=1$ egyenes (mint elfajuló kör), a fentebbiek értelmében éppen a moduláris alakzat áll elő (6. ábra, ahol a háromszögek határa vastagon van kihúzva).

2. §. A moduláris csoport geometriai interpretációja

A rövidség kedvéért bevezetünk néhány átmeneti elnevezést. Nevezzünk a valós tengelyt érintő köröknek abban a rendszerében, amely a moduláris alakzat fenti szerkesztésében szerepel, vagyis amelyet az $x^2-y+y^2=0$ kör és az $y=1$ egyenes (mint elfajuló kör) a leírt szerkesztés szerint definiál, minden kört *segédkörnek*, az egyes érintési pontokat az illető segédkör valós tengelyen lévő érintési pontjával összekötő és e tengelyre merőleges köríveket e segédkör *bordáinak*. (Ez utóbbiak a 6. ábrán szaggatott vonallal vannak kihúzva.) Az $y=1$ segédkör bordái a valós tengelyre merőleges félegyenesek (elfajuló körívek), amelyek ennek érintési pontjait a ∞-nel kötik össze; az i pontot a ∞-nel összekötő félegyenes neveztessék *alapbordának*. A moduláris alakzat körívháromszögeit nevezzük *sárkányoknak*, ezek közül az (1) alatti szögpontokkal bírót *alapsárkánynak*. Végül a valós együtthatós (2) alatti lineáris transzformációkat (amelyek az $y>0$ félsíkot, valamint a valós tengelyt önmagába viszik át) nevezzük *hiperbolikus mozgásoknak*.[3]) Ismeretes, hogy e mozgások kör- és szögtartóak, minthogy a valós tengely mentén való eltolásból, az egységkörre vonatkozó inverzió- és a képzetes tengely körüli átfordításból, továbbá a kezdőpontra vonatkozó hasonlósági transzformációból tevődnek össze, amint (2)-re tekintettel $\gamma \neq 0$ esetén az

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{1}{\gamma^2\left(\omega+\frac{\delta}{\gamma}\right)},$$

$\gamma=0$ esetén pedig az

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\delta}=\frac{1}{\delta^2}\omega+\frac{\beta}{\delta}$$

átalakitásból közvetlenül láthatjuk is. Ennek alapján nyilvánvaló, hogy bármelyik sárkány hiperbolikus mozgással átvihető az alapsárkányba; ez ti. az a mozgás, amely a sárkány valós tengelyen lévő szögpontjához tartozó magasságát képező bordát az alapbordába viszi át. Az egyes sárkányokat az alapsárkányba vivő hiperbolikus mozgások tehát azonosak az egyes bordákat az alapbordába átvivő mozgásokkal.

[3]) Ezek a felső félsíknak mint hiperbolikus síknak a mozgásai, analitikusan kifejezve (v. ö. az [1]) jegyzettel).

Bebizonyítjuk, hogy *az egyes bordákat az alapbordába vivő ezen hiperbolikus mozgások a moduláris csoportot alkotják.* Ez a mondottak alapján nyilván ekvivalens R. DEDEKIND idézett tételének azzal a részével, amely szerint — az imént bevezetett kifejezésmódot használva — a moduláris csoport az alapsárkányt az egyes sárkányokba átvivő hiperbolikus mozgások csoportja.

Jelöljük az $y=1$ segédkört L_0-lal (6. ábra); ennek egyik bordája az alapborda, amely az i pontot a ∞-nel köti össze. Minden borda, bármelyik segédkörhöz tartozzék is, úgy nyerhető, hogy vesszük az L_0 segédkört, azután az ezt érintő egyik L_1 segédkört, majd az utóbbit érintő egyik L_2 segédkört és így tovább, végül az L_{n-1}-et érintő egyik L_n segédkört s abban valamelyik bordát. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ezt az alapbordába viszi valamely

$$\omega' = a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_0 + \omega}}}} \tag{3}$$

hiperbolikus mozgás, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_n$ racionális egész számok. (Ez alatt $n=0$ esetén az $\omega' = a_0 + \omega$ mozgást értjük.)

Az állítás $n=0$-ra igaz, mert az L_0 segédkörben két szomszédos borda távolsága 1 lévén, ennek bármely bordáját az alapbordába viszi bizonyos $\omega' = a_0 + \omega$ hiperbolikus mozgás, ahol a_0 racionális egész szám. Tegyük fel most, hogy az állítás $(n-1)$-re igaz; megmutatjuk, hogy akkor igaz n-re is. Tekintsük L_{n-1}-nek azt a bordáját, amely L_{n-1} és L_n érintkezési pontjához tartozik. Ezt feltevésünk szerint az alapbordába viszi valamely

$$S_{n-1}(\omega) = a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_0 + \omega}}}}$$

hiperbolikus mozgás, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ racionális egész számok. E mozgás az L_n segédkörnek ugyanezen érintkezési ponthoz tartozó bordáját (amely az előbbit a valós tengelyre merőleges félkörré egészíti ki) nyilván az L_0-t az i pontban érintő L_1^* segédkörnek (6. ábra) ehhez a ponthoz tartozó bordájába, vagyis e pontot a 0 ponttal összekötő egyenesdarabba viszi át. Ennélfogva a $-1/S_{n-1}(\omega)$ hiperbolikus mozgás L_n-nek ezt a bordáját az alapbordába viszi. Minthogy ekkor maga L_n nyilván L_0-ba kerül bordástól, azért L_n-nek valamely kiszemelt bordáját az alapbordába viszi át bizonyos

$$S_n(\omega) = a_n - \frac{1}{S_{n-1}(\omega)}$$

hiperbolikus mozgás, ahol a_n szintén racionális egész szám. Ez azonban $S_{n-1}(\omega)$ fenti alakjára tekintettel éppen a (3) alatti alakkal bír. Az állítás tehát valóban n-re is igaz. Ennélfogva az állítás minden n-re igaz.

Hasonlóképp mutathatjuk meg teljes indukcióval, hogy fordítva, minden (3) alatti hiperbolikus mozgás, amelyben $a_0, a_1, \ldots, a_n$ racionális egész számok, egy a leírt módon előálló L_n segédkör valamely bordáját viszi az alapbordába. Speciálisan az $a_0 + \omega$ alakú hiperbolikus mozgások, amelyekben a_0 racionális egész szám, az L_0 egyes bordáit viszik át az alapbordába.

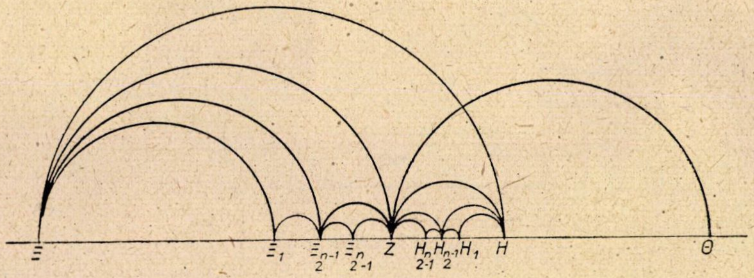
Ezek szerint az egyes bordákat az alapbordába vivő hiperbolikus mozgások összességét azok a (3) alatti alakkal bíró mozgások alkotják, amelyekben $a_0, a_1, \ldots, a_n$ racionális egész számok. Minthogy pedig a bevezetésben mondottak szerint az utóbbiak éppen a moduláris csoportot alkotják, ezzel a fenti tétel be van bizonyítva.

Amint e bizonyításból is látható, a moduláris csoportnak ez a geometriai interpretációja, vagyis amely szerint (az eredeti fogalmazásban) e csoport az (1) alatti szögpontokkal bíró körívháromszöget a moduláris alakzat egyes háromszögeibe átvivő valós együtthatós (2) alatti transzformációk csoportja, *független attól, hogy ez alakzat az egész felső félsíkot kitölti-e vagy sem.*

3. §. A moduláris alakzat hézagtalansága

Bebizonyítjuk most R. DEDEKIND szóbanforgó tételének azt a részét, amely szerint a moduláris alakzat az egész felső félsíkot kitölti, röviden szólva *hézagtalan*. Ennek bebizonyítását [12] a következő tételre alapítjuk:

Legyen p_1 a félkörök alkotta $\Xi H Z$ körívháromszög, ahol Z a Ξ és H közé esik. E körívháromszög a $\widehat{\Xi Z}$ és a $\widehat{HZ}$ oldalakra vonatkozó tükörképeivel kiegészítve legyen a p_2 körívpoligon, ez az előbbi kiegészítő háromszögeknek a két-két új oldalra vonatkozó tükörképeivel kiegészítve legyen p_3 s így tovább. Akkor feltéve, hogy $\widehat{\Xi Z} \geqq \widehat{HZ}$, a p_n körívpoligon $\widehat{\Xi H}$-tól különböző oldalai közül a Ξ-ből kiinduló a legnagyobb.



7. *ábra*

Bizonyítás. Az állítás $n = 1$-re igaz a feltevés szerint. Megmutatjuk, hogy ha n-re igaz a leírt módon előálló bármely körívpoligon esetén, akkor $(n+1)$-re is érvényes. Legyenek p_{n+1}-nek a ΞH egyenesre (a valós tengelyre) eső szögpontjai (7. ábra)

$$\Xi, \Xi_1, \ldots, \Xi_{2^n-1}, Z, H_{2^n-1}, \ldots, H_1, H.$$

Ezek közül Ξ_{2^n-1} a szerkesztésből folyólag H-nak a $\overset{\frown}{\Xi Z}$ ívre vonatkozó, H_{2^n-1} pedig Ξ-nek $\overset{\frown}{HZ}$-re vonatkozó tükörképe, tehát nyilván

$$\overset{\frown}{\Xi\Xi_{2^n-1}} \geqq \overset{\frown}{\Xi_{2^n-1}Z}, \quad \overset{\frown}{HH_{2^n-1}} \geqq \overset{\frown}{H_{2^n-1}Z}.$$

Ennélfogva indukciófeltevésünk szerint a $Z\Xi\Xi_1\ldots\Xi_{2^n-1}$ körívpoligonnak

$$\text{(4)} \qquad \overset{\frown}{\Xi\Xi_1}, \overset{\frown}{\Xi_1\Xi_2}, \ldots, \overset{\frown}{\Xi_{2^n-1}Z}$$

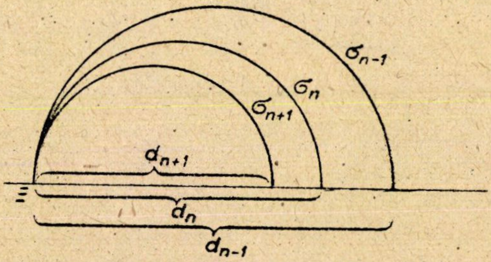
oldalai közül a legnagyobb $\overset{\frown}{\Xi\Xi_1}$ s hasonlóképp $ZHH_1\ldots H_{2^n-1}$-nek

$$\text{(5)} \qquad \overset{\frown}{HH_1}, \overset{\frown}{H_1H_2}, \ldots, \overset{\frown}{H_{2^n-1}Z}$$

oldalai közül a legnagyobb $\overset{\frown}{HH_1}$. De Z-ból a $\overset{\frown}{\Xi H}$-ra merőleges $\overset{\frown}{Z\theta}$ félkört húzva, a szerkesztésből nyilván következik, hogy a $Z\Xi\Xi_1\ldots\Xi_{2^n-1}$ körívpoligon tükörképe $\overset{\frown}{Z\theta}$-ra éppen $ZHH_1\ldots H_{2^n-1}$. S mivel $\overset{\frown}{\Xi Z} \geqq \overset{\frown}{HZ}$ folytán előbbi a $\overset{\frown}{Z\theta}$-t tartalmazó körön kívül van, azért $\overset{\frown}{\Xi\Xi_1} \geqq \overset{\frown}{HH_1}$. Ennélfogva valamennyi (4) és (5) alatti ív közül (amelyek p_{n+1}-nek a $\overset{\frown}{\Xi H}$-tól különböző összes oldalai) a legnagyobb $\overset{\frown}{\Xi\Xi_1}$, az állítás $(n+1)$-re is igaz. Tehát az állítás minden n-re igaz. Qu. e. d.

Jelöljük p_n-nek a $\overset{\frown}{\Xi H}$-tól különböző oldalai közül ezt a Ξ-ből kiinduló legnagyobb ívet σ_n-nel és legyen ennek átmérője d_n. Egyöntetűség kedvéért legyen $\sigma_0 = \overset{\frown}{\Xi H}$ és ennek átmérője d_0. A szerkesztésből folyólag σ_{n-1}-nek a σ_n-re vonatkozó tükörképe σ_{n+1} (8. ábra), tehát

$$\left(d_{n-1} - \frac{d_n}{2}\right)\left(d_{n+1} - \frac{d_n}{2}\right) = \left(\frac{d_n}{2}\right)^2$$



8. ábra

vagyis

$$d_{n-1}d_{n+1} - \frac{d_n}{2}(d_{n+1} + d_{n-1}) = 0,$$

honnan

$$\frac{1}{d_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_{n-1}} + \frac{1}{d_{n+1}}\right)$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

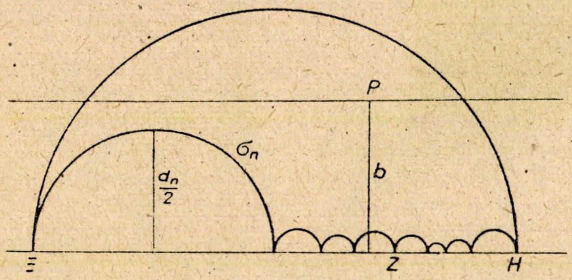
Eszerint

$$\frac{1}{d_0}, \frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_n}, \ldots$$

növekedő számtani haladványt alkotnak s így $1/d_n \to +\infty$, azaz

$$(6) \qquad d_n \to 0.$$

Most már könnyű megmutatnunk, hogy *a $\widehat{\Xi H}$ félkör és az átmérője által határolt félkörkaréj bármely belső pontja eléggé nagy n mellett a p_n körívpoligon belsejében van.*



9. ábra

Legyen ui. e félkörkaréj valamely belső P pontjának ordinátája b. (6) alapján

$$(7) \qquad \frac{d_n}{2} < b, \text{ ha } n \text{ eléggé nagy.}$$

Miután fenti tételünk szerint a p_n körívpoligonnak a $\widehat{\Xi H}$-tól különböző oldalai közül a legnagyobb σ_n, amelynek sugara $\frac{d_n}{2}$, azért (7)-ből következik, hogy mindezen félkörívek sugara kisebb b-nél, tehát ezek valamennyien a P ponton átmenő $y = b$ egyenes alatt vannak (9. ábra). Következőleg P a p_n körívpoligon belsejében van.

Ez utóbbi tételből mármost nyilván következik, hogy a felső félsíkon felvett 01∞ körívháromszögnek az oldalakra vonatkozó szukcesszív tükrözésével nyert háromszöghálózat az egész felső félsíkot kitölti. Ugyanez érvényes tehát a moduláris alakzatra is, amely e hálózatból az egyes körívháromszögeknek a magasságokkal való hat részre osztásával s az így nyert kisebb háromszögeknek páronkénti összefoglalásával keletkezik. Ezzel a moduláris alakzat hézagtalanságát bebizonyítottuk.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] R. Dedekind, Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Journal für die reine und angewandte Mathematik **83** (1877), 265—292, speciálisan § 2, 271—273, vagy Gesammelte mathematische Werke I, Braunschweig 1930, 174—201, speciálisan 180—183.

[2] F. Klein, Über die Transformation der elliptischen Funktionen und Auflösung der Gleichungen fünften Grades, Mathematische Annalen **14** (1878—79), 111—172, speciálisan Abschnitt I, §§ 6—7, 119—122, vagy Gesammelte mathematische Abhandlungen III, Berlin 1923, 13—75, speciálisan 21—24.

[3] A. Hurwitz, Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe, Mathematische Annalen **18** (1881), 528—592, speciálisan 531—536, vagy Mathematische Werke I, Basel 1932, 1—66, speciálisan 5—10.

[4] A. Hurwitz, Über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Mathematische Annalen **58** (1904), 343—360, speciálisan 343—347, vagy Mathematische Werke I, Basel 1932, 577—595, speciálisan 577—581.

[5] F. Klein—R. Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, I. Band, Leipzig 1890, Zweites Kapitel §§ 1—6, 208—223.

[6] H. Poincaré, Théorie des groupes fuchsiens, Acta Mathematica 1 (1882), 1—62 speciálisan 27—39, vagy Oeuvres II, Paris 1916, 134—146.

[7] H Poincaré, i. h. 12, resp. 118.

[8] V. ö. É. Picard, Traité d'analyse t. III., 3^e ed., Paris 1928, 343—349.

[9] S. Saks—A. Zygmund, Analytic Functions, Translated by E. J. Scott, Warszava—Wroclaw 1952, Chapter VIII, §§ 11—12, 387—401.

[10] V. ö. pl. P. G. Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausg. von R. Dedekind, 4 Aufl., Braunschweig 1894, § 81, 195—197.

[11] Johannes Bolyai de eadem, Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens etc., Marosvásárhely 1832, § 11; magyarul lásd pl. Bolyai János, Appendix, Kárteszi Ferenc bevezetésével, megjegyzéseivel és kiegészítéseivel, Budapest 1952, 83.

[12] Más bebizonyítást illetően v. ö. pl. W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, I. Band, 4. Aufl., Leipzig—Berlin 1923, 705—706.

A BLAZSKO-EFFEKTUSRÓL*

DETRE LÁSZLÓ

Blazsko-effektusnak — mint bizonyára tudják — a rövidperiódusú Delta Cephei-csillagok (RR Lyrae-csillagok) fénygörbéiben mutatkozó periódikus változásokat nevezik. E kérdésről az újabb időben igen sok vizsgálat jelent meg, elsősorban a szovjet csillagászati irodalomban, továbbá a leideni, cordobai, budapesti, valamint a Mc Donald-Obszervatóriumból. Így a jelenlegi rendelkezésre álló megfigyelési anyag, hozzávéve a budapesti még nem publikált anyagot, lehetővé teszi, hogy a Blazsko-effektusról néhány általános törvényszerűséget állapítsunk meg.

A megfigyelési anyagból a Blazsko-effektusra kapott adatokról áttekintést nyujt az alábbi táblázat. Ebben minden csillagra, melyre a Blazsko-

Csillag	P_0	P_1	P_1/P_0	P_2	P_2/P_1	Δm_1	Δm_2	$\overline{A}$	$\Delta m_1/\overline{A}$	$\Delta m_2/\overline{A}$
AC And	$0^d.525$	$0^d.711$	1.354	$2^d.04$:	2.9:	$1^m.37$	?	$0^m.80$	1.70	—
AI Vel	0.112	0.379	3.398	—	—	0.39	—	0.38	1.04	—
SX Phe	0.055	0.193	3.508	—	—	0.45	—	0.62	0.73	—
VZ Cnc	0.178	0.716	4.016	?	?	0.44	—	0.64	0.69	—
RW Cnc	0.547	29.6	54.7	91.1	3.05	0.65	0.32	1.19	0.55	0.25
Y LMi	0.522	33.4	63.7	85.2	2.56:	0.66:	0.48:	?	—	—
AR Her	0.470	31.6	67.3	?	?	0.53	—	1.32	0.40	—
RR Lyr	0.567	40.7	71.8	122.1	3.00	0.32	0.14	0.90	0.36	0.16
SW And	0.442	36.8	83.3	?	?	0.05	—	1.16	0.05	—
RZ Lyr	0.511	42.95	84.0	122.1	2.85	0.65	0.34	1.56	0.42	0.22
RW Dra	0.443	41.64	94.0	121.4	2.92	0.56	0.08:	1.40	0.40	0.06:
XZ Cyg	0.467	57.25	122.7	153.8:	2.69:	0.25	0.16	0.86	0.29	0.19
XZ Dra	0.476	76	160	—	—	0.32	—	1.29	0.25	—
RS Boo	0.377	537	1424	—	—	0.15	—	1.34	0.11	—

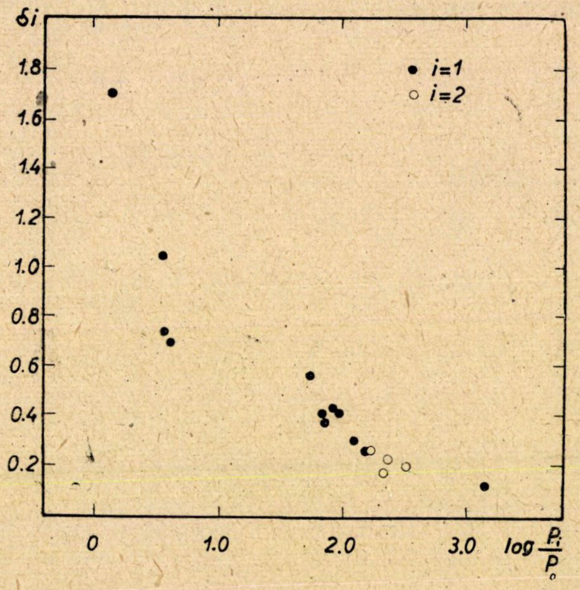
effektus periódusát sikerült megállapitani, fel van tüntetve sorban az alapperiódus: P_0, a Blazsko-effektus periódusa: P_1 és a P_1/P_0 hányados (a csillagok a táblázatban ennek értéke szerint vannak rendezve). Némely csillagnál még egy második Blazsko-effektust sikerült megállapitani, ennek hosszát P_2-vel jelöltük. Δm_1 és Δm_2 az alapperiódushoz tartozó fénygörbe maximális fényességének a P_1, illetve P_2 periódussal történő változásának amplitudóját

*A Szovjet Tudományos Akadémia Csillagászati Tanácsa Változócsillag-Szakosztályának az újjáépített pulkovoi csillagda felavatása alkalmából rendezett 11. konferenciáján 1954. május 25-én tartott előadás.

adja fényrendben kifejezve, $\bar{A}$ pedig a P_0-hoz tartozó közepes amplitudó. A táblázat két utolsó oszlopában szereplő $\Delta m_1/\bar{A}$ és $\Delta m_2/\bar{A}$ hányadosokkal lehet jellemezni a fénygörbe-változások erősségét.

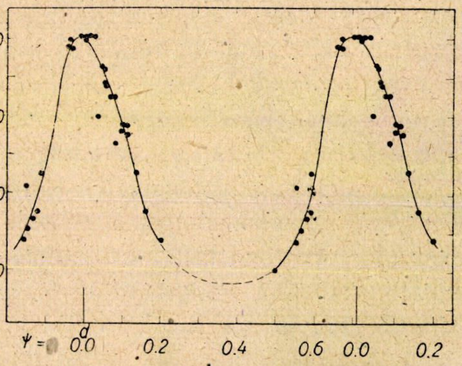
Amint a táblázatból láthatjuk, a P_1 szerint a csillagok két csoportra oszlanak. Az első csoportban $P_1 < 1^d$. Legújabban GUMAN mintegy 8000 felvétele alapján AC Andromedae-ről is kiderült, hogy ebbe a csoportba tartozik. A másik csoportban P_1 sokkal hosszabb, mint P_0. Érdekes, hogy a P_2/P_1 hányados értéke a különböző csillagokra közel állandó. A P_2-vel járó fénygörbe-változások amplitudója mindig lényegesen kisebb, mint a P_1-gyel járóké.

Elméleti szempontból a leglényegesebb a P_i/P_0 és a $\Delta m_i/\bar{A}$ ($i = 1, 2$) mennyiségek közti összefüggés (lásd az 1. ábrát). Minél hosszabb a Blazsko-effektus periódusa az alapperiódushoz képest, annál gyengébbek a fénygörbe-változások. Általában a Blazsko-effektust mint lebegést fogják fel, amely a radiális alaprezgés és egy ezzel közel kommenzurábilis periódusú, szintén



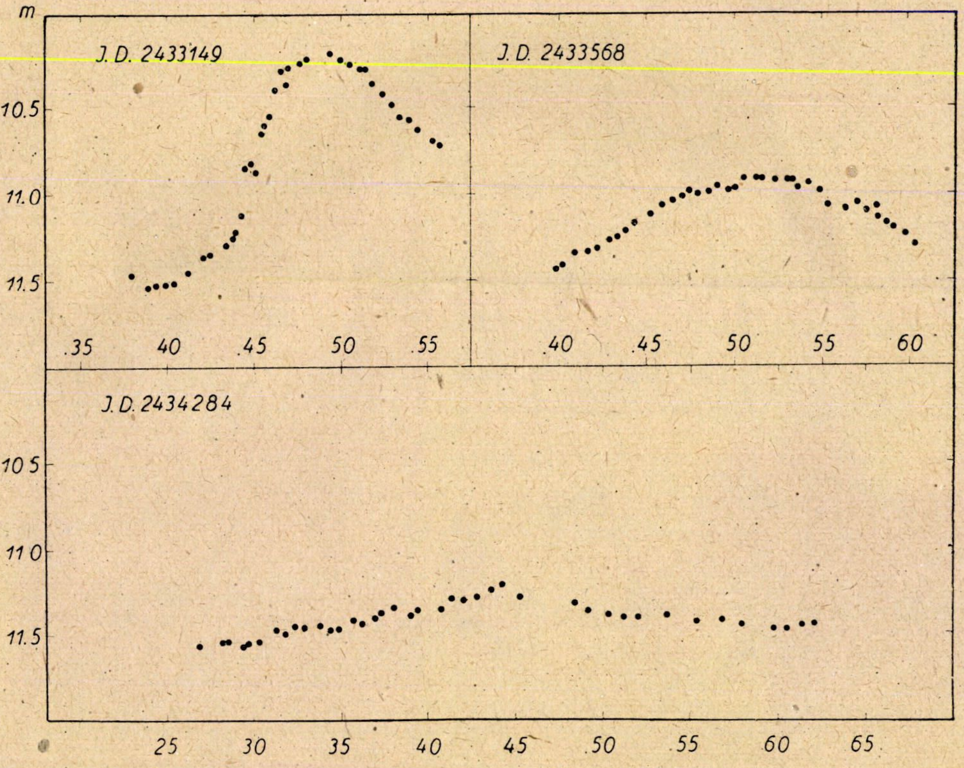
1. ábra. Összefüggés a Blazsko-effektus periódusának hossza és a fénygörbe-változások erőssége között. Abszcissza P_i/P_0, ordináta $\Delta m_i/\bar{A}$ ($i = 1, 2$)

radiális felrezgés interferenciájából keletkezik. Ezen interpretáció mellett az 1. ábrán bemutatott összefüggés azt jelentené, hogy minél szorosabb a kommenzurabilitás a két rezgés periódusa között, annál kisebb a lebegés amplitudója. De radiális felrezgések, energiájuk gyors disszipációja miatt, csak akkor maradhatnak meg huzamosabb ideig észrevehető erősséggel, ha az alaprezgéssel való rezonancia útján gerjesztődnek. Tehát ezen elmélet alapján a felrezgésnek és ezzel együtt a Blazsko-effektusnak akkor kellene a leg-



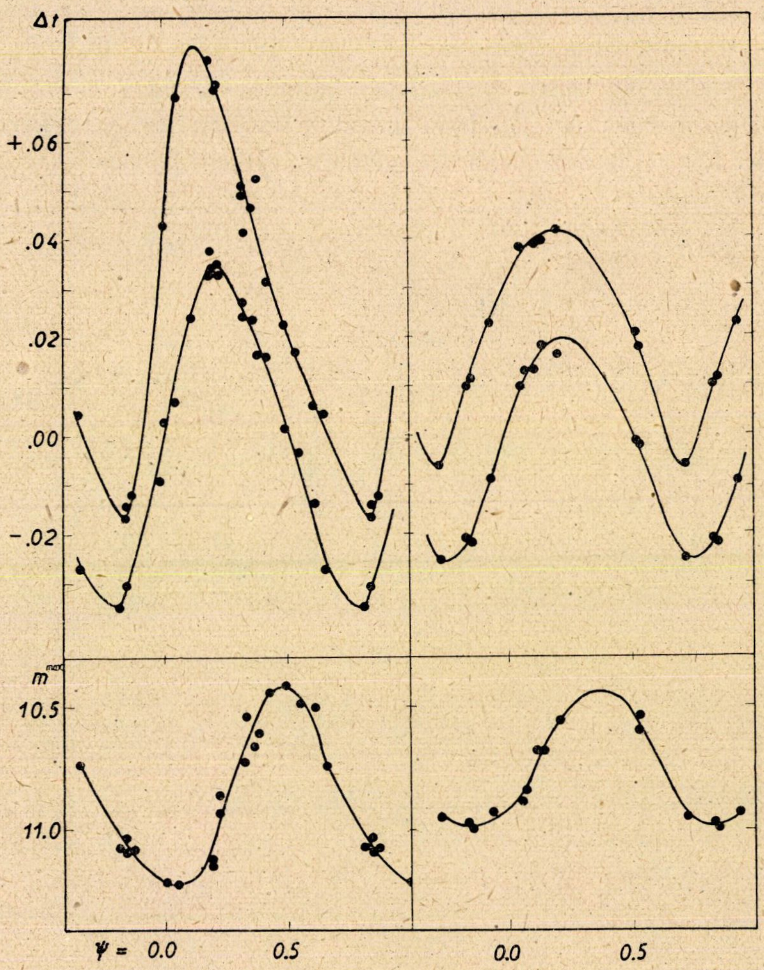
2. ábra. AC Andromedae maximális fényességének változása a $0^d.711$ periódussal Guman eredményei szerint. A még bizonytalan P_2 periódust az eredményekben nem küszöböltük ki, ezért nagyobb a szórás, mint a megfigyelési hibákból várható lenne.

erősebben jelentkeznie, mikor a kommenzurabilitás az alap és a felrezgés között a legszorosabb. Az 1. ábrán mutatott összefüggés ennek éppen az ellenkezője. Így a Blazsko-effektust aligha lehet radiális felrezgésekkel magya-



3. ábra. AC Andromedae P_0-periódusú rezgésének fénymaximumai a P_1 periódus különböző fázisaiban (Guman fotografikus megfigyelései szerint) rázni. Az első csoport pedig kizárja, hogy a csillagok tengelyforgása által gerjesztett zonális rezgések okozzák a szekundér periódusokat, mert a tengelyforgásnak akkor olyan gyorsnak kellene lenni, hogy annak már mutatkozni kellene a spektrumvonalak kiszélesedésében.

Az AC Andromedae fénygörbeváltozását eddig annyira komplikáltnak tartották, hogy külön változócsillagtípust neveztek el róla és külön hipotézist állítottak fel a vele kapcsolatban megfigyelt jelenségek megmagyarázására. Eredményeink alapján AC Andromedae csak abban különbözik a többi Blazsko-effektust mutató csillagtól, hogy nála P_1 alig nagyobb P_0-nál. A $P_1 = 0^d\!.711$ periódussal igen jól sikerült ábrázolni a P_0 periódus maximumainak változásait, mint a 2. ábra mutatja.

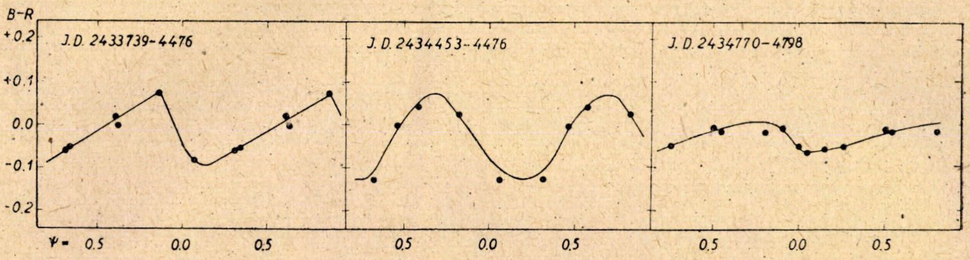


4. ábra. A Blazsko-effektus változása RW Draconisnál Balázs és Detre fotografikus megfigyelései szerint (lásd a szöveget).

A fénygörbeváltozások ennél a csillagnál a legerősebbek. Az ábrán a szaggatott vonallal jelzett részen a maximum helye és fényessége nem határozható meg, mert a P_0 periódusú fényváltozás amplitudója a P_1-nek ebben a fázisában nulla. Sőt előfordulhat, hogy a P_0-rezgés megelőző minimuma fényesebb a maximumnál. A maximumok különböző alakjait 3. ábránk mutatja.

Miután több csillag Blazsko-effektusára sok új megfigyelési anyagot dolgoztunk fel, kiderült, hogy az effektus maga sem állandó jellegű. Így a 4. ábrán bemutatom az RW Draconisra kapott eredmény két részletét. Az ábra baloldala az 1937., a jobboldala az 1941. évre vonatkozik. A három görbe felülről lefelé sorban: 1. A fénymaximum idejének oszcillációja, 2. a fénygörbe felszálló ágában a közepes magnitudó időpillanatának oszcillációja, 3. a maximum fényességének változása a P_1 perióduson belül. Az abszcissza (ψ) jelenti a Blazsko-effektus fázisát. Látjuk, hogy különösen a maximum idejének oszcillációja milyen erősen lecsökken négy év alatt, de megváltozott a fázisreláció is közte és a maximum fényességének változása között. A 16 cm-es asztrográfunkon az 1936—1953. években készített több mint 8000 felvétel alapján, valamint Blazsko régebbi vizuális megfigyeléseiből meg lehetett állapítani, hogy a Blazsko-effektus ezen változása ismét periódusos. A konferencia szünetében tudtam meg BATYIREV professzortól, hogy az ő vizuális megfigyeléseiből is kimutatható a Blazsko-effektus e változása.

Ugyanilyen jelenség észlelhető RR Lyrae és VZ Cancri Blazsko-effektusában is. A $P_1 < 1$ csoport tagjai tehát e tekintetben ugyanúgy viselkednek, mint a $P_1 \gg 1^d$ csoport tagjai. 5. ábránk mutatja VZ Cancri Blazsko-effektusának változását GUMAN fotoelektromos észlelései szerint. Itt a Blazsko-effektus amplitudójának változására kb. 3 évi ciklus adódott.

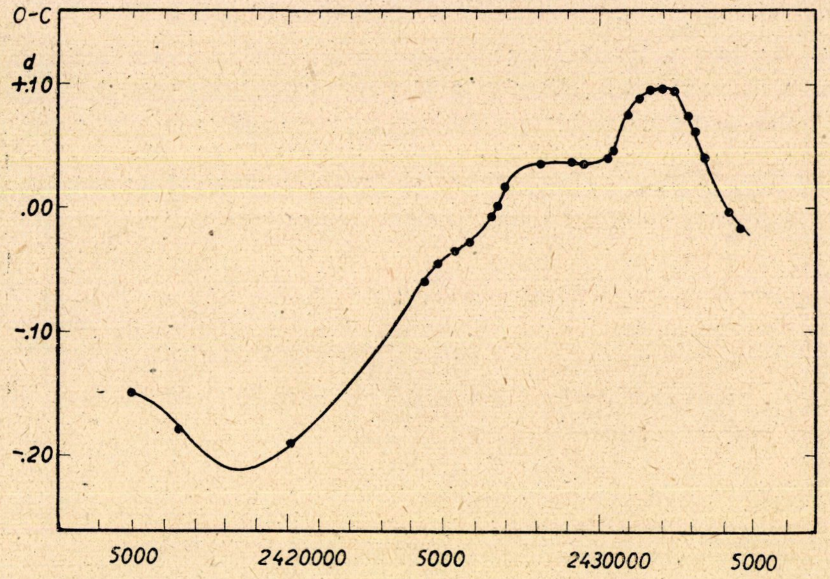


5. ábra. A fénymaximum idejének oszcillációja VZ Cancrinál GUMAN fotoelektromos észlelései szerint. A baloldali kép az 1951—52. a középső az 1952—53. a jobboldali az 1953—54. évi észlelésekből adódott.

A főperiódus (P_0) változásaiban néhány RR Lyrae-csillagnál már régebben is sikerült hosszúperiódusú tagokat megállapítani. Magára az RR Lyraere kb. 15 000 felvételből és 3000 fotoelektromos megfigyelésből kimutattunk (BALÁZS—DETRE—GUMAN) a P_0 változására egy 10 éves ciklust, de azon felül sikerült megmutatni, hogy ezen a 10 éves cikluson belül nemcsak P_0, hanem a közepes fénygörbe (ami alatt a P_1 és P_2 periódusú változások kiküszöbölése után nyert fénygörbét értjük) is változik. Éspedig ugyanolyan változásokat találtunk, mint amilyeneket a fénygörbe a P_1 és P_2 periódusokkal mutat. Tehát tulajdonképpen ez a 10 éves ciklus is egy újabb Blazsko-effektus.

A 6. ábrán bemutatjuk RR Lyrae úgynevezett $(O-C)$-diagrammját a felszálló ág közepére vonatkozólag. Az abszcissza jelenti az időt julián napokban, az ordináta azon időpontnak eltérése a

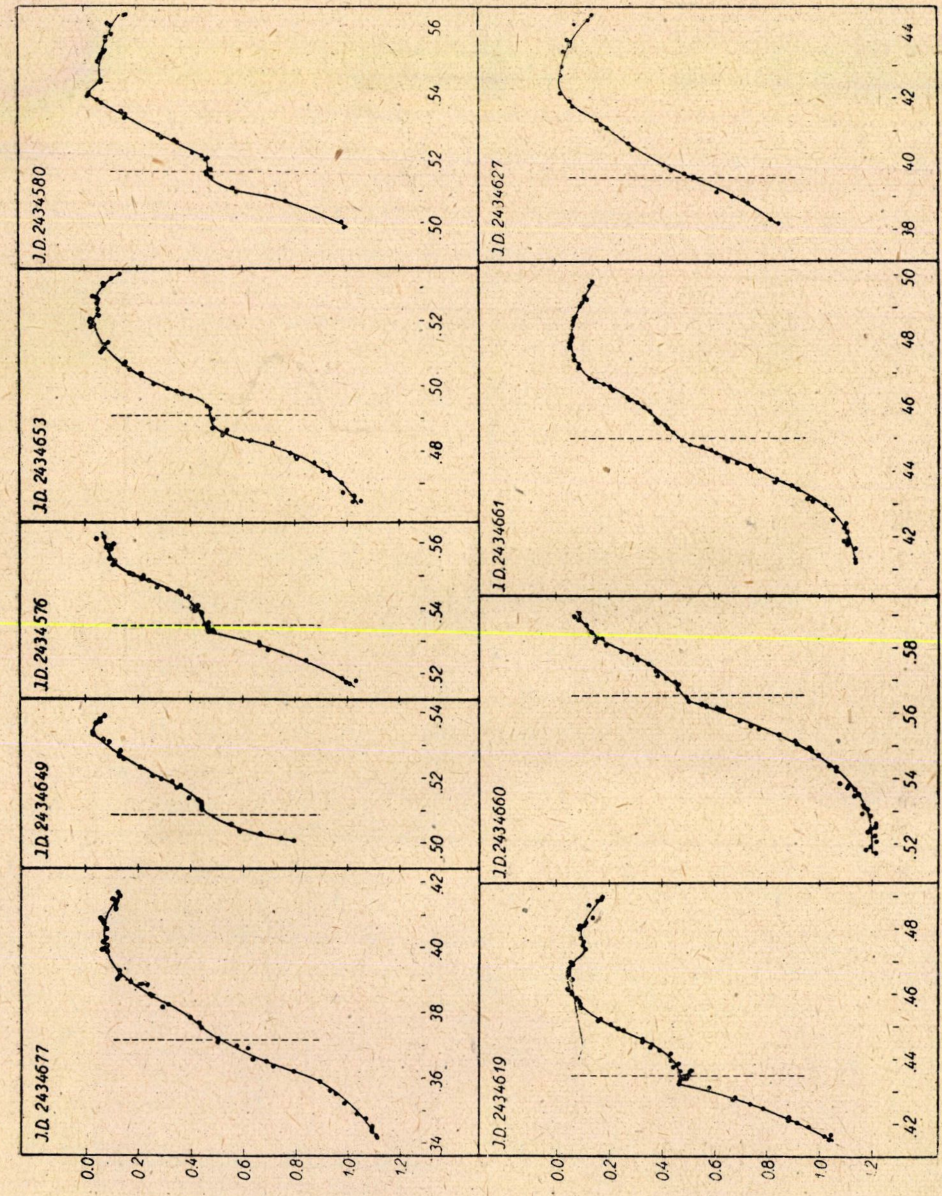
$$C = 2414856.580 + 0^d.5668340 \times E$$



6. ábra. RR Lyrae főperiódusának $O-C$ diagrammja (lásd a szöveget).

formulával számított C időponttól, amelyben a csillag fényességemelkedése alkalmával közepes fényességét eléri. 1936-tól kezdve a görbe a budapesti észlelésekkel folytonosan be van fedve, a megelőző pontok HERTZSPRUNG, FLORJA, DE SITTER és KUKARKIN észleléseiből származnak. A 10 éves ciklus a budapesti észlelésekből jól látszik. De ha megszerkesztjük ugyanúgy az $O-C$ görbéket a felszálló ág más pontjaira is, az egyes görbék nem lesznek párhuzamosak egymással, hanem 10 éves ciklussal hol közelednek, hol távolodnak egymástól. Ez azt jelenti, hogy a közepes fénygörbe felszálló ágának meredeksége is változik a P_0 periódus változásának 10 éves ciklusával. De a felszálló ág meredekségének periódikus változása éppen egyik főjellegzetessége a Blazsko-effektusnak.

Még 1948-ban az RR Leonis főperiódusában, a rendelkezésre álló összes megfigyelési anyag feldolgozása révén sikerült egy 33 éves periódusú, igen kis amplitudójú változást találni. Most már ennek a periódusnak közel három-



7. *ábra.* Az SW Andromedae I. populációjú RR Lyrae-csillag fénygörbéjének változása a 37 napos szekundér-periódussal (DETRE fotoelektromos megfigyelései szerint). A szaggatott vonal minden képen a P_0 periódus egy és ugyanazon fázisát jelöli meg.

negyed részére saját homogén megfigyelési anyagunk van. Ebből BALÁZS kimutatta, hogy a fénygörbe felszálló ágának meredeksége itt is változik, párhuzamosan a P_0 változásával, akárcsak RR Lyrae 10 éves periódusában.

Nyilvánvaló, hogy ilyen igen finom effektusokat csak igen hosszú időre kiterjedő homogén megfigyelési anyagból lehet kimutatni, amilyennel momentán csak a budapesti csillagda rendelkezik. Ezek szerint némely csillagnál igen hosszú periódusú Blazsko-effektusok is felléphetnek, vagy mint RR Lyrae esetében, rövidebb periódusú Blazsko-effektusokkal együtt, vagy mint RR Leonis esetében, egyedül. Az ilyen hosszú periódusú Blazsko-effektusokkal a fénymaximum csak rendkívül kicsi változásokat mutat, amint az az 1. ábrában bemutatott összefüggésből is következik.

Az 1. ábrába a táblázatból nem vettük fel az SW Andromedae csillagot, mert az erősen eltér viselkedésében a többitől. Ennél is mutatkozik Blazsko-effektus 37 napos periódussal, de a maximum fényessége ezalatt alig változik. A fénygörbe változása lényegében csak abban áll, hogy a felszálló ág felső részében 37 naponként kifejlődik egy púp, amely aztán 15 nap mulva eltűnik (lásd a 7. ábrát). Mármost ez a csillag különben is egészen más jellegű, mint a többi RR Lyrae-csillag. MUNCH és TERRAZAS szerint a csillag színképe közönséges F6 típusú óriásszínkép, normális intenzitású hidrogénvonalakkal. KUKARKIN is több jellegzetességet sorolt fel, amelyek mind arra mutatnak, hogy ez a csillag a többi RR Lyrae-csillaggal ellentétben a I. populációhoz tartozik. Eredményeink szerint úgy látszik, hogy a két populáció a Blazsko-effektusban is erősen eltér egymástól. Általában a I. populációhoz tartozó változócsillagok fénygörbéiben ritkán figyelnek meg változásokat, míg a II. populációjúaknál ez mindennapi. Elég az RV Tauri típusra emlékeztetni. De lehet, hogy a fénygörbe változása a I. populáció csillagainál is gyakori, csak a változások kicsi amplitudója miatt, mint SW Andromedaenál is, nehezen állapitható meg. Különösen fontosnak tartom, hogy ebből a szempontból átvizsgáljuk a Mira-csillagokat is, minthogy ezek egyforma gyakorisággal oszlanak meg a két populációra és egyik legjellemzőbb tulajdonságuk, hogy a fénygörbéjük változik. Az egyes Mira-csillagokról nehéz megállapitani, hogy melyik populációhoz tartoznak, de ha statisztikailag olyan lényeges különbségeket találnánk a fénygörbe-változásokban a két populáció között, mint az RR Lyrae-csillagok esetében, akkor egy igen biztos és aránylag könnyen alkalmazható módszer jutna birtokunkba egyes Mira-csillagoknak a populációk szerinti osztályozására.

* * *

Az előadás utáni diszkusszióban OOSTERHOFF (Leiden) rámutatott arra, hogy a hosszúperiódusú Delta Cephei csillagokra is igen fontos volna hasonló szempontokat figyelembe venni, miután legújabban a johannesburgi csillagdán két ilyen típusú csillagot találtak, erősen változó fénygörbével. CESSZJEVICS (Odessza) arra vonatkozólag tett fel kérdést, hogy előadó menynyire tartja valószínűnek, hogy a Blazsko-effektus lebegésjelenség. Előadó válasza szerint ez a kérdés ma még nem dönthető el exakt módon, de a maga részéről inkább egy, a csillag körül keringő kísérő hatásának gondolja a fénygörbe-változásokat. Ezután ugyancsak CESSZJEVICS az SW Andromedaera tett fel néhány részletkérdést.

ORTOGONÁLIS POLINOMOKRÓL*

FREUD GÉZA

Bemutatta Turán Pál r. tag az 1954. november 12-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Legyen $w(x) \in L$ egy $(-1, +1)$-ben definiált, nemnegatív súlyfüggvény

$$\int_{-1}^{+1} w(x)dx > 0$$

és $\{p_n(x)\}$ legyen a $w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó a $(-1, +1)$ intervallumban ortogonális és normált polinomok sorozata. A szerző két korábbi cikkében [2], [3] ezen polinomok szerinti sorfejtéseket vizsgálta arra az esetre, ha a polinomok sorozata eleget tesz az

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} [p_\nu(x)]^2 = O(n) \tag{1}$$

feltételnek, azaz a polinomsorozat négyzete középértékben korlátos. Kimutattuk, hogy az $f(x) \in L^2(w)$ függvény ortogonális polinomsora ebben az esetben minden Lebesgue-pontban abszolut $(C, 1)$-szummálható, továbbá általánosítottuk S. N. BERNSTEINnek a Fourier-sorok abszolut konvergenciájára vonatkozó tételét [3] az ilyen típusú ortogonális polinomsorfejtésekre. Ezen tételeknek az adott különös jelentőséget, hogy mint a szerző [2] dolgozatában bebizonyította, ha $(-1, +1)$-nek egy tetszőleges (a, b) részintervallumában $w(x) \geq m > 0$, az ortogonális polinomok az (a, b) minden belső részintervallumában egyenletesen négyzetes középértékben korlátosak.

Ezen tételek érdekessége abban áll, hogy az ortogonális polinomsorfejtés abszolút konvergenciájára, ill. $(C, 1)$ szummálhatóságára a súlyfüggvény viselkedéséből következtethetünk anélkül, hogy az ortogonális polinomok korlátosságáról bármit is feltennénk.

Az a kérdés, hogy nem teljesül-e (1) majdnem minden olyan $x \in (-1, +1)$ pontban, ahol $w(x) > 0$, igen nehéznek látszik, és a szerző nem is tud rá jelenleg felelni. Megmutatjuk azonban, hogy amennyiben a $w(x)$ súlyfüggvény egy eléggé általános strukturális feltételnek tesz eleget, úgy majdnem minden x-re (1) teljesül.

Legyen a továbbiakban

$$W(\theta) = \begin{cases} w(\cos\theta)\sin\theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \theta \bar{\in} [0, \pi] \end{cases} \tag{2}$$

* E dolgozat német nyelven megjelent az Acta Math. Hung. V. k. 3—4. füzetében.

I. TÉTEL: Legyen h elegendő kis értékére $\dfrac{W(\theta+h)-W(\theta)}{W(\theta)}$ L-integrálható és

(3) $$\int_0^{\pi} \frac{|W(\theta+h)-W(\theta)|}{W(\theta)}\, d\theta = O\left(\log^{-\alpha}\frac{1}{|h|}\right)$$

ahol $\alpha > 1$. Akkor (1) majdnem minden x helyen teljesül.

Másrészt megmutatjuk, hogy az (1) alatti kifejezés viselkedéséről a $w(x)$ zérushelyeiből álló N ponthalmaz felett minden mellékfeltevés nélkül áttekintést nyerhetünk:

II. TÉTEL. Az N halmaz majdnem minden pontjában

(4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x) = \infty.$$

Az I. tételnek legemlítésreméltóbb következménye:

III. TÉTEL: A súlyfüggvény elégítse ki ugyanazokat a feltételeket, mint az I. tételben. Akkor minden $f\in L^2(w)$ függvény ortogonális polinomsora az egész ortogonalitási intervallum majdnem minden pontjában erősen $(C, 1)$ szummálható.

TANDORI KÁROLY egy a szerzőét megelőző dolgozatában [5] kimutatta egy $f\in L^2(w)$ függvény ortogonális polinomsorának erős $(C, 1)$ szummálhatóságát azon erősebb feltétel mellett, hogy a polinomsorozat az ortogonalitási intervallum egy (α, β) belső részintervallumában egyenletesen korlátos. TANDORI dolgozatában megemlíti tételének következményét: ha a $w(x)$ súlyfüggvény egy pozitív mértékű N ponthalmazon zérus, akkor a normált ortogonális polinomsorozat nem maradhat az N halmazon egyenletesen korlátos. A II. tétel a fenti állítás finomításának tekinthető.

1. §. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x)$ approximációja az L-térben

Meggondolásainkban, mint a szerző több előző dolgozatában is, fontos szerepet játszik az alábbi lemma:

I. SEGÉDTÉTEL: *Tekintsük az összes olyan legfeljebb $n-1$-edfokú $\Phi_{n-1}(x)$ polinomokat, melyekre*

(5) $$\int_{-1}^{+1} [\Phi_{n-1}(t)]^2 w(t)\, dt \leq 1.$$

Akkor $[\Phi_{n-1}(x)]^2$ pontos maximuma

(6) $$\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x) \geq \Phi_{n-1}^2(x).$$

és ezt a maximumot akkor veszi fel, ha

$$\Phi^*_{n-1}(t)=\frac{\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)\,p_k(t)}{\left\{\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x)\right\}^{1/2}}$$

(Lásd SZEGŐ [4] 38. o. 3.1, 3 tétel, ERDŐS és TURÁN [1]). Erdős és Turán ([1], 539—540 o.) egy gondolata nyomán legyen speciálisan

$$\Phi_{n-1}(t)=\frac{\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x)\,T_k(t)}{\left\{\int_{-1}^{+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x)\,T_k(u)\right)^2 w(u)\,du\right\}^{1/2}},\tag{7}$$

ahol $T_0(t)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $T_k(x)$ a k-adfokú Csebisev-polinom.

Akkor a segédtétel értelmében

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x)\geqq\frac{\left(\sum_{k=0}^{n-1} T_k^2(x)\right)^2}{\int_{-1}^{+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x)\,T_k(t)\right)^2 w(t)\,dt}=\tag{8}$$

$$=\left(\frac{n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{\int_{-1}^{+1}\left[\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x)\,T_k(u)\right]^2 w(u)\,du}$$

ahol $\theta=\arc\cos x$.

Mármost tekintettel (2)-re

$$\int_{-1}^{+1}\left[\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x)\,T_k(u)\right]^2 w(u)\,du=\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos k\theta\cos k\varphi\right]^2 W(\varphi)\,d(\varphi)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\,\frac{n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}}{2}\,W(\theta)+$$

$$+\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos k\theta\cos k\varphi\right]^2[W(\varphi)-W(\theta)]\,d\varphi.$$

Elemi, a Fourier-sorok elméletéből ismert számítással adódik, hogy

$$\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos k\theta\cos k\varphi\right|^2 \leqq c_1 \operatorname{Min}\left(n^2, \frac{1}{|\theta-\varphi|^2}\right),$$

hacsak $0 \leqq \theta \leqq \pi$ és $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. Így tehát

$$\int_{-1}^{+1}\left[\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x)\, T_k(u)\right]^2 w(u)\,du \leqq \frac{\pi}{2}\left\{\frac{n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}}{2}\, W(\theta)+\right.$$

$$\text{(9)}\qquad \left. +c_2\int_0^{\pi}\operatorname{Min}\left(n, \frac{1}{n|\theta-\varphi|^2}\right)|W(\varphi)-W(\theta)|\,d\varphi\right\}.$$

(8) és (9)-ből, az elemi $\frac{1}{a+b} \geqq \frac{a-b}{a^2}$ egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\text{(10)}\qquad \sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(\cos\theta) \geqq \left(n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}\right)\frac{1}{\pi}\cdot \frac{W(\theta)-c_2\int_0^{\pi}\operatorname{Min}\left(n, \frac{1}{n|\theta-\varphi|^2}\right)|W(\theta)-W(\varphi)|\,d\varphi}{W^2(\theta)}.$$

Ebből egyszerű átalakítással következik

$$\frac{1}{\pi}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(\cos\theta)\, W(\theta) \leqq c_3\int_0^{\pi}\operatorname{Min}\left(n, \frac{1}{n|\theta-\varphi|^2}\right)\cdot\frac{|W(\theta)-W(\varphi)|}{W(\theta)}\,d\varphi+$$

$$\text{(11)}\qquad +\frac{1}{2n}\left(1+\left|\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}\right|\right).$$

Vezessük be az

$$\{a\}^+ = \begin{cases} a & \text{ha } a>0 \\ 0 & \text{ha } a\leqq 0 \end{cases}$$

jelölést. Mivel (11) jobboldala mindig pozitív, az egyenlőtlenség akkor is helyes marad, ha a baloldalt a pozitív részével helyettesítjük. θ szerint integrálva így kapjuk:

$$\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{\pi}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(\cos\theta)W(\theta)\right\}^+ d\theta \leqq$$

$$\text{(12)}\qquad \leqq c_3\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{Min}\left(n, \frac{1}{n|\theta-\varphi|^2}\right)\frac{|W(\theta)-W(\varphi)|}{W(\theta)}\,d\theta\, d\varphi+$$

$$+\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\left(1+\left|\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}\right|\right)d\theta.$$

A (12) egyenlőtlenség jobboldalán a második tag $O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ nagyságrendű. Az első tagként szereplő integrálban vezessük be — θ mellett — a $h=\theta-\varphi$ változót, akkor (2) figyelembevételével kapjuk

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \mathrm{Min}\left(n, \frac{1}{n|\theta-\varphi|^2}\right)\frac{|W(\theta)-W(\varphi)|}{W(\theta)}\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Min}\left(n,\frac{1}{nh^2}\right)\left\{\int_0^\pi \frac{|W(\theta+h)-W(\theta)|}{W(\theta)}\,d\theta\right\}dh =$$

$$= n\int_{-\frac{1}{n}}^{+\frac{1}{n}}\left\{\int_0^\pi \frac{|W(\theta+h)-W(\theta)|}{W(\theta)}\,d\theta\right\}dh +$$

$$+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{dh}{h^2}\left\{\int_0^\pi \frac{|W(\theta+h)-W(\theta)|}{W(\theta)}\,d\theta + \int_0^\pi \frac{|W(\theta-h)-W(\theta)|}{W(\theta)}\,d\theta\right\}$$

és így (3) felhasználásával

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \mathrm{Min}\left(n, \frac{1}{n|\theta-\varphi|^2}\right)\frac{|W(\theta)-W(\varphi)|}{W(\theta)}\,d\theta\,d\varphi = O(\log^{-\alpha} n),$$

tehát (12)-ből

(13) $$\int_0^\pi \left\{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p_k^2(\cos\theta)\,W(\theta)\right\}^+ d\theta = O(\log^{-\alpha} n).$$

Tekintettel arra, hogy a $p_k(x)$ polinomok normáltak, és így

$$\int_0^\pi \left\{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p_k^2(\cos\theta)\,W(\theta)\right\} d\theta = 0,$$

(13)-ból következik, hogy

(14) $$I_n = \int_0^\pi \left|\pi - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p_k^2(\cos\theta)\,W(\theta)\right| d\theta = O(\log^{-\alpha} n).$$

Ezt a becslést fogjuk felhasználni az I. tétel bizonyítására.

II. §. Becslés $\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x)$*-re*

A (14) egyenlőtlenségből leolvasható, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} I_{2^\nu} < \infty,$$

tehát majdnem minden θ-ra

$$(15)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{2^\nu-1} p_k^2(\cos\theta) = \frac{\pi}{W(\theta)}.$$

Rögzítsünk most egy θ-t, amelyre (15) teljesül, akkor ezen θ helyhez választható olyan $K(\theta)$ ν-től független pozitív szám, hogy

$$\sum_{k=0}^{2^\nu-1} p_k^2(\cos\theta) < K2^\nu \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Legyen most n egy tetszőleges egész szám, és

$$2^{m-1} \leq n < 2^m,$$

akkor

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(\cos\theta) \leq \sum_{k=0}^{2^m-1} p_k^2(\cos\theta) \leq K2^m \leq 2Kn.$$

Mivel azon θ-k halmaza, melyekre (15) nem áll fenn, az $x = \cos\theta$ leképezés után ismét egy nullmértékű halmazba megy át, bizonyításunk teljes.

A II. tétel bizonyítása.

A $w(x)$ $(-1, +1)$ nyilt intervallumba eső zérushelyei N halmazának majdnem minden x pontja Lebesgue-pont, azaz

$$(16)\qquad \int_{x-h}^{x+h} w(t)\,dt = o(h).$$

Kimutatjuk, hogy minden ilyen x pontra (4) érvényes. A $\Phi_{n-1}(t)$-nek ismét a (7) képletben definiált polinomot választjuk, akkor (5) mindenesetre teljesül, mégpedig az egyenlőségjellel.

Egy ma már klasszikusnak mondható okoskodással, amivel a Fejér—Lebesgue-tételt bizonyítják, belátható, hogy tekintettel (15)-re

$$(17)\qquad \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x)\, T_k(u)\right]^2 w(u)\,du = o(n).$$

Ennek következtében, tekintettel (7)-re

$$(18)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Phi_{n-1}^2(x) = \infty,$$

és végül (6) és (18)-ból

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x) = \infty.$$

Q. e. d.

IRODALOM

[1] P. Erdős and P. Turán: On interpolation III. *Annals of Math.* 41 (1940), 510—553.

[2] G. Freud: Über die starke $(C, 1)$— Summierbarkeit von orthogonalen Polynomreihen. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.* 3 (1952), 83—88.

[3] G. Freud: Über die absolute Konvergenz von orthogonalen Polynomreihen. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.* 4 (1953), 127—136.

[4] G. Szegő: Orthogonal polynomials. *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* Vol. XXIII. (1939).

[5] K. Tandori: Über die Cesarosche Summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen. *Acta. Math. Sci. Ac. Hung.* 3 (1952), 73—82.

AZ HERMITE—FEJÉR-FÉLE INTERPOLÁCIÓS ELJÁRÁS KONVERGENCIÁJÁRÓL*

FREUD GÉZA

Bevezetés

Legyen $w(x) \in L$ egy $(-1, +1)$-ben definiált nemnegatív súlyfüggvény, $\{p_n(x)\}$ legyen a $w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó n-edfokú ortogonális polinomok sorozata. $p_n(x)$ gyökei legyenek $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$ és az ezen alappontokhoz tartozó Hermite—Fejér-féle interpolációs alapfüggvények

(1) $$h_{kn}(x) = v_{kn}(x) l_{kn}^2(x)$$

és

(2) $$\mathfrak{h}_{kn}(x) = (x - x_{kn}) l_{kn}^2(x),$$

ahol $l_{kn}(x)$ az $\{x_{in}\}$ alappontrendszer x_{kn} alappontjához tartozó Lagrange-féle interpolációs alapfüggvény

(3) $$l_{kn}(x) = \frac{p_n(x)}{p_n'(x_{kn})(x - x_{kn})},$$

továbbá

(4) $$v_{kn}(x) = 1 - \frac{p_n''(x_{kn})}{p_n'(x_{kn})}(x - x_{kn}).$$

Az Hermite-féle interpolációs alapfüggvények definiciója értelmében tetszőleges legfeljebb $2n-1$-edfokú $\pi_{2n-2}(x)$ polinomra

(5) $$\pi_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} [h_{kn}(x)\pi_{2n-1}(x_{kn}) + \mathfrak{h}_{kn}(x)\pi'_{2n-1}(x_{kn})].$$

Legyen a továbbiakban $f(x)$ egy $(-1, +1)$-ben definiált függvény, és tekintsük a

(6) $$H_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} h_{kn}(x) f(x_{kn}) + \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{h}_{kn}(x) d_{kn}$$

polinomsorozatot, ahol a $\{d_{kn}\}$ egyébként tetszőleges számértékek nagyságrendjére később kikötéseket teszünk. $H_n(f; x)$ az a legfeljebb $2n-1$-edfokú polinom, amely az x_{kn} helyeken egyenlő $f(x)$-szel, és ugyanott differenciálhányadosa előírt d_{kn} $(k = 1, 2, \ldots n)$ értékeket vesz fel. A (6) polinomsorozat vizsgálatával először FEJÉR LIPÓT [4], [5], [6], [9] foglalkozott. FEJÉR nyomán normálisnak nevezünk egy alappontsorozatot, ha az összes alappontokra

(7) $$v_{kn}(x) \geqq 0 \qquad -1 \leqq x \leqq 1,$$

* E dolgozat német nyelven megjelent az Acta Math. Ac. Sc. Hung. V. kötetében.

és szigorúan normálisnak, ha

$$v_{kn}(x) \geqq \varrho > 0 \qquad -1 \leqq x \leqq 1, \tag{8}$$

ahol ϱ k-tól és n-től független pozitív szám. Fejér [7] kimutatta, hogy az $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ súlyfüggvényre ortogonális Jacobi-féle polinomok gyökei normális alappontrendszert alkotnak, ha $-1<\alpha, \beta \leqq 0$ és szigorúan normális alappontrendszert, ha $-1<\alpha, \beta<0$. Maga FEJÉR az Hermite-féle interpolációs eljárást elsősorban arra az esetre vizsgálta, ha az alappontok a Csebisev- $\left(\alpha=\beta=-\frac{1}{2}\right)$, ill. Legendre- $(\alpha=\beta=0)$ polinomok gyökei. A Csebisev-esetben kimutatta, hogy a (6) Hermite-féle interpolációs parabolák $(-1,+1)$-ben egyenletesen tartanak $f(x)$-hez, ha a d_{kn} deriváltértékekre k-ban egyenletesen a

$$d_{kn} = o\left(\frac{n}{\log n}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x_{kn}^2}} \tag{9}$$

becslés érvényes. Kimutatta továbbá, hogy amennyiben az alappontok a Legendre-polinomok gyökei és a d_{kn} számok egyenletesen korlátosak, az interpolációsorozat $(-1,+1)$ minden belső részintervallumában egyenletesen konvergál. Később FEJÉR [9] kimutatta, hogy tetszőleges normális alappontrendszer esetén is $H_n(f;x)\to f(x)$ hacsak a d_{kn} számmátrixot $f(x)$-től függően alkalmas módon választjuk. FEJÉR munkájához csatlakozik GRÜNWALD GÉZA dolgozata [13]; ebben kimutatja, hogy az Hermite-féle interpolációs parabolák $(-1,+1)$ minden belső részintervallumában $f(x)$-hez tartanak, ha az alappontrendszer normális és a $\{d_{kn}\}$ számmátrix tagjai egyenletesen korlátosak. Ha ezenfelül az alappontrendszer szigorúan normális, akkor a konvergencia az egész $(-1,+1)$ intervallumban egyenletes. Kimutatta még, hogy ebben az esetben a $\{d_{kn}\}$ mátrix korlátossága helyettesíthető $|d_{kn}|<An^{\varrho-\varepsilon}$-nal, ahol ϱ a (8)-ban fellépő pozitív szám.

Csak Jacobi-polinomokra szorítkozva (az $\alpha>0, \beta>0$ esetre is), az Hermite-féle interpolációs eljárás konvergenciáját SZEGŐ [16] és SHOHAT [15] vizsgálták.

TURÁN PÁL vetette fel a kérdést személyes megbeszélések során, nem lehet-e az Hermite-féle interpolációs eljárás konvergenciájára következtetni, ha az $\{x_{kn}\}$ alappontrendszernek egy általános $w(x)$ pozitív súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomok zérushelyeit választjuk. A továbbiakban az ilyen interpolációs eljárást „$w(x)$-hez rendelt interpolációnak" fogjuk nevezni. Tájékozódás szempontjából megjegyezzük, hogy bizonyos Jacobi-polinomok esetén FEJÉR [7] (7) ill. (8) fennállását az ezen polinomokra érvényes másodrendű lineáris differenciálegyenlet segítségével bizonyította. Az a probléma viszont, hogy az ortogonális polinomok milyen általánosabb osztályához adható meg ilyen differenciálegyenlet, az ortogonális polinomok elméletének mind a mai napig megoldatlan nehéz kérdése. Általános súlyfüggvényhez tartozó polinomok gyökhelyeit választva alappontoknak, ez ideig az sem volt ismeretes, hogy az Hermite-interpoláció konvergál-e, ha $f(x)$ folytonosan differenciálható és $d_{kn}=f'(x_{kn})$.

TURÁN PÁL egy szóbeli közlése szerint, ha a $w(\cos\theta)\sin\theta=g(\theta)$ függvény a $0\leqq\theta\leqq\pi$-ben egyenletesen 1-nél nagyobb exponensű logaritmikus Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor a $w(x)$-hez rendelt Hermite—Fejér-féle lépcsőparabola folytonos $f(x)$ esetén konvergál. Ennek bizonyítása S. N. BERNSTEIN [1] tétele alapján végezhető, amely ezen feltétel mellett aszimptotikus kifejezést szolgáltat $p_n(x)$-re.

Az alábbiakban két tételt fogunk bizonyítani:

Mindkét tételünknél feltételezzük, hogy a $w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó normált ortogonális polinomok sorozata az (α,β) részintervallumban egyenletesen korlátos:

$$|p_n(x)|\leqq K \qquad \alpha\leqq x\leqq\beta. \tag{10}$$

Továbbá a $\{d_{kn}\}$ számmátrixot úgy választjuk, hogy

$$d_{kn}=\begin{cases} o\left(\dfrac{n}{\log n}\right), & \text{ha } \alpha\leqq x_{kn}\leqq\beta \\ o\left\{\operatorname{Min}\left(\dfrac{n}{\sqrt{1-x_{kn}^2}},\, n^2\right)\right\} & \text{minden } x_{kn}\text{-re} \end{cases} \tag{11}$$

x_{kn}-ben egyenletesen fennálljon.

Bebizonyítjuk a következő két tételt:

I. TÉTEL: A $w(x)\in L$ súlyfüggvény legyen az egész $[-1,+1]$ zárt intervallumban folytonos és pozitív, továbbá $w(x)$ (α,β)-ban tegyen eleget a

$$w(x_1)-w(x_2)=o\left(\log^{-1}\frac{1}{|x_2-x_1|}\right) \tag{12}$$

Dini—Lipschitz-feltételnek. Akkor a (6) Hermite-féle interpolációsorozat minden $\alpha<\xi<\beta$ helyen $f(\xi)$-hez konvergál, ha $f(x)$ a $\xi,-1,+1$ helyeken folytonos, $(-1,+1)$-ben korlátos függvény. Ha $f(x)$ az egész (α,β)-ban folytonos, akkor az interpolációsorozat (α,β) minden belső részintervallumában egyenletesen konvergál.

II. TÉTEL: Legyen

$$0<m\leqq w(x)\leqq M \qquad (-1\leqq x\leqq+1). \tag{13}$$

Az $f(x)$ függvény legyen a zárt $[-1,+1]$ intervallumban folytonos, és az (α,β) részintervallumban tegyen eleget a

$$f(x_1)-f(x_2)=o\left(\log^{-1}\frac{1}{|x_2-x_1|}\right) \quad (\alpha\leqq x_1, x_2\leqq\beta) \tag{14}$$

Dini—Lipschitz-feltételnek. Akkor a (6) Hermite-féle interpolációsorozat (α,β) minden belső részintervallumában egyenletesen $f(x)$-hez konvergál.

Jegyezzük meg, hogy a (13) alatti egyenlőtlenség $w(x)$ folytonossága és pozitivitása miatt I. tétel feltevéseiből is következik.

A Cotes-féle számok egy általánosítása

Legyen $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x), \ldots$ a $w(x) \in L$ pozitív súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomok sorozata. Legyen $-1 < \xi < 1$ és legyenek

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$$

a $p_{n-1}(\xi) p_n(x) - p_n(\xi) p_{n-1}(x)$ x-ben n-edfokú polinom gyökei; ezek egyike $\xi_\nu = \xi$. Egyelőre kikötjük, hogy $p_{n-1}(\xi) \neq 0$. Legyenek $l_1(x), l_2(x), \ldots, l_n(x)$ a $\{\xi_i\}$ alappontrendszerhez tartozó Lagrange-féle interpolációs parabolák és vezessük be az

$$l_\nu(x) = l_n(x, \xi), \int_{-1}^{+1} l_n(x, \xi)\, w(x)\, dx = \lambda_n(\xi)$$

jelölést. $l_n(x, \xi)$-t a ξ helyhez tartozó Lagrange-parabolának, $\lambda_n(\xi)$-t a ξ helyhez tartozó Cotes-féle számnak fogjuk nevezni. A Gauss—Jacobi-féle mechanikus kvadraturaképlet általánosításaként fennáll az alábbi összefüggés. Ha $\pi_{2n-2}(x)$ tetszőleges legfeljebb $2n-2$-edfokú polinom, akkor

$$\int_{-1}^{+1} \pi_{2n-2}(x)\, w(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \pi_{2n-2}(\xi_k) \int_{-1}^{+1} l_k(x)\, w(x)\, dx, \tag{15}$$

ahol

$$\int_{-1}^{+1} l_k(x) w(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} l_k^2(x)\, w(x)\, dx > 0.^* \tag{16}$$

Ebből leolvasható, hogy

$$\lambda_n(\xi) = \int_{-1}^{+1} l_n(x, \xi)\, w(x) dx = \int_{-1}^{+1} l_n^2(x, \xi)\, w(x)\, dx > 0, \tag{17}$$

továbbá hogy $\lambda_n(\xi)$ a pontos minimuma az

$$\int_{-1}^{+1} [\pi_{n-1}(x)]^2\, w(x)\, dx$$

integrálnak, ha $\pi_{n-1}(x)$ végigfut az összes olyan legfeljebb $n-1$-edfokú polinomokon, melyekre $\pi_{n-1}(\xi) \geqq 1$.

Megjegyezzük, hogy (15) és (16)-ból leolvasható az az élesebb állítás, hogy $\lambda_n(\xi)$ az

$$\int_{-1}^{+1} \pi_{2n-2}(x)\, w(x)\, dx$$

pontos minimuma, ha $\pi_{2n-2}(x)$ az összes legfeljebb $2n-2$-edfokú polinomokat befutja, melyek az egész zárt $[-1, +1]$ intervallumban nemnegatívok és a $\pi_{2n-2}(\xi) \geqq 1$ feltételt teljesítik.

* Lásd Fejér L. [8].

Ezt a minimumproblémát SZEGŐ G. [17], továbbá ERDŐS P. és TURÁN P. [3] vizsgálták. SZEGŐ G. [17] (3.1.3 tétel) egy nevezetes lemmája alapján

$$\lambda_n(\xi)=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(\xi)}=\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\frac{1}{p_n'(\xi)p_{n-1}(\xi)-p_{n-1}'(\xi)p_n(\xi)}. \tag{18}$$

A jobboldali egyenlőséghez a Christoffel—Darboux-féle összegképletet használtuk fel; α_n jelenti x^n együtthatóját a $p_n(x)$ polinomban.

Ilyen módon a Gauss—Jacobi-féle mechanikus kvadratura n-edrendű Cotes-féle számait egy n-edrendű $\lambda_n(\xi)$ „Cotes-függvénnyé" általánosítottuk, amely nemcsak a $p_n(x)$ zérushelyein, hanem minden valós ξ helyen értelmezve van.

Ha $p_{n-1}(\xi)=0$, akkor (18) alapján $\lim\limits_{\xi'\to\xi}\lambda_n(\xi')=\lambda_{n-1}(\xi)$, ezért a $p_{n-1}(x)$ gyökhelyein definíciószerűen legyen $\lambda_n(\xi)=\lambda_{n-1}(\xi)$.

Ha $w(x)\leqq W(x)$ és $\Lambda_n(\xi)$ a $W(x)$-hez rendelt n-edrendű Cotes-féle függvényt jelenti, a minimumtulajdonságból következik, hogy

$$\lambda_n(\xi)\leqq\Lambda_n(\xi).$$

Ezt az egyenlőtlenséget először ERDŐS P. és TURÁN P. [3] találták és alkalmazták interpolációelméletbeli kérdésekre.

Tekintettel (18)-ra, $\lambda_n(\xi)$ differenciálható, és

$$\frac{\lambda_n'(\xi)}{\lambda_n(\xi)}=-\frac{p_n''(\xi)p_{n-1}(\xi)-p_{n-1}''(\xi)p_n(\xi)}{p_n'(\xi)p_{n-1}(\xi)-p_{n-1}'(\xi)p_n(\xi)}.$$

Ha tehát x_{kn} a $p_n(x)$ egyik gyöke, akkor

$$\frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_n(x_{kn})}=-\frac{p_n''(x_{kn})}{p_n'(x_{kn})}. \tag{19}$$

A (19) képlet további meggondolásaink alapja, segítségével becsüljük $r_{kn}(x)$-et.

Erdős és Turán néhány tételéről

Összes meggondolásunk kiindulópontja ERDŐS és TURÁN [3] interpolációelméleti munkája. Röviden idézzük és helyenként továbbépítjük azokat az eredményeket, amelyek abból a továbbiakban felhasználásra kerülnek. A $\lambda_n(\xi)$ minimumtulajdonságából kiindulva, ez előállítható a

$$\lambda_n(\xi)=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{l_{kn}^2(\xi)}{\lambda_{kn}}} \tag{20}$$

alakban. Ebből a $\lambda_n(\xi)$ minimumtulajdonságának és $w(x)\geqq m>0$-nak felhasználásával ERDŐS és TURÁN* kimutatták, hogy $(-1,+1)$ minden belső rész-

* i. m. [3].

intervallumára egyenletesen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{l_{kn}^2(x)}{\lambda_{kn}} = O(n). \tag{21}$$

$w(x) \leqq M$-ből következik, hogy létezik egy csak h-tól függő pozitív $c_0(h)$ szám, melyre

$$\lambda_{kn} \geqq \frac{c_0(h)}{n} \qquad (-1+h \leqq x_{kn} \leqq 1-h) \tag{22}$$

teljesül. (21) és (22)-ből kiindulva triviálisan bebizonyítható az alábbi segédtétel:

I. SEGÉDTÉTEL: Fennáll

$$\sum_{|x_{kn}| \leq 1-h} l_{kn}^2(x) = O(1), \tag{23}$$

ahol $(-1+h, 1-h)$ a $(-1, +1)$-nek egy rögzített belső részintervalluma, és $(-1, +1)$ minden belső részintervallumában (23) x-ben egyenletesen teljesül.

ERDŐS P. és TURÁN P. megmutatják továbbá, hogy (13) következtében léteznek $c_1(h)$ és $c_2(h)$ pozitív számok, hogy két $(-1+h, 1-h)$-ba eső szomszédos x_{kn} és $x_{k+1,n}$ gyökhelyre fennáll a

$$\frac{c_1(h)}{n} \leqq x_{k+1,n} - x_{kn} \leqq \frac{c_2(h)}{n} \tag{24}$$

egyenlőtlenség.

II. SEGÉDTÉTEL:

$$\lambda_n(\xi) < 100\,M\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right). \tag{25}$$

BIZONYÍTÁS: $\lambda_n(\xi)$ minimumtulajdonsága következtében

$$\lambda_n(\xi) \leqq M \cdot \Lambda_n(\xi), \tag{26}$$

ahol $\Lambda_n(\xi)$ a $h(x) \equiv 1$ súlyfüggvényhez tartozó n-edik Cotes-féle függvény. Legyen

$$\psi_{2n-2}(\cos\theta) = g(\theta - \vartheta) + g(\theta + \vartheta), \tag{27}$$

ahol $\xi = \cos\vartheta$ $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ és

$$g(t) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4$$

a Jackson-féle approximációs magfüggvény. JACKSON [14] tételét a

$$h(\theta) = \begin{cases} \sin\theta & \text{ha} \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi \\ 0 & \text{ha} \quad -\pi \leqq \theta \leqq 0 \end{cases}$$

függvényre alkalmazva, amely $(0, 2\pi)$-ben eleget tesz a

$$|h(\theta_1)-h(\theta_2)| < |\theta_1-\theta_2|$$

Lipschitz-feltételnek, kapjuk, hogy*

$$\left|\int_0^n [g(\theta-\vartheta)+g(\theta+\vartheta)]\sin\theta\, d\theta - \sin\vartheta\right| < \frac{12}{n}. \tag{28}$$

(27)-ből leolvasható, hogy

$$\psi_{2n-2}(\xi) \geqq g(0) > \frac{1}{7}n. \tag{29}$$

$\pi_{2n-2}(x)=\frac{7}{n}\psi_{2n-2}(x)$ polinom $[-1, +1]$-ben nemnegatív és a ξ helyen $\pi_{2n-2}(\xi)\geqq 1$; tehát a minimumtulajdonság és (28) figyelembevételével

$$A_n(\xi) \leqq \int_{-1}^{+1} \pi_{2n-2}(x)dx = \frac{7}{n}\int_{-1}^{+1}[g(\theta-\vartheta)+g(\theta+\vartheta)]\sin\vartheta\, d\vartheta < \tag{30}$$

$$< \frac{7}{n}\left(\sin\vartheta+\frac{12}{n}\right) = \frac{7\sqrt{1-\xi^2}}{n}+\frac{84}{n^2}.$$

(26) és (30)-ból következik (25).

III. Polinomok maximumának becsléséről

Idézzük S. N. BERNSTEIN következő tételét [1]: Legyen $\pi_n(x)$ n-edfokú polinom, $(-1, +1)$-ben teljesüljön

$$|\pi_n(x)| \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

akkor fennáll a következő becslés:

$$|\pi_n(x)| \leqq n+1.$$

Hasonló tételeket akarunk bizonyítani majoránsfüggvények egy jóval általánosabb osztályára. Ezen általánosított becsléseknek a továbbiakban jelentős szerepük lesz. A $\pi_n(x)$ n-edfokú polinom majoránsa $[-1, +1]$-ben legyen $\mu(x)$:

$$|\pi_n(x)| \leqq \mu(x) \qquad (-1 \leqq x \leqq +1). \tag{31}$$

A $\mu(x)$ függvény a $[-1, +1]$ véges számú helyén váljék csak végtelenné és ezen helyek egy kis környezetének kizárásával a $[-1, +1]$ minden ponthalmazán legyen korlátos.

Ezen feltételek mellett minden (31)-nek eleget tevő polinom értékére egy egységes, csak n-től és $\mu(x)$ viselkedésétől függő korlát adható meg. $\pi_n(x)$ maximuma $[-1, +1]$-ben legyen $|\pi_n(x_0)|=\mu_0$. MARKOV tétele szerint

* Lásd pl. J. P. NATANSZON: Konstruktív függvénytan 88. o.

$|\pi_n'(x)| \leqq n^2\mu_0$ $[-1, +1]$-ben. Így azokon az x_1 helyeken, melyek $[-1, +1]$-be és egyúttal $\left[x_0 - \frac{1}{2n^2}, x_0 + \frac{1}{2n^2}\right]$-be esnek, az első középértéktétel szerint

$$|\pi_n(x_0) - \pi_n(x_1)| \leqq \frac{1}{2n^2} n^2 \mu_0 = \frac{\mu_0}{2},$$

tehát $|\pi_n(x_1)| \geqq \frac{\mu_0}{2}$ és végül

$$\mu_0 \leqq 2|\pi_n(x_1)|.$$

Ebből az alábbi tétel következik:

III. A. SEGÉDTÉTEL. Legyen $I_n \in [-1, +1]$ egy $\frac{1}{2n^2}$ hosszúságú intervallum, legyen továbbá I_n-ben $\mu^*(I_n)$ $\mu(x)$ alsó határa és $\mu_0^* \mu^*(I_n)$ felső határa, ha I_n befutja $[-1, +1]$ összes $\frac{1}{2n^2}$ hosszúságú részintervallumait. Akkor minden, a (31)-nek eleget tevő legfeljebb n-edfokú polinomra érvényes a

$$|\pi_n(x)| \leqq 2\mu_0^*$$

becslés.

Hasonló becslést kapunk, ha MARKOV tétele helyett BERNSTEIN tételét alkalmazzuk egy trigonometrikus polinom deriváltjaira. Legyen $\tau_n(x)$ egy legfeljebb n-edfokú trigonometrikus polinom, és legyen

(31a) $$|\tau_n(x)| \leqq \nu(x),$$

ahol $\nu(x)$ egy 2π szerint periódikus, $\mu(x)$-hez hasonló tulajdonságú függvény.

III. B. SEGÉDTÉTEL. Legyen J_n egy tetszőleges $\frac{1}{n}$ hosszúságú intervallum és $\nu^*(J_n) = \inf\limits_{x \in J_n} \nu(x)$; továbbá legyen $\nu_0^* = \sup \nu^*(J_n)$. Ekkor (31a)-ból következik

$$|\tau_n(x)| \leqq 2\nu_0^*.$$

Mivel $\pi_n(\cos\theta)$ egy legfeljebb n-edfokú trigonometrikus polinom, a III. B. segédtételből következik az alábbi

III. C. SEGÉDTÉTEL: Legyen

$$\mu^{**}(\xi) = \inf_{|\xi - \xi'| \leqq \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{4n}} \mu(\xi')$$

és

$$\mu_0^{**} = \sup \mu^{**}(\xi)$$

ha ξ átfutja a $|\xi| + \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{4n} \leqq 1$-nek elegettevő összes értékeket. Akkor (31)-ből következik

$$|\pi_n(x)| \leqq 2\mu_0^{**}. \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

Figyeljük meg, hogy $\xi=\cos\vartheta$, $\xi'=\cos\vartheta'$ és $|\xi-\xi'|\leqq\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{4n}=\frac{\sin\vartheta}{4n}$, továbbá $0\leqq\vartheta,\vartheta'\leqq\pi$-ből következik, hogy $|\vartheta-\vartheta'|\leqq\frac{1}{2n}$.

Ezen tétel első alkalmazásaként tekintsünk egy olyan $f(x)$ függvényt, mely eleget tesz a II. tétel követelményeinek, azaz $[-1,+1]$-ben folytonos és (α,β)-ban eleget tesz a (14) alatti Dini—Lipschitz-feltételnek. Ekkor létezik egy olyan $\{q_n(x)\}$ polinomsorozat (pl. az $f(x)$-hez tartozó Jackson-féle approximációs polinomok), hogy $q_n(x)$ legfeljebb n-edfokú, és a folytonos $f(x)$-et $[-1,+1]$-ben $q_n(x)$-szel egyenletesen approximálhatjuk úgy, hogy minden (α,β) részintervallumban

$$f(x)-q_n(x)=o\left(\frac{1}{\log n}\right)\qquad(\alpha<x<\beta).\tag{32}$$

Ezek előrebocsátásával megbecsüljük $q_n'(x)$-et. Legyen először $x\in(\alpha,\beta)$, akkor (14) és (32)-ből következik

$$\left|\frac{q_n(x)-q_n(x_1)}{x-x_1}\right|\leqq\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\right|+\frac{1}{|x-x_1|}\,o\left(\frac{1}{\log n}\right)=$$
$$=\frac{1}{|x-x_1|}\left\{o\left(\log^{-1}\frac{1}{|x-x_1|}\right)+o\left(\frac{1}{\log n}\right)\right\}.$$

A jobboldal nagyságrendje, egy tetszőleges rögzített pozitív c_3-ra és $|x-x_1|>\frac{c_3}{n}$ mellett, $o\left(\frac{n}{\log n}\right)$, tehát III. C. tétel szerint, amennyiben $\frac{q_n(x)-q_n(x_1)}{x-x_1}$ egy x_1-ben $n-1$-edfokú polinom,

$$q_n'(x)=o\left(\frac{n}{\log n}\right)\qquad(\alpha<x<\beta)\tag{33}$$

az egész (α,β) részintervallumban egyenletesen. Másrészt minden $[-1,+1]$-ben levő x-re fennáll

$$\left|\frac{q_n(x)-q_n(x_1)}{x-x_1}\right|\leqq\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\right|+\frac{1}{|x-x_1|}\,o(1),$$

így III. A. és III. C. tételekből kapjuk, hogy

$$q_n'(x)=\begin{cases}o\left(\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\ o(n^2)\end{cases}\tag{34}$$

$[-1,+1]$-ben egyenletesen. (34)-et megkaphatjuk egy egyszerűbb, elegánsabb gondolatmenettel is, melyet először FEJÉR L. [10] alkalmazott trigonometrikus sorok konjugáltjára vonatkozó dolgozatában. Azonban (33) ezen a módon nem bizonyítható.

IV. A hullámparabola becslése

IV. SEGÉDTÉTEL: Az $(\alpha+2\delta, \beta-2\delta)$ valamely belső részintervallumába eső x értékekre egyenletesen

$$\sum_{|x_{kn}-x|<\delta}' |x-x_{kn}|\, l_{kn}^2(x) = O\left(\frac{\log n}{n}\right). \tag{35}$$

BIZONYÍTÁS: Mint egy előző dolgozatomban kimutattam [11]

$$l_{kn}(x) = \lambda_{kn} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \frac{p_{n-1}(x_{kn})p_n(x)}{x-x_{kn}}, \tag{36}$$

ahol

$$0 < \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} < 1. \tag{37}$$

x_{jn} és $x_{j+1,n}$ legyenek $p_n(x)$ x-hez legközelebbi gyökhelyei; akkor (25) és (10) szerint

$$\sum_{|x-x_{kn}|<\delta}' |x-x_{kn}|\, l_{kn}^2(x) < O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{|x-x_{kn}|<\delta}'' \frac{1}{|x-x_{kn}|} + \tag{38}$$
$$+ |x-x_{jn}|\, l_{jn}^2(x) + |x-x_{j+1,n}|\, l_{j+1,n}^2(x).$$

a Σ''-ban $k=j$ és $k=j+1$ tagok nem szerepelnek. (24) baloldalából kapjuk

$$\Sigma'' \frac{1}{|x-x_{kn}|} < 2\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu \frac{c_1}{n}} = O(n \log n).$$

(23) és (24) jobboldalából

$$|x-x_{jn}|\, l_{jn}^2(x) + |x-x_{j+1,n}|\, l_{j+1,n}^2(x) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

ebből pedig (35) következik.

V. SEGÉDTÉTEL: Legyen

$$|\gamma_{kn}| < \varrho \frac{n}{\sqrt{1-x_{kn}^2}} \quad \text{és} \quad |\gamma_{kn}| < \varrho n^2, \tag{39}$$

akkor van egy n-től független c_5 konstans, hogy a

$$\left| \sum_{|x-x_{kn}|>\delta}' \gamma_{kn} l_{kn}^2(x) \right| < \frac{c_5 \varrho}{\delta^2} \tag{40}$$

egyenlőtlenség fennáll.

BIZONYÍTÁS: (10), (36) és (37)-ből

$$\sum_{|x-x_{kn}|>\delta}' |\gamma_{kn}|\, l_{kn}^2(x) \leq \frac{K^2}{\delta^2} \sum_{k=1}^{n} |\gamma_{kn}|\, p_{n-1}^2(x_{kn}) \lambda_{kn}^2;$$

tehát tekintettel (39)-re és II. segédtételre $|\gamma_{kn}|\lambda_{kn} \leqq 200\, M\varrho$; így kapjuk, hogy

$$\sum_{|x-x_{kn}|\geq\delta} |\gamma_{kn}| l_{kn}^2(x) \leq \frac{200\, M K^2 \varrho}{\delta^2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} p_{n-1}^2(x_{kn}) =$$

$$= 200\, M K^2 \frac{\varrho}{\delta^2} \int_{-1}^{+1} p_{n-1}^2(x)\, w(x)\, dx =$$

$$= \frac{200\, M K^2 \varrho}{\delta^2}.$$

V. Segédtételek a lépcsőparabola becsléséhez

VI. SEGÉDTÉTEL:

(41)
$$\left| \frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_n^2(x_{kn})} \right| \leqq c_6 \frac{n^2}{1-x_{kn}^2}$$

és

(42)
$$\frac{|\lambda_n'(x_{kn})|}{\lambda_{kn}^2} \leqq c_6 n^4.$$

BIZONYÍTÁS: Az Erdős—Turán-féle variációs lemma értelmében, miután $w(x) \geqq m$,

(43)
$$\frac{1}{\lambda_n(\xi)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(\xi) < \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} P_k^2(\xi),$$

ahol $P_k(\xi)$ a k-adik Legendre-polinom. Ismert becslés* szerint

(44)
$$|P_k(\xi)| \leqq \frac{c_7}{\sqrt{k}(1-\xi^2)^{1/4}},$$

ahol c_7 k-tól és ξ-től független, tehát

(45)
$$0 < \frac{1}{\lambda_n(\xi)} \leqq c_8 \frac{n}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Mivel $\lambda_n^{-1}(\xi)$ $2n-2$-edfokú polinom, BERNSTEIN-nek a III. rész elején említett tételéből következik

(46)
$$0 < \frac{1}{\lambda_n(\xi)} \leqq 2 c_8 n^2$$

és differenciálás útján MARKOV tételének következtében

$$\frac{|\lambda_n'(\xi)|}{\lambda_n^2(\xi)} < 8 c_8 n^4.$$

* L. Szegő [17] 160. o.

Ezzel (42)-t bizonyítottuk. Másrészt (45)-ből $\xi=\cos\theta$ helyettesítéssel kapjuk

$$0<\frac{\sin\theta}{\lambda_n(\cos\theta)}\leqq c_8\, n;$$

itt egy $2n-1$-edfokú trigonometrikus polinom áll, így BERNSTEIN tételét alkalmazva differenciálással kapjuk, hogy

$$\left|-\frac{\lambda_n'(\cos\theta)}{\lambda_n^2(\cos\theta)}\sin^2\theta+\frac{\cos\theta}{\lambda_n(\cos\theta)}\right|\leqq 2c_8 n^2. \tag{47}$$

(46) és (47)-ből következik (41).

Megjegyezzük, hogy (42) a III. A. segédtétel szerint (41) következménye.

II. és VI. segédtételekből következik

$$\frac{|\lambda_n'(x_{kn})|}{\lambda_{kn}}\leqq c_9\,\mathrm{Min}\left(\frac{n}{\sqrt{1-x_{kn}^2}},\ n^2\right). \tag{48}$$

VII. SEGÉDTÉTEL: Az $(\alpha+2\delta,\beta-2\delta)$ intervallumba eső x-ekre egyenletesen

$$\sum_{|x-x_{kn}|\leqq\delta}|v_{kn}(x)|\,l_{kn}^2(x)=O(\log n).$$

BIZONYÍTÁS: Miután (19)- és (4)-ből

$$v_{kn}(x)=1+\frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_{kn}}(x-x_{kn}) \tag{49}$$

az I. segédtétel szerint elegendő kimutatnunk, hogy

$$\sum_{|x-x_{kn}|\leqq\delta}\left|\frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_{kn}}\right|\,|x-x_{kn}|\,l_{kn}^2(x)=O(\log n),$$

ez azonban teljesül, tekintettel (48)-ra és a IV. segédtételre. Q.e.d.

VIII. SEGÉDTÉTEL:

$$\sum_{|x-x_{kn}|\leqq\delta}|v_{kn}(x)|\,l_{kn}^2(x)=o(1). \tag{50}$$

BIZONYÍTÁS: Az állítás következik (48), (49)-ből és az V. segédtételből.

A II. tétel bizonyítása

Tekintsük azon $\{q_n(x)\}$ polinomsorozatot, amely eleget tesz (32), (33), ill. (34)-nek. Már most

$$\begin{aligned}H_n(f,x)-q_n(x)&=\sum_{k=1}^{n}[f(x_{kn})-q_n(x_{kn})]\,v_{kn}(x)\,l_{kn}^2(x)+\\&+\sum_{k=1}^{n}[d_{kn}-q_n'(x_{kn})]\,(x-x_{kn})\,l_{kn}^2(x)=A_{1n}+A_{2n}+A_{3n}+A_{4n},\end{aligned} \tag{51}$$

ahol

(52) $$A_{1n}=\sum_{|x-x_{kn}|\leqq\delta}[f(x_{kn})-q_n(x_{kn})]\,v_{kn}(x)\,l_{kn}^2(x)$$

(53) $$A_{2n}=\sum_{|x-x_{kn}|>\delta}[f(x_{kn})-q_n(x_{kn})]\,v_{kn}(x)\,l_{kn}^2(x)$$

(54) $$A_{3n}=\sum_{|x-x_{kn}|\leqq\delta}[d_{kn}-q_n'(x_{kn})]\,(x-x_{kn})\,l_{kn}^2(x)$$

és végül

(55) $$A_{4n}=\sum_{|x-x_{kn}|>\delta}[d_{kn}-q_n'(x_{kn})]\,(x-x_{kn})\,l_{kn}^2(x).$$

VII. segédtétel és (32) szerint

$$A_{1n}=o(1),$$

VIII. segédtételből és $q_n(x)\to f(x)$ következtében

$$A_{2n}=o(1),$$

IV. segédtétel szerint (11) és (33)-ból

$$A_{3n}=o(1),$$

végül V. segédtételből és (11), (34) következtében

$$A_{4n}=o(1).$$

Így tehát fennáll

$$H_n(f;(x))-q_n(x)=A_{1n}+A_{2n}+A_{3n}+A_{4n}=o(1)$$

és ebből következik, hogy

$$H_n(f,x)\to f(x),$$

q. e. d.

Pontosabb becslés $\lambda_n'(\xi)$-re

A következőkben teljesüljenek I. tétel feltételei.

Legyen $-1<\xi_1<\xi_2<1$ és $\varphi(x)$ legyen az a lineáris függvény, melyre $\varphi(\xi_1)=\xi_2$ és $\varphi(1)=1$:

$$\varphi(x)=1+\frac{1-\xi_2}{1-\xi_1}(x-1).$$

$[-1,+1]$-ben $\varphi(x)\leqq 1$ és $\varphi(x)$ legkisebb értéke

$$\eta=\varphi(-1)=-1+\frac{2(\xi_2-\xi_1)}{1-\xi_1}>-1,$$

végül

(56) $$0\leqq\varphi(x)-x\leqq\eta+1=\frac{2}{1-\xi_1}(\xi_2-\xi_1),\qquad(-1\leqq x\leqq 1).$$

Az $l_n(\varphi(x),\xi_2)$ legfeljebb $n-1$-edfokú polinom az $x=\xi_1$ helyen az

$l_n(\xi_2, \xi_2) = 1$ értéket veszi fel; tehát $\lambda_n(\xi)$; minimumtulajdonsága következtében

$$\lambda_n(\xi_1) \leqq \int_{-1}^{1} l_n^2(\varphi(t), \xi_2)\, w(t)\, dt. \tag{57}$$

Legyen

$$\Phi(x) = 1 + \frac{1-\xi_1}{1-\xi_2}(x-1) \tag{58}$$

a $\varphi(x)$ inverz függvénye; (56) következtében

$$0 \leqq x - \Phi(x) \leqq \frac{2}{1-\xi_1}(\xi_2 - \xi_1) \qquad (\eta \leqq x \leqq 1). \tag{59}$$

$t = \Phi(x)$ helyettesítéssel (57)-ből következik

$$\lambda_n(\xi_1) \leqq \frac{1-\xi_1}{1-\xi_2} \int_{\eta}^{1} l_n^2(x, \xi_2)\, w(\Phi(x))\, dx.$$

(57)-ből, tekintettel (17)-re

$$\begin{aligned} \lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2) \leqq & \int_{\eta}^{1} l_n^2(x, \xi_2)[w(\Phi(x)) - w(x)]\, dx + \\ & + \frac{\xi_2 - \xi_1}{1-\xi_2} \int_{\eta}^{1} l_n^2(x, \xi_2)\, w(\Phi(x))\, dx. \end{aligned} \tag{60}$$

Hasonlóan, ha $\varphi^*(x)$ az a lineáris függvény, amelyre $\varphi^*(-1) = -1$ és $\varphi^*(\xi_2) = \xi_1$, ennek inverze legyen $\Phi^*(x)$ és $\varphi^*(1) = \eta^*$, akkor $[-1, +1]$-ben

$$\varphi^*(x) \geqq -1$$

$$\varphi^*(x) \leqq \eta^* = \varphi^*(1) = 1 - \frac{2(\xi_2 - \xi_1)}{1+\xi_2} < 1$$

és

$$0 \leqq \Phi^*(x) - x \leqq \frac{2}{1+\xi_2}(\xi_2 - \xi_1). \tag{56a}$$

Ugyanazzal a meggondolással, mint az előbb, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2) \geqq & - \int_{-1}^{\eta^*} l_n^2(x, \xi_1)[w(\Phi^*(x)) - w(x)]\, dx - \\ & - \frac{\xi_2 - \xi_1}{1+\xi_1} \int_{-1}^{\eta^*} l_n^2(x, \xi_1)\, w(\Phi^*(x))\, dx. \end{aligned} \tag{60a}$$

Válasszuk meg δ^*-ot olyan kicsinek, hogy ha $|\xi_2 - x| < \delta^*$, akkor $|\Phi(x) - x| < \delta$. Tekintettel (12) és (56)-ra

$$\max_{|x-\xi_2| < \delta^*} |w(\Phi(x)) - w(x)| = o\left(\log^{-1} \frac{1}{|\xi_2 - \xi_1|}\right). \tag{61}$$

$w(x)$ folytonossága következtében x-ben egyenletesen

(62) $$w(\Phi(x))-w(x)=o(1) \quad \text{ha } \xi_2-\xi_1\to 0.$$

(60), (61) és (62) figyelembevételével $|\xi_2|<1-h$-ra

(63) $$\lambda_n(\xi_1)-\lambda_n(\xi_2)\leqq o\left(\log^{-1}\frac{1}{|\xi_2-\xi_1|}\right)\int_{\xi_2-\delta^*}^{\xi_2+\delta^*} l_n^2(x,\xi_2)\,dx+$$
$$+o(1)\left\{\int_{-1}^{\xi_2-\delta^*} l_n^2(x,\xi_2)\,dx+\int_{\xi_2+\delta^*}^{1} l_n^2(x,\xi_2)\,dx\right\}+\frac{M(\xi_2-\xi_1)}{h}\int_{-1}^{+1} l_n^2(x,\xi_2)\,dx.$$

$w(x)\geqq m$ és II. segédtétel szerint

(64) $$\int_{-1}^{+1} l_n^2(x,\xi_2)\,dx\leqq\frac{1}{m}\int_{-1}^{+1} l_n^2(x,\xi_2)w(x)\,dx=\frac{1}{m}\lambda_n(\xi_2)\leqq\frac{c_{10}}{n}.$$

(63) második részének megbecsléséhez szükségünk van (36) egy általánosítására:

(65) $$l_n(x,\xi)=\lambda_n(\xi)\sum_{k=0}^{n-1}p_k(\xi)p_k(x)=\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\lambda_n(\xi)\frac{p_{n-1}(\xi)p_n(x)-p_n(\xi)p_{n-1}(x)}{x-\xi}$$

A bizonyítás szószerint átvihető [11] dolgozatomból.

Tekintettel (65)-re (37) és (10)-ből kapjuk, hogy

(66) $$\int_{-1}^{\xi_2-\delta^*} l_n^2(x,\xi_2)\,dx\leqq\frac{2}{\delta_m^{*2}}\lambda_n^2(\xi_2)\Big[p_{n-1}^2(\xi_2)\int_{-1}^{+1}p_n^2(x)w(x)\,dx+$$
$$+p_n^2(\xi_2)\int_{-1}^{+1}p_{n-1}^2(x)w(x)\,dx\Big]\leqq\frac{4k^2}{\delta_m^{*2}}\lambda_n^2(\xi_2)\leqq\frac{c_{11}}{n^2}.$$

és $\int_{\xi_2+\delta^*}^{1} l_n^2(x,\xi_2)\,dx$ hasonlóan becsülhető.

Tehát (63) és (64) következtében fennáll

(67) $$\lambda_n(\xi_1)-\lambda_n(\xi_2)\leqq\frac{1}{n}o\left(\log^{-1}\frac{1}{|\xi_2-\xi_1|}\right)+\frac{1}{n^2}o(1).$$

(60a)-ból egy hasonló alsó becslést nyerhetünk $\lambda_n(\xi_1)-\lambda_n(\xi_2)$-re és mindkét becslésben eltekinthetünk a $\xi_1<\xi_2$ feltételtől, ha $\xi_2\in(\alpha+\delta,\beta-\delta)$ mellett $\xi_1\in(\alpha+\delta,\beta-\delta)$-t is feltesszük.

Így tekintettel (22)-re

(68) $$\frac{\dfrac{1}{\lambda_n(\xi_1)}-\dfrac{1}{\lambda_n(\xi_2)}}{\xi_1-\xi_2}=n\,o\left(\frac{\log^{-1}\dfrac{1}{|\xi_2-\xi_1|}}{|\xi_2-\xi_1|}\right).$$

IX. SEGÉDTÉTEL: (α, β) *minden belső részintervallumában ξ-ben egyenletesen.*

(69) $$\frac{\lambda_n'(\xi)}{\lambda_n^2(\xi)} = o\left(\frac{n^2}{\log n}\right).$$

BIZONYÍTÁS: (68) baloldala (18) következtében egy ξ_2-ben $2n$-nél alacsonyabb fokú polinom. Így tekintettel III. C. segédtételre, (68) és (22)-re:

$$\frac{\frac{1}{\lambda_n(\xi_1)} - \frac{1}{\lambda_n(\xi_2)}}{\xi_1 - \xi_2} = o\left(\frac{n^2}{\log n}\right).$$

$\xi_1 = \xi_2 = \xi$ helyettesítéssel ebből a (69) becslést nyerhetjük.

X. SEGÉDTÉTEL. $[-1, +1]$ *minden belső részintervallumában*

(70) $$\frac{\lambda_n'(\xi)}{\lambda_n^2(\xi)} = o(n^2).$$

BIZONYÍTÁS: (62) és (64) figyelembevételével (60) és (60a)-ból következik

(71) $$|\lambda_n(\xi_1) - \lambda_n(\xi_2)| \leqq \frac{c_{12}}{n}[|\xi_2 - \xi_1| + o(1)]$$

$-1 + h \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq 1 - h$-ban egyenletesen.

Ebben a becslésben $\xi_1 < \xi_2$ ismét figyelmen kívül hagyható. Tehát (22) következtében

(72) $$\frac{\frac{1}{\lambda_n(\xi_2)} - \frac{1}{\lambda_n(\xi_1)}}{\xi_2 - \xi_1} = \left[1 + o\left(\frac{1}{|\xi_2 - \xi_1|}\right)\right] O(n).$$

Itt a baloldalon ismét egy $2n$-nél alacsonyabb fokú polinom áll. Így III. C. segédtétel alapján nyerhetjük (70)-et.

Pontosabb becslés a lépcsőparabolára

XI. SEGÉDTÉTEL: (α, β) *valamely belső részintervallumába eső x-ekre egyenletesen*

(73) $$\sum_{\substack{|x - x_{kn}| \geqq \delta \\ |x_{kn}| \leqq 1 - h}} |v_{kn}(x)| \, l_{kn}^2(x) = o(1).$$

X. és II. segédtétel szerint

$$\frac{\lambda_n'(\xi)}{\lambda_n(\xi)} = o(n) \qquad (-1 + h \leqq \xi \leqq 1 - h),$$

tehát (49)-ből

(74) $$v_{kn}(x) = o(n) \qquad (-1 + h \leqq x_{kn} \leqq 1 - h).$$

$|x-x_{kn}|>\delta$-ra (36), (37) és (10)-ből kapjuk, hogy

$$(75)\qquad |l_{kn}(x)|<\frac{K}{\delta}\lambda_{kn}|p_{n-1}(x_{kn})|.$$

Tehát (74) és (75)-ből nyerjük, hogy

$$(76)\qquad \sum_{\substack{|x-x_{kn}|\geq\delta\\ |x_{kn}|\leq 1-h}} |v_{kn}(x)|\,l_{kn}^2(x)=o(n)\,\frac{K^2}{\delta^2}\,\mathrm{Max}\,\lambda_{kn}\cdot\sum_{k=1}^{n}\lambda_{kn}p_{n-1}^2(x_{kn}).$$

II. segédtételből következik $\lambda_{kn}=O\left(\frac{1}{n}\right)$, továbbá

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_{kn}p_{n-1}^2(x_{kn})=\int_{-1}^{+1}p_{n-1}^2(x)w(x)dx=1.$$

Így (76)-ból következik (73).

XII. SEGÉDTÉTEL: $(\alpha+2\delta,\beta-2\delta)$ *minden belső részintervallumára egyenletesen*

$$(77)\qquad \sum_{|x-x_{kn}|<\delta}|v_{kn}(x)|\,l_{kn}^2(x)=O(1).$$

BIZONYÍTÁS: Tekintettel I. segédtételre és (49)-re; elegendő bebizonyítani, hogy

$$(78)\qquad \sum_{|x-x_{kn}|<\delta}\frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_{kn}}|x-x_{kn}|\,l_{kn}^2(x)=O(1).$$

IX. és II. segédtételből következik

$$\frac{\lambda_n'(x_{kn})}{\lambda_{kn}}=o\left(\frac{n}{\log n}\right),$$

tehát (78) következik a IV. segédtételből.

Az I. tétel bizonyítása

Az $f(x)$ függvény tegyen eleget az I. tétel feltételeinek. Legyen $\chi(x)$ az a legfeljebb másodfokú polinom, amely a ξ, -1, $+1$ helyeken $f(x)$-szel egyenlő:

$$\chi(\xi)=f(\xi),\quad \chi(-1)=f(-1),\quad \chi(1)=f(1).$$

Az $f(x)$ és $\chi(x)$ függvények folytonossága következtében megadhatók bármely ε-hoz olyan δ és h pozitív számok, hogy

$$(79)\qquad |f(x)-\chi(x)|\leqq\varepsilon,\quad \text{ha}\quad |x-\xi|\leqq\delta$$

$$(80)\qquad |f(x)-\chi(x)|\leqq\varepsilon,\quad \text{ha}\quad 1-h\leqq|x|\leqq 1.$$

Feltételezzük, hogy $\alpha \leqq \xi-\delta < \xi+\delta \leqq \beta$. Rögzítsük ezen δ és h értékeket, és bontsuk fel az n-edik Hermite-féle interpolációs polinomot a ξ helyen az alábbi alakban:

(81) $$H_n(f,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{kn})\, v_{kn}(\xi) l_{kn}^2(\xi) + \sum_{k=1}^{n} d_{kn}(\xi - x_{kn}) l_{kn}^2(\xi) =$$

$$= \chi(\xi) + \sum_{k=1}^{n} [f(x_{kn}) - \chi(x_{kn})]\, v_{kn}(\xi) l_{kn}^2(\xi) + \sum_{k=1}^{n} [d_{kn} - \chi'(x_{kn})]\cdot(\xi - x_{kn}) l_{kn}^2(\xi) =$$

$$= f(\xi) + \Sigma_{1n} + \Sigma_{2n} + \Sigma_{3n} + \Sigma_{4n},$$

ahol

(82) $$\Sigma_{1n} = \sum_{|\xi - x_{kn}| \leqq \delta} [f(x_{kn}) - \chi(x_{kn})]\, v_{kn}(\xi) l_{kn}^2(\xi)$$

(83) $$\Sigma_{2n} = \sum_{\substack{|\xi - x_{kn}| > \delta \\ |x_{kn}| \leqq 1-h}} [f(x_{kn}) - \chi(x_{kn})]\, v_{kn}(\xi) l_{kn}^2(\xi)$$

(84) $$\Sigma_{3n} = \sum_{|x_{kn}| > 1-h} [f(x_{kn}) - \chi(x_{kn})]\, v_{kn}(\xi) l_{kn}^2(\xi)$$

és végül

(85) $$\Sigma_{4n} = \sum_{k=1}^{n} [d_{kn} - \chi'(x_{kn})](\xi - x_{kn}) l_{kn}^2(\xi).$$

A XII. segédtételből és (79)-ből

(86) $$|\Sigma_{1n}| < \varepsilon O(1).$$

A XI. segédtétel alapján

(87) $$|\Sigma_{2n}| = o(1).$$

A VIII. segédtételből és (80)-ból,

(88) $$|\Sigma_{3n}| < \varepsilon O(1),$$

végül (11)-ből a IV. és V. segédtétel alapján

(89) $$|\Sigma_{4n}| = o(1).$$

Így (81), (86), (87), (88) és (89) alapján

$$\lim_{n=\infty} H_n(f;\xi) = f(\xi), \quad \text{q. e. d.}$$

IRODALOM

[1] S. N. BERNSTEIN, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné, *Mémoires Ac. de Belgique*, II. **4** (1912), 1—103.

[2] S. N. BERNSTEIN, Sur les polynomes orthogonaux relatifs a un segment fini, *Journal de Mathématiques*, **9** (1930), 127—177. és **10** (1921), 219—286.

[3] P. ERDŐS—P. TURÁN, On interpolation. III, *Annals of Math.*, **41** (1940), 510—553.

[4] L. FEJÉR, Über Interpolation, *Nachrichten der Ges. der Wiss.* Göttingen, Math. Phys. Kl, 1916, 66—91.

[5] L. FEJÉR, Über Weierstrass-sche Approximation, besonders durch Hermitesche Interpolation, *Math. Annalen*, **102** (1930), 707—725.

[6] L. FEJÉR, Die Abschätzung eines Polynoms, *Math. Zeitschr.*, **32** (1930), 426—457.

[7] L. FEJÉR, Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Annalen*, **106** (1932), 1—55.

[8] L. FEJÉR, Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen, *Math. Zeitschr.*, **37** (1933), 287—309.

[9] L. FEJÉR, On the characterization of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points, *American Math. Monthly*, **41** (1934), 1—14.

[10] L. FEJÉR, Über konjugierte trigonometrische Reihen, *Journal f. reine u. angew. Math.*, **144** (1914), 48—56.

[11] FREUD G., A Lagrange-féle interpoláció Lebesgue-függvényeiről. *MTA III. oszt. Közl.* **3** (1953), 563—567.

[12] FREUD G., Erdős P. és Turán P. egy tételéről. *MTA III. oszt. Közl.* **4** (1954), 209—217.

[13] G. GRÜNWALD, On the theory of interpolation, *Acta Math.*, **75** (1943), 219—245.

[14] D. JACKSON, The theory of approximation. *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, Band. XI (New York, 1930).

[15] J. SHOHAT, On interpolation, *Annals of Math.* (2), **34** (1933), 130—146.

[16] G. SZEGŐ, Über gewisse Interpolationspolynome, die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören, *Math. Zeitschr.* **35** (1932), 579—602.

[17] G. SZEGŐ, Orthogonal polynomals, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ* **13** (New. York, 1939).

ORTOGONÁLIS POLINOMSOROK ABSZOLÚT KONVERGENCIÁJÁRÓL*

FREUD GÉZA

Bevezetés

Ismeretes S. N. BERNSTEIN következő tétele [4]:

Legyen $g(x)$ 2π szerint periódikus függvény, melyet a $(0, 2\pi)$-ben n-edfokú trigonometrikus polinomokkal approximálunk. A Csebisev-féle értelemben őt legjobban megközelítő polinomtól való eltérése legyen $E_n(g)$. Ekkor ha fennáll

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n(g)}{\sqrt{n}} < \infty,$$

$g(x)$ Fourier sora mindenütt abszolút konvergens. S. N. BERNSTEIN megjegyzései szerint (1) minden olyan esetben teljesül, ha

$$(1.\text{a}) \qquad \sum \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, g\right)}{\sqrt{n}} < \infty$$

fennáll, ahol $\omega(\delta, g)$ $g(x)$ folytonossági modulusa $(0, 2\pi)$-ben.[1]

Ebből következik, hogy $g(x)$ Fourier sora mindenütt abszolút konvergens, ha $g(x)$ egy $\alpha > \frac{1}{2}$ kitevőjű Lipschitz feltételnek tesz eleget. Ebben az értelemben ALEXITS Gy. [1], [2] a fenti tételt ortogonális polinomok egy osztályára is átvitte.

Legyen $\{P_n(x)\}$ normált ortogonális polinomok sorozata $(-1, +1)$-ben és $w(x)$ a hozzátartozó nemnegatív súlyfüggvény, legyen továbbá

$$(2) \qquad f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu P_\nu(x)$$

a $(-1, +1)$-ben definiált L^2 integrálható $f(x)$ ortogonális polinom sorfejtése. ALEXITS GY. tételében bebizonyítja, hogy ha

$$(3) \qquad w(x) \leqq W(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

* E dolgozat „Über die absolute Konvergenz von orthogonalen Polynomreihen" címmel megjelent az Acta Math. Ac. Sci. Hung. 4 (1953), 127—135.

[1] S. B. STECKIN megmutatta [9], hogy (1) és (1. a) ekvivalensek.

továbbá $f \in Lip\,\alpha, \alpha > \frac{1}{2}$, akkor

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu| < \infty \tag{4}$$

Ha a $\{P_n(x)\}$ sorozat az x helyen korlátos, akkor nyilvánvalóan a (2) ortogonális sorfejtés ugyanazon a helyen abszolút konvergens.

S. N. Bernstein tételének egy további általánosítása S. B. Steckintől ered [8], [9]: Legyen $\{\Phi_n\}$ egy (a, b)-ben értelmezett, tetszőleges teljes ortogonális rendszer és

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k(x) \tag{2. a}$$

az $f \in L^2$ függvény ortogonális sorfejtése. Legyen

$$E_n^2\{f, \Phi_n\} = \left\{ \operatorname{Min} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k(x) \right]^2 \right\}^{1/2} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2}, \tag{5}$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} E_n^{(2)}(f, \Phi). \tag{6}$$

S. B. Steckin ezen tételéből — ugyanúgy, mint Alexits említett tételéből — csak akkor lehet az ortogonális sorfejtés abszolút konvergenciájára következtetni, hogy ha az ortogonális függvények egyenletesen korlátosak. Egy nemrég megjelent dolgozatomban [6] kimutattam, hogy az ortogonális polinomsorok szummabilitásának elméletében az az erős követelmény, hogy $\{P_\nu(x)\}$ egyenletesen korlátos legyen, helyettesíthető a

$$\sum_{\nu=0}^{n} [P_\nu(x)]^2 = O(n) \tag{7}$$

gyengébb feltétellel. Továbbá bebizonyítottam, hogy ez biztosan teljesül, ha a $w(x)$ súlyfüggvény az x hely környezetében egy pozitív korlát fölött marad. Ezen dolgozatban megmutatjuk, hogy a (7) feltétel, hasonlóan, mint a szummabilitási elméletben, a (2) sor abszolút konvergenciájához is elégséges.

Egy tétel általános ortogonális sorfejtésekről

Legyen $\{\Phi_n(x)\}$ a $(-1, +1)$-ben értelmezett ortogonális függvények egy normált teljes rendszere a $w(x) \geqq 0$ súlyfüggvényre vonatkozólag azaz

$$\int_{-1}^{+1} \Phi_m(x) \Phi_n(x)\, w(x)\, dx = \delta_{mn}.$$

Legyen továbbá (2. a) egy, a $w(x)$ súlyfüggvénnyel L^2 integrálható $f(x)$ függvény ortogonális sorfejtése, és

(5. a) $$E_n^{(2)}(f, w, \Phi_n) = \left\{ \mathrm{Min} \int_{-1}^{1} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k(x) \right|^2 w(x)\,dx \right\}^{1/2} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2}.$$

I. TÉTEL. Ha fennáll

(8) $$\sum_{\nu=1}^{n} |\Phi_\nu(x)|^2 \leq Kn$$

és

(9) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n^2(f, w, \Phi_n)}{\sqrt{n}} < \infty,$$

akkor (2. a) az x helyen abszolút konvergens.

BIZONYÍTÁS. (5. a) és (8) értelmében fennáll

(10) $$\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} |c_k \Phi_k(x)| \leqq \left(\sum_{2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} [\Phi_k(x)]^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} |c_k|^2 \right)^{1/2} \leqq$$
$$\leqq \left(\sum_{k=1}^{2^{\nu+1}} [\Phi_k(x)]^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{2^\nu+1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2} < \sqrt{2K}\, 2^{\nu/2} E_{2^\nu}^{(2)}(f, w, \Phi_n)$$

(9) figyelembevételével, és a tagok monotonitásának következtében CAUCHY egy ismert tétele szerint[2] kapjuk, hogy

$$\sum 2^{\nu/2} E_{2^\nu}^{(2)}(f, w, \Phi_n) < \infty$$

ez (10)-ből épp (2. a) abszolút konvergenciáját adja.

Áttérés ortogonális polinomsorokra

A továbbiakban foglalkozunk a (2) sorfejtéssel. $f(x)$ folytonossága esetén definiáljuk $f(x)$ „trigonometrikus folytonossági modulusát"

(11) $$\omega^*(\delta, f) = \max_{|\vartheta_1 - \vartheta_2| \leqq \delta} |f(\cos\vartheta_1) - f(\cos\vartheta_2)|$$

II. TÉTEL. Legyen $f(x)$ folytonos és

(12) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^*\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt{n}} < \infty$$

akkor (2) minden olyan x helyen, ahol (7) teljesül, abszolút konvergens.[3]

[2] *Cauchy* tétele kimondja, hogy ha $a_n > a_{n+1} > \cdots > 0$, akkor $\sum a_n$ és $\sum 2^\nu a_{2^\nu}$ egyidejűleg konvergens, vagy divergens.

[3] (12) alatti feltétel biztosan teljesül, ha ϑ-ban egyenletesen fennáll

(12.a.) $$|f[\cos(\vartheta + h)] - f(\cos\vartheta)| \leqq c_3 |h|^{1/2} (\log|h|^{-1})^{-1} (\log\log|h|^{-1})^{-1} \cdots (\log_k|h|^{-1})^{-K}, K > 1$$

ahol $\log_p(x) = \log\log_{p-1}(x)$-et jelent, vagy ha $g(\vartheta) = f(\cos\vartheta)$ egy $\alpha > 1/2$ kitevőjű Lipschitz feltételnek tesz eleget.

BIZONYÍTÁS: D. JACKSON egy ismert tétele szerint van egy olyan legfeljebb n-edfokú $\pi_n(x)$ polinom, melyre az egész $(-1, +1)$ intervallumban

$$|f(x)-\pi_n(x)|<c_1\omega^*\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ebből következik

$$E_n^{(2)}(f, w, P_n)\leqq\sqrt{\int_{-1}^{+1}[f(x)-\pi_n(x)]^2w(x)\,dx}\leqq \tag{13}$$
$$\leqq c_1\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{\int_{-1}^{+1}w(x)\,dx}$$

(12) és (13)-ból kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n^2(f, w, P_n)}{\sqrt{n}}<\infty$$

tehát az I. tétel értelmében (2) abszolút konvergens.

Ha a $w(x)$ súlyfüggvény megválasztását korlátozzuk, akkor több is bizonyitható. Ehhez felhasználjuk a következő segédtételt.

I. SEGÉDTÉTEL: Legyen $f\in L^2$

$$\omega^{2*}(\delta, f)=\left\{\operatorname*{Max}_{|h|\leqq\delta}\int_0^{\pi}[f(\cos(\vartheta+h))-f(\cos\vartheta)]^2\,d\vartheta\right\}^{1/2} \tag{14}$$

és

$$E_n^{(2)*}(f)=\left\{\operatorname{Min}\int_0^{\pi}\left[f(\cos\vartheta)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\cos k\vartheta\right]^2d\vartheta\right\}^{1/2} \tag{15}$$

akkor

$$E_n^{(2)*}(f)\leqq c_2\,\omega^{(2)*}\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{16}$$

BIZONYÍTÁS: Jelentse

$$f(\cos\vartheta)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos k\vartheta \tag{17}$$

az $f(\cos\vartheta)$ páros függvény Fourier sorát, akkor

$$[E_n^{(2)*}(f)]^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k^2 \tag{18}$$

és fennáll a következő identitás:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)=\frac{n}{\pi}\int_0^{1/n}dh\int_0^{\pi}\left\{f\left[\cos\left(\vartheta+\frac{h}{2}\right)\right]-f\left[\cos\left(\vartheta-\frac{h}{2}\right)\right]\right\}^2d\vartheta \tag{19}$$

Az $y = \sin x$ görbe menetéből következik, hogy van egy olyan pozitív c_3 konstans, melyre fennáll

$$1 - \frac{\sin \frac{k}{n}}{\frac{k}{n}} \geqq c_3^{\,1} \qquad (k \geqq n) \tag{20}$$

egyenlőtlenség. Ebből (18), (19) és (14) figyelembevételével $c_2 = \frac{\pi c_3}{4}$ mellett következik (16).[4]

Q.E.D.

III. TÉTEL. A (3) és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{2*}\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt{n}} < \infty \tag{21}$$

feltevések mellett a (2) sor minden x helyen, ahol (7) teljesül, abszolút konvergens.

Speciálisan (21) teljesül, ha $f(\cos \vartheta)$ ϑ függvényeként egy $\mathrm{Lip}(\alpha, 2)$, $\alpha > {}^1/_2$ feltételnek tesz eleget.

BIZONYÍTÁS: (3) miatt

$$\begin{aligned} E_n^{(2)}(f, w, P_n) &\leqq W \left\{ \mathrm{Min} \int_{-1}^{+1} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k \right]^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\}^{1/2} = \\ W &\left\{ \mathrm{Min} \int_{0}^{\pi} \left[f(\cos \vartheta) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos k\vartheta \right]^2 d\vartheta \right\}^{1/2} = W E_n^{(2)*}(f) \end{aligned} \tag{22}$$

(16), (21) és (22)-ből következik

$$\sum \frac{E_n^{(2)}(f, w, P_n)}{\sqrt{n}} < \infty$$

és így III. tételt visszavezettük I. tételre.

Zygmund és Hardy—Littlewood tételéről

A. ZYGMUND [13] bebizonyította, hogy egy 2π szerint periodikus $g(\vartheta)$ függvény Fourier-sora abszolút konvergens, ha $f(x)$ korlátos variációjú és $g \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ egy tetszőleges $\alpha > 0$ kitevővel. G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD [7] kimutatták, hogy itt a $g \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ feltétel a $g \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$ $\alpha p > 1$ gyengébb felté-

[4] Fenti segédtétel egyszerű bizonyítása RÉNYI ALFRÉDtől származik, amiért neki ez úton mondok köszönetet. Más bizonyítást lásd AHIJEZER [3], 161—162.

tellel helyettesíthető. Továbbá ugyanazon a helyen bebizonyították, hogy $g(\vartheta)$ Fourier-sora akkor is abszolút konvergál, ha a következő feltételek teljesülnek:

$$g \in \mathrm{Lip}(\alpha, p) \quad \alpha p = 1, \; p < 2 \text{ és } f \in \mathrm{Lip}\,\beta, \quad \beta > 0.$$

M. Z. WARASZKIEWICZ [12] mindkét utóbb említett tételt visszavezette Bernstein tételének egy SZÁSZ OTTÓtól származó általánosítására. Szász Ottó tételét S. B. Steckin már említett tétele tartalmazza. Hardy—Littlewood mindkét tételét először ortogonális polinomsorokra terjesztjük ki.

II. SEGÉDTÉTEL. A 2π szerint periodikus $g(\vartheta)$ tegyen eleget a következő feltételek egyikének:

a) $g(\vartheta)$ korlátos variációjú és $g \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ $\alpha p < 1$

b) $g \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ $\alpha p = 1$, $p < 2$ és $g \in \mathrm{Lip}\,\beta$, $\beta > 0$, akkor[5]

$$\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, g\right) = O(n^{-\frac{1}{2}-\delta}), \quad \delta > 0. \tag{23}$$

Ezen segédtétel bizonyitására vonatkozóan utalunk WARASZKIEWICZ dolgozatára [12].

IV. TÉTEL. Az $f(\cos\vartheta) = g(\vartheta)$ függvény tegyen eleget a II. segédtétel a) vagy b) feltételének. Amennyiben $w(x)$ eleget tesz a (3) egyenlőtlenségnek, (2) minden x helyen, ahol (7) teljesül, abszolút konvergens.

Bizonyításunk következik (23)-ból és a III. tételből, mivel

$$\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, g\right) = \omega^{2*}\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Tekintsük most ZYGMUND tételét. Ha $f(x)$ korlátos variációjú függvény, akkor $g(\vartheta) = f(\cos\vartheta)$ is korlátos variációjú, tehát fennáll

$$\omega^{(1)}(\delta, g) = \sup_{|h| \leq \delta} \int_0^{2\pi} |g(\vartheta + h) - g(\vartheta)|\, d\vartheta = O(\delta) \tag{24}$$

és ebből következik

$$\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \sqrt{\omega^*\left(\frac{1}{n}, f\right) O(n^{-1})}. \tag{25}$$

IV. tétel figyelembevételével (24) és (25)-ből következik:

V. TÉTEL. Tegyük fel, hogy (3) teljesül, $f(x)$ korlátos variációjú és fennáll

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\omega^*\left(\frac{1}{n}, f\right)} < \infty, \tag{26}$$

[5] Mint szokásos $\omega^{(2)}(\delta, g)$ g folytonossági mértékét jelenti az L^2 metrikájában:

$$\omega^{(2)}(\delta, g) = \operatorname*{Max}_{|h| < \delta} \int_0^{2\pi} |g(\vartheta + h) - g(\vartheta)|^2 d\vartheta$$

akkor (2) minden x helyen, ahol (7) teljesül, abszolút konvergens. Érdemes megemlíteni, hogy (26) teljesül, ha $f(\cos\vartheta)$ korlátos variációjú és $(0,\pi)$-ben egyenletesen eleget tesz a

$$|f[\cos(\vartheta+h)]-f(\cos\vartheta)|<c_4\left(\log\frac{1}{|h|}\right)^{-\alpha}$$

Dini—Lipschitz feltételnek $\alpha>2$ kitevővel.

$\sum_{k=0}^{n}[P_k(x)]^2$ becsléséről

A [6] dolgozatban bebizonyítottuk a következőt: amennyiben a $(-1,+1)$ belső részintervallumában

$$w(x)\geqq m>0, \tag{27}$$

akkor a (7) alatti becslés (α,β) minden belső részintervallumában egyenletesen teljesül. Jegyezzük meg, hogy a (7) becslés egy x ponthalmazon való egyenletességéből a (2) sor egyenletes és abszolút konvergenciája következik ugyanazon a ponthalmazon, hogyha a II., III., IV. vagy az V. tétel feltételei teljesülnek. Kívánatosnak látszik egy egyszerű elégséges feltétel arra nézve, hogy a (7) becslés az egész ortogonalitási intervallumban egyenletesen teljesüljön.

III. SEGÉDTÉTEL. Ha $\mu>0$ és

$$w(x)>\mu(1-x^2)^{-1/2}\qquad(-1\leqq x\leqq+1), \tag{27a}$$

akkor (7) az egész $(-1,+1)$ ortogonalitási intervallumban egyenletesen teljesül. A bizonyítás hasonlóan, mint [6] dolgozat II. tétele, ERDŐS P. és TURÁN P. egy gondolatmenetén alapszik ([5] lemma II. 524—525).

A

$$k_n(x,x)=\sum_{k=0}^{n}[P_k(x)]^2$$

függvény előállítja a $|\pi_n(x)|^2$ maximumát, amíg $\pi_n(x)$ az összes legfeljebb n-edrendű polinomokat befutja, melyek eleget tesznek

$$\int_{-1}^{+1}|\pi_n(t)|^2w(t)\,dt\leqq 1 \tag{28}$$

egyenlőtlenségnek (SZEGŐ G. [11] 38 o.). Továbbiakban jelölje $\pi_n(t)$ azt a (28)-nak eleget tevő polinomot, amely a $|\pi_n(x)|^2=k_n(x,x)$ maximális értékét tényleg felveszi. Akkor (28) és (27a)-ból következik:

$$\mu\int_{-1}^{+1}|\pi_n(t)|^2\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\leqq 1. \tag{29}$$

Megfigyelve, hogy a $(-1, +1)$ intervallumban az $(1-x^2)^{-1/2}$-hez tartozó ortogonális és normált polinomok éppen $\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,T_n(x)\right\}$, ahol $T_n(x)$ az n-edrendű Csebisev-féle polinomokat jelöli, így (29) következtében fennáll a már használt Szegő-féle segédtétel szerint a következő becslés:

$$\mu\,|\pi_n(x)|^2 = \mu \sum_{k=0}^{n} [P_k(x)]^2 \leqq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n} [T_k(x)]^2 \tag{30}$$

(30) és $|T_k(x)| \leqq 1$ miatt végül is adódik

$$\sum_{k=0}^{n} [P_k(x)]^2 \leqq \frac{2}{\pi\mu}(n+1). \tag{31}$$

VI. TÉTEL, Ha a II., III., IV., V. tételekben (7) feltételt (27), ill. (27a) feltétellel helyettesítjük, akkor a (2) alatti ortogonális sorfejtés azonos feltevések mellett (α, β) minden belső részintervallumában, ill. az egész $(-1, +1)$ intervallumban egyenletesen abszolút konvergens.

IRODALOM

[1] G. ALEXITS, Sur la convergence des séries de polynomes orthogonaux, Commentarii Math. Helv. **16** (1943), 200—208.

[2] G. ALEXITS, Sur la convergence et la summabilité presque partout des séries de polynomes orthogonaux, *Acta Sci. Math.*, 12B (1950), 223—225.

[3] N. I. AHIJEZER: Előadások az approximáció elméletéről. Akadémiai Kiadó, Budapest 1951.

[4] S. N. BERNSTEIN, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 199 (1934), 397—400.

[5] P. ERDŐS és P. TURÁN, On interpolation, III, Annals of Math., **41** (1940), 510—553.

[6] FREUD G.: Ortogonális polinomok erős $(C, 1)$-szummálhatóságáról. MTA III. oszt. Közl. 3 (1953) 507—512.

[7] G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD, On the absolute convergence of Fourier series, Journal of the London Math. Soc. **3** (1928), 250—253.

[8] С. Б. Стечкин, Об абсолютной сходимости ортогональных рядов, Успехы Матем. Наук, II. 3. (19) (1947), 177—178.

[9] С. Б. Стечкин, Об абсолютной сходимости ортогональных рядов I. Математический Сборник, 21 (71), (1951), 225—232.

[10) O. SZÁSZ, Über den Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen, Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der Bayerischen Akad. der Wiss., 1922, 135—150.

[11] G. SZEGŐ, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. XXIII. (New-York, 1939).

[12] M. Z. WARASZKIEWITZ, Remarque sur un théoreme de M. Zygmund, Bulletin International de l'Ac. Polonaise Classe Sci. Math. et Nat., 1929, 275—279.

[13] A. ZYGMUND, Remarque sur la convergence absolue des séries de Fourier, *Journal of the London Math. Soc.*, (1928), 194—196.

A HALMAZELMÉLET EGYIK PROBLÉMÁJÁRÓL*

FODOR GÉZA

ERDŐS PÁL vetette fel a következő problémát:[1]

Legyen $\mathfrak{m}$ végtelen kardinális szám, φ az $\mathfrak{m}$ kezdőszáma, $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ a φ-nél kisebb rendszámok halmaza. Legyen továbbá $\mathfrak{n}$ egy $\mathfrak{m}$-nél kisebb kardinális szám. Tegyük fel, hogy S egy adott $\mathfrak{m}$ számosságú halmaz, és hogy $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ minden γ eleméhez hozzá van rendelve S-nek egy $S(\gamma)$ részhalmaza, úgy hogy $\overline{S(\gamma)} < \mathfrak{n}$. Probléma: létezik-e $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-nek olyan $\mathfrak{m}$ számosságú Γ részhalmaza, hogy

$$\overline{S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma)} = \mathfrak{m}?$$

Ha az $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ feltételt az $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}$ feltétellel helyettesítjük, akkor a válasz általában negatív. Valóban, legyen $S = \Gamma_{\mathfrak{m}}$ és $S(\gamma)$ a γ-nál kisebb rendszámok halmaza. Nyilvánvaló, hogy $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-nek minden $\mathfrak{m}$ számosságú Γ részhalmazára

$$S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma) = 0.$$

ERDŐS PÁL a kontinuum-hipotézis feltételezésével bebizonyította, hogy a problémára a válasz pozitív.[2]

Jelen dolgozat az általánosított kontinuum-hipotézis felhasználása nélkül bizonyítja be, hogy a problémára a válasz pozitív.[3]

1. LEMMA. *Legyen $\mathfrak{q}$ reguláris kardinális szám $\mathfrak{p}$ egy $\mathfrak{q}$-nál kisebb kardinális szám és $\Gamma_{\mathfrak{q}}'$ a $\Gamma_{\mathfrak{q}}$-nak $\mathfrak{q}$ számosságú részhalmaza. Ha $\Gamma_{\mathfrak{q}}'$ minden γ eleméhez hozzá van rendelve $\Gamma_{\mathfrak{p}}$-nek egy $g(\gamma)$ eleme, akkor létezik egy π rendszám, $\pi \in \Gamma_{\mathfrak{p}}$ és $\Gamma_{\mathfrak{q}}'$-nak egy $\mathfrak{q}$ számosságú Γ részhalmaza úgy, hogy Γ minden γ elemére $g(\gamma) < \pi$.*

BIZONYÍTÁS. Jelöljük $H(\alpha)$-val minden α rendszámra, $\alpha \in \Gamma_{\mathfrak{p}}$, azon γ elemek halmazát, $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{q}}'$, amelyekre $g(\gamma) = \alpha$. Nyilvánvaló, hogy

$$\Gamma_{\mathfrak{q}}' = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_{\mathfrak{p}}} H(\alpha).$$

* E dolgozat tartalma „On a problem in the set theory" címmel megjelenés alatt áll: Acta Sci. Math., **15** (1954), 240—242.

[1] Irásbeli közlés.

[2] P. ERDŐS, Some remarks on set theory III, *Michigan Math. Journal*, **2** (1953—54), 51—57.

[3] Köszönetet mondok ERDŐS PÁL-nak és L. GILLMAN-nak, akik, miután ennek a dolgozatnak egy előző kéziratát olvasták, bizonyításomat egyszerűsítették.

Mivel $\mathfrak{p}<\mathfrak{q}$ és $\mathfrak{q}$ reguláris kardinális szám, azért létezik olyan π' rendszám, $\pi'\in\Gamma_{\mathfrak{p}}$, amelyre $H(\pi')=\mathfrak{q}$. Legyen $\Gamma=H(\pi')$ és $\pi=\pi'+1$, a $H(\alpha)$ definíciója szerint a lemma teljesül.

Jelöljük $\mathfrak{r}^*$-gal tetszőleges $\mathfrak{r}$ kardinális szám esetén azt a legkisebb kardinális számot, amelyre $\mathfrak{r}$ előállítható $\mathfrak{r}^*$ számú $\mathfrak{r}$-nél kisebb kardinális szám összegeként.

2. LEMMA. *Legyen* $\mathfrak{a}$ *végtelen szinguláris kardinális szám,* $\mathfrak{b}$ *pedig egy* $\mathfrak{a}$*-nál kisebb reguláris kardinális szám. Ha* $\mathfrak{b}>\mathfrak{a}^*$ *és* $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ *minden* γ *elemének megfelel egy* $h(\gamma)$ *rendszám,* $h(\gamma)\in\Gamma_{\mathfrak{b}}$, *akkor létezik* $\Gamma_{\mathfrak{b}}$*-nek egy* π *eleme és* $\Gamma_{\mathfrak{a}}$*-nak egy* $\mathfrak{a}$ *számosságú* Γ *részhalmaza úgy, hogy* Γ*-nak minden* γ *elemére* $h(\gamma)<\pi$.

BIZONYÍTÁS. Legyen μ az $\mathfrak{a}^*$ kezdőszáma. Létezik reguláris kardinális számoknak olyan μ típusú $\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\dots,\mathfrak{a}_\xi,\dots,$ $(\xi<\mu)$ sorozata, hogy $\mathfrak{a}_\beta>\mathfrak{a}_\alpha$, ha $\beta>\alpha$, $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}_\xi<\mathfrak{a}$ minden μ-nél kisebb ξ rendszámra és

$$\mathfrak{a}=\sum_{\xi<\mu}\mathfrak{a}_\xi .$$

Az 1. lemma szerint minden μ-nél kisebb ξ rendszámhoz található olyan π_ξ rendszám, $\pi_\xi\in\Gamma_{\mathfrak{b}}$, hogy létezik $\Gamma_{\mathfrak{a}_\xi}$-nek $\mathfrak{a}_\xi$ számú olyan γ eleme, amelyre $h(\gamma)<\pi_\xi$. Valóban, legyen $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}_\xi$, $\mathfrak{p}=\mathfrak{b}$ és $g(\gamma)=h(\gamma)$ a $\Gamma_{\mathfrak{a}_\xi}$-n. Mivel $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}_\xi$ és $\mathfrak{a}_\xi$ reguláris kardinális szám, azért az 1. lemma feltételei teljesülnek. Ezért létezik $\Gamma_{\mathfrak{b}}$-nek olyan π_ξ eleme és $\Gamma_{\mathfrak{a}_\xi}$-nek olyan $\mathfrak{a}_\xi$ számosságú Γ_ξ részhalmaza, hogy Γ_ξ minden γ elemére $g(\gamma)=h(\gamma)<\pi_\xi$.

Mivel $\mathfrak{a}^*<\mathfrak{b}$ és $\mathfrak{b}$ reguláris kardinális szám, azért létezik $\Gamma_{\mathfrak{b}}$-nek olyan π eleme, hogy $\pi_\xi<\pi$ minden ξ-re, $0<\xi<\mu$. Legyen

$$\Gamma=\bigcup_{\xi<\mu}\Gamma_\xi .$$

Nyilvánvaló, hogy Γ számossága $\mathfrak{a}$. Ha $\gamma\in\Gamma$, akkor valamely μ-nél kisebb ξ_0 rendszámra $\gamma\in\Gamma_{\xi_0}$. A Γ_ξ definíciója szerint $h(\gamma)<\pi_{\xi_0}$. Mivel $\pi_\xi<\pi$, azért a lemmát bebizonyítottuk.

3. LEMMA. *Legyen* $\mathfrak{m}$ *reguláris kardinális szám,* $\mathfrak{n}$ *egy* $\mathfrak{m}$*-nél kisebb szinguláris kardinális szám és* S *egy* $\mathfrak{m}$ *számosságú halmaz. Ha* $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ *minden* γ *eleméhez hozzá van rendelve* S*-nek egy* $S(\gamma)$ *részhalmaza úgy, hogy* $\overline{\overline{S(\gamma)}}<\mathfrak{n}$, *akkor van olyan* $\mathfrak{n}$*-nél kisebb* $\mathfrak{n}_0$ *reguláris kardinális szám és* $\Gamma_{\mathfrak{m}}$*-nek olyan* $\mathfrak{m}$ *számosságú* G *részhalmaza, hogy ha* $\gamma\in G$, *akkor*

$$S(\gamma)<\mathfrak{n}_0 .$$

BIZONYÍTÁS. Legyen ψ az $\mathfrak{n}^*$ kezdőszáma. Létezik reguláris kardinális számoknak olyan ψ típusú $\mathfrak{n}_1,\mathfrak{n}_2,\dots,\mathfrak{n}_\xi,\dots$ $(\xi<\psi)$ sorozata, hogy $\mathfrak{n}_\beta>\mathfrak{n}_\alpha$, ha $\beta>\alpha$, $\mathfrak{n}^*<\mathfrak{n}_\xi<\mathfrak{n}$ minden ψ-nél kisebb ξ rendszámra és

$$\mathfrak{n}=\sum_{\xi<\psi}\mathfrak{n}_\xi .$$

Bontsuk fel $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-et a $\Gamma^{(\xi)}$ $(\xi < \psi)$ halmazok összegére a következő módon: $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-nek γ eleme akkor és csak akkor tartozzék $\Gamma^{(\xi)}$-hez, ha $\overline{S(\gamma)} < \mathfrak{n}_\xi$. Mivel $\mathfrak{m}$ reguláris, azért van olyan ξ_0 rendszám, $\xi_0 < \psi$, amelyre $\overline{\Gamma^{(\xi_0)}} = \mathfrak{m}$. Legyen $G = \Gamma^{(\xi_0)}$ és $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_{\xi_0}$.

TÉTEL. *Legyen S egy $\mathfrak{m}$ számosságú halmaz, $\mathfrak{m} > \aleph_0$, és $\mathfrak{n}$ egy $\mathfrak{m}$-nél kisebb kardinális szám. Ha $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ minden γ eleméhez hozzá van rendelve S-nek egy $S(\gamma)$ részhalmaza úgy, hogy $\overline{\overline{S(\gamma)}} < \mathfrak{n}$, akkor létezik $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-nek olyan $\mathfrak{m}$ számosságú Γ részhalmaza, amelyre*

$$\overline{\overline{S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma)}} = \mathfrak{m}.$$

BIZONYÍTÁS. Ha van olyan $\mathfrak{s}$ reguláris kardinális szám, amelyre $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{s} < \mathfrak{m}$, akkor jelöljön $\mathfrak{s}_0$ reguláris $\mathfrak{m}$ esetén tetszőleges, szinguláris $\mathfrak{m}$ esetén $\mathfrak{m}^*$-nál nagyobb olyan reguláris kardinális számot, amelyre $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{s}_0 < \mathfrak{m}$. Ha nincs olyan $\mathfrak{s}$ reguláris kardinális szám, amelyre $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{s} < \mathfrak{m}$, akkor $\mathfrak{n}$ nyilvánvalóan szinguláris és $\mathfrak{m}$ reguláris kardinális szám. A 3. lemma szerint létezik ekkor olyan $\mathfrak{n}_0$ reguláris kardinális szám, $\mathfrak{n}_0 < \mathfrak{n}$, és $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-nek olyan $\mathfrak{m}$ számosságú G részhalmaza, hogy ha $\gamma \in G$, akkor $\overline{\overline{S(\gamma)}} < \mathfrak{n}_0$.

Legyen $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_0$ és $G' = \Gamma_{\mathfrak{m}}$, ha van olyan $\mathfrak{s}$ reguláris kardinális szám, amelyre $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{s} < \mathfrak{m}$; ha nincs ilyen $\mathfrak{s}$, akkor legyen $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{n}_0$ és $G' = G$.

Bontsuk fel S-et $\mathfrak{s}_1$ számú páronként idegen $\mathfrak{m}$ számosságú $M_\varkappa$ halmaz összegére,

$$S = \bigcup_{\varkappa \in \Gamma_{\mathfrak{s}_1}} M_\varkappa.$$

Mivel $\overline{\overline{S(\gamma)}} < \mathfrak{s}_1$ $(\gamma \in G')$ és $\mathfrak{s}_1$ reguláris kardinális szám, azért létezik olyan $f(\gamma)$ $(\gamma \in G')$ rendszám, $f(\gamma) \in \Gamma_{\mathfrak{s}_1}$, hogy minden $f(\gamma)$-nál nagyobb $\varkappa$-ra $(\varkappa \in \Gamma_{\mathfrak{s}_1})$ $S(\gamma) \cap M_\varkappa$ üres. Reguláris $\mathfrak{m}$ esetén az 1. lemmát $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{s}_1$, $\Gamma'_{\mathfrak{q}} = G'$, $g(\gamma) = f(\gamma)$ mellett, szinguláris $\mathfrak{m}$ esetén a 2. lemmát $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{s}_1$, $h(\gamma) = f(\gamma)$ mellett alkalmazva következik, hogy létezik olyan π rendszám, $\pi \in \Gamma_{\mathfrak{s}_1}$, és G'-nek olyan $\mathfrak{m}$ számosságú Γ részhalmaza, hogy Γ-nak minden γ elemére $f(\gamma) < \pi$, innen

$$\bigcup_{\pi \leq \varkappa \in \Gamma_{\mathfrak{s}_1}} M_\varkappa \subseteq S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma),$$

azaz

$$\overline{\overline{S - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} S(\gamma)}} = \mathfrak{m}.$$

SZINGULÁRIS INTEGRÁLOK KONVERGENCIÁJÁRÓL

TANDORI KÁROLY

Bemutatta Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag az 1954. november 12-én tartott felolvasó ülésen

1. §. Bevezetés

Még H. LEBESGUE [3] vetette fel a következő problémát: mi annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy egy adott függvényosztály minden olyan $f(t)$ függvényét, amelynek az $x=x_0$ pont bizonyos típusú pontja, a

$$\Phi_n(f;x)=\int_a^b f(t)\,\varphi_n(x;t)\,dt \qquad (n=1,2,\ldots)$$

szinguláris integrál az $x=x_0$ pontban előállítsa, vagyis hogy minden ilyen függvényre teljesüljön a

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f;x_0)=f(x_0)$$

reláció. Ezt a problémát az L függvényosztály és a Lebesgue-pontok esetére D. K. FAGYEJEV [2] oldotta meg. Tételét később Sz. G. KREJN és a B. JA. LEVIN [5] a Banach-terek elméletének módszereivel egyszerűbben bebizonyították. Majd B. I. KORENBLJUM, Sz. G. KREJN és B. JA. LEVIN [4] a Lebesgue-féle problémát megoldották az $L^p(p>1)$ függvényosztály és a p-edrendű Lebesgue-pontok esetén is.

Ebben a dolgozatban a Banach-terek elméletének módszereivel egy másik — a fenti szerzőkétől különböző — szükséges és elegendő feltételt adunk az $L^p(p\geqq 1)$ függvényosztályok függvényeinek p-edrendű Lebesgue-pontban való előállíthatóságára. Feltételünkből könnyen nyerhető D. K. FAGYEJEV említett tétele és egy további tétel, amely ugyancsak L osztálybeli függvényeknek Lebesgue-pontban való előállíthatóságára vonatkozik.

A következőkben az $a=0$, $b=1$, $x_0=0$ esetre szorítkozunk; az általános eset erre könnyen visszavezethető.[1])

2. §. Segédtétel

Legyen p egy rögzített kitevő: $p\geqq 1$ és jelölje L_0^p azoknak az $f(t)\in L^p[0,1]$ függvényeknek az osztályát, amelyek az $x=0$ pontban 0-val egyenlők és amelyeknek az $x=0$ pontban p-edrendű Lebesgue-pontjuk van,

[1]) Hálás köszönetemet fejezem ki Sz.-NAGY BÉLA professzor úrnak, aki e dolgozat elkészítése közben munkámban értékes megjegyzéseivel támogatott.

azaz

$$f(0)=0 \text{ és } \int_0^h |f(t)|^p\,dt = o(h) \qquad (0<h\to 0).$$

Az

(1) $$\|f\|_0^{(p)} = \sup_h \left\{ \frac{1}{h}\int_0^h |f(t)|^p\,dt \right\}^{1/p} \qquad (0<h\leq 1)$$

normálással L_0^p Banach-féle tér.[2])

Legyen $\varphi(t)$ a $[0,1]$ intervallumon értelmezett mérhető függvény és tekintsük a

(2) $$\Phi(f) = \int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

függvényoperációt. Tegyük fel, hogy $\Phi(f)$ az L_0^p térben *mindenütt értelmezve van és véges értékű*, azaz a fenti integrál minden $f(t)\in L_0^p$ függvényre Lebesgue-értelemben létezik és véges. Ekkor a (2) integrál minden olyan $f(t)$ függvényre létezik, amely a $[0,\eta]$ $(0<\eta<1)$ intervallumban 0-val egyenlő és az $[\eta,1]$ intervallumon az $L^p[\eta,1]$ osztályba tartozik. Mint ismeretes, ebből következik, hogy $\varphi(t)$ minden $[\eta,1]$ $(0<\eta<1)$ intervallumon az $L^q[\eta,1]$

[2]) L. pl. B. I. KORENBLJUM, SZ. G. KREJN és B. JA. LEVIN [4]. Csak az L_0^p tér teljességét kell részletesebben megmutatni. Legyen $f_n(t)\in L_0^p$ $(n=1,2,\dots)$ egy Cauchy-sorozat: $\|f_m-f_n\|_0^{(p)}\to 0$ $(m,n\to\infty)$. Akkor (1) alapján

$$\int_0^1 |f_m(t)-f_n(t)|^p\,dt \to 0 \qquad (m,n\to\infty)$$

és így létezik olyan $f_{n_k}(t)$ részsorozat, amely majdnem mindenütt konvergál egy $f(t)$ határfüggvényhez; nyilvánvaló, hogy $f(0)=0$. Legyen ε tetszőleges pozitív szám és $0<h\leq 1$. Ha n és n_k elég nagy, akkor a feltevés miatt

$$\left\{\frac{1}{h}\int_0^h |f_{n_k}(t)-f_n(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} \leq \|f_{n_k}-f_n\|_0^{(p)} < \varepsilon.$$

Ebből a Fatou-féle lemma alkalmazásával adódik, hogy

$$\left\{\frac{1}{h}\int_0^h |f(t)-f_n(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} \leq \varepsilon \qquad (n>N(\varepsilon)).$$

Tehát $\|f-f_n\|_0^{(p)}\to 0$ $(n\to\infty)$. Továbbá

$$\left\{\frac{1}{h}\int_0^h |f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} \leq \left\{\frac{1}{h}\int_0^h |f(t)-f_n(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} + \left\{\frac{1}{h}\int_0^h |f_n(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \|f-f_n\|_0^{(p)} + \left\{\frac{1}{h}\int_0^h |f_n(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}.$$

Ebből nyilvánvaló, hogy az $f(t)$ függvénynek az $x=0$ pontban p-edrendű Lebesgue-pontja van. Ezzel az L_0^p tér teljességét bebizonyítottuk.

$(q = p\,(p-1))$ osztályba tartozik és így a

$$\Phi_\eta(f) = \int_\eta^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

függvényoperáció minden rögzített η mellett az L_0^p térben korlátos:

$$|\Phi_\eta(f)| = \left|\int_\eta^1 \varphi(t) f(t)\,dt\right| \leqq \left\{\int_\eta^1 |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q} \left\{\int_0^1 |f(t)|^p dt\right\}^{1/p} \leqq$$

$$\leqq \left\{\int_\eta^1 |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q} \|f\|_0^{(p)}.^{3)}$$

Mivel minden $f(t) \in L_0^p$ függvényre

$$\lim_{\eta\to 0} \Phi_\eta(f) = \Phi(f)$$

és $\Phi(f)$ véges, ezért a Banach—Steinhaus-féle tétel szerint $\Phi(f)$ L_0^p-ben lineáris függvényoperáció. A következőkben $\Phi(f)$ normáját $\|\Phi\|_0^{(p)}$-vel jelöljük:

$$\|\Phi\|_0^{(p)} = \sup_f |\Phi(f)| \qquad (f \in L_0^p,\ \|f\|_0^{(p)} \leqq 1).$$

SEGÉDTÉTEL. *Fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$4^{-1/p} A(p) \leqq \|\Phi\|_0^{(p)} \leqq A(p),$$

ahol

$$A(p) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m/p} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q}.$$

BIZONYÍTÁS. Ha $f(t) \in L_0^p$ és $\|f\|_0^{(p)} \leqq 1$, akkor

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt\right| \leqq \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f(t)\,\varphi(t)|\,dt \leqq \sum_{m=0}^{\infty} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f(t)|^p dt\right\}^{1/p} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi(t)|^q dt\right\}^{1/q},$$

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f(t)|^p dt \leqq \frac{1}{2^m}\left\{2^m \int_0^{2^{-m}} |f(t)|^p dt\right\} \leqq \frac{1}{2^m},$$

és így $\|\Phi\|_0^{(p)} \leqq A(p)$.

[3]) A $p = 1$, $q = \infty$ határesetben az

$$\left\{\int_\alpha^\beta |h(t)|^q dt\right\}^{1/q}$$

integrál a

$$\lim_{r\to\infty} \left\{\int_\alpha^\beta |h(t)|^r dt\right\}^{1/r} = \operatorname{vrai\,max}_{\alpha\leqq t\leqq\beta} |h(t)|$$

határértéket jelenti.

Legyen ε tetszőleges pozitív szám. Mint ismeretes, minden m természetes számhoz létezik egy a $(2^{-m-1}, 2^{-m})$ intervallumon értelmezett $f_m(t)$ függvény, amelyre

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f_m(t)|^p\,dt = 1, \quad \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} f_m(t)\,\varphi(t)\,dt \geqq \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi(t)|^q\,dt\right\}^{1/q} - \varepsilon.\text{[4]}$$

Legyen

$$f^*(t) = 2^{-m/p} f_m(t), \quad \text{ha} \quad t \in (2^{-m-1}, 2^{-m}) \qquad (m, = 0, 1, \ldots).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\Phi(f^*) \geqq A(p) - \frac{1}{1-2^{-1/p}}\,\varepsilon. \tag{3}$$

Legyen $0 < h \leqq 1$ és jelölje $k = k(h)$ azt a természetes számot, amelyre $2^{-k-1} < h \leqq 2^{-k}$. $f^*(t)$ definíciója szerint

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f^*(t)|^p\,dt \leqq 2^{k+1}\int_0^{2^{-k}} |f^*(t)|^p\,dt = 2^{k+1}\sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m}\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |f_m(t)|^p\,dt = 4$$

és így

$$\|f^*\|_0^{(p)} \leqq 4^{1/p}.$$

Ebből és (3)-ból következik, hogy

$$\|\Phi\|_0^{(p)} \geqq 4^{-1/p} A(p).$$

Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

3. §. Tételek szinguláris integrálokra

Tekintsük a

$$\Phi_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\varphi_n(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

szinguláris integrált; tegyük fel, hogy $\Phi_n(f)$ *minden n-re L_0^p-ben mindenütt értelmezve van és véges.* Ekkor $\Phi_n(f)$ minden n-re L_0^p-ben lineáris függvény-operáció.

A segédtétel szerint

$$4^{-1/p} A_n(p) \leqq \|\Phi_n\|_0^{(p)} \leqq A_n(p) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

ahol

$$A_n(p) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m/p}\left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q\,dt\right\}^{1/q} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

[4]) L. pl. S. Banach [1], 61—65.

I. TÉTEL. *Ahhoz, hogy minden $f(t)\in L^p[0,1]$ függvényre, amelynek az $x=0$ pont p-edrendű Lebesgue-pontja, fennálljon a*

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f)=f(0) \tag{7}$$

reláció szükséges és elegendő, hogy

1. *minden η-ra $(0<\eta\leqq 1)$ teljesüljön a*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\eta}\varphi_n(t)\,dt=1$$

feltétel és

2. *a* (6) *alatti $A_n(p)$ értékek egy n-től független $K=K(p)$ állandó alatt maradjanak.*[5])

SZÜKSÉGESSÉG. Az 1. feltétel szükségessége nyilvánvaló. 2. szükségessége a következő módon látható be. (7) szerint minden $f(t)\in L_0^p$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f)=f(0)=0.$$

Mivel a $\Phi_n(f)$ függvényoperációk az L_0^p Banach-térben korlátosak, ezért a Banach—Steinhaus-féle tétel szerint normáik korlátosak és így az (5) egyenlőtlenség alapján adódik, hogy az $A_n(p)$ értékek is egy n-től független korlát alatt maradnak.

ELEGENDŐSÉG. Tegyük fel, hogy az $f(t)\in L[0,1]$ függvénynek az $x=0$ pontban p-edrendű Lebesgue pontja van. Az 1. feltétel szerint

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)\varphi_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^1[f(t)-f(0)]\varphi_n(t)\,dt+f(0),$$

ezért elegendő a (7) relációt az $f(0)=0$ esetben, vagyis az L_0^p osztály függvényeire bebizonyítani.

Legyen $f(t)\in L_0^p$ és ε tetszőleges pozitív szám. Ekkor elég kis $h(>0)$-ra

$$\left\{\frac{1}{h}\int_0^h|f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}<\frac{\varepsilon}{K}. \tag{8}$$

[5]) B. I. KORENBLJUM, SZ. G. KREJN és B. JA. LEVIN tételében (lásd [4]), a 2. feltétel helyett a $\|\Phi_n\|_0^{(p)}<K$ $(n=1,2,\ldots)$ feltétel szerepel. Ezek a szerzők a $\|\Phi_n\|_0^{(p)}$ $(p>1)$ norma pontos értékét is meghatározták:

$$\|\Phi_n\|_0^{(p)}=\int_0^1[-\psi_n'(t)]^{q}\,dt,$$

ahol $\psi_n(t)$ az a legnagyobb konvex függvény, amelyre teljesül a

$$\psi_n(t)<F_n(t)=\int_t^1|\varphi_n(y)|^q\,dy \qquad (0<t<1)$$

egyenlőtlenség.

Legyen m_0 olyan nagy természetes szám, hogy a (8) egyenlőtlenség teljesüljön, valahányszor $0 < h \leqq 2^{-m_0}$. Írjuk fel a (4) szinguláris integrált a következő alakban:

$$\Phi_n(f) = \int_0^1 f(t)\varphi_n(t)dt = \left(\int_0^{2^{-m_0}} + \int_{2^{-m_0}}^1\right) f(t)\varphi_n(t)\,dt = I_1^{(n)} + I_2^{(n)}.$$

Legyen

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t), & \text{ha } t \in [0, 2^{-m_0}], \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $\|f^*\|_0^{(p)} < \varepsilon/K$. Így az (5) egyenlőtlenség és a 2. feltétel szerint

$$(9) \qquad |I_1^{(n)}| = \left|\int_0^{2^{-m_0}} f(t)\varphi_n(t)dt\right| = \left|\int_0^1 f^*(t)\varphi_n(t)dt\right| \leqq \|\Phi_n\|_0^{(p)} \|f^*\|_0^{(p)} < \varepsilon.$$

A Minkowski-féle egyenlőtlenség alkalmazásával a 2. feltétel alapján adódik, hogy

$$(10) \qquad \left\{\int_{2^{-m_0}}^1 |\varphi_n(t)|^q dt\right\}^{1/q} \leqq \sum_{m=0}^{m_0-1} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q dt\right\}^{1/q} \leqq$$

$$\leqq (2^{m_0-1})^{1/p} \sum_{m=0}^{m_0-1} 2^{-m/p} \left\{\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q dt\right\}^{1/q} \leqq (2^{m_0-1})^{1/p} A_n(p) \leqq (2^{m_0-1})^{1/p} K.$$

Továbbá az 1. feltétel szerint minden $h(t)$ lépcsős függvényre

$$\lim_{n\to\infty} \int_{2^{-m_0}}^1 h(t)\varphi_n(t)dt = 0,$$

ahonnan (10) alapján nyerjük, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{2^{-m_0}}^1 f(t)\varphi_n(t)dt = 0.$$

Tehát elég nagy n-re $|I_2^{(n)}| < \varepsilon$ és így (9) miatt elég nagy n-re $|\Phi_n(f)| < 2\varepsilon$. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(f) = 0$. Ezzel az I. tételt bebizonyítottuk.

Az I. tételből következik a

II. TÉTEL. (D. K. FAGYEJEV [2].) *Ahhoz, hogy a* (7) *reláció minden olyan* $f(t) \in L[0, 1]$ *függvényre fennálljon, amelynek az* $x = 0$ *pontban Lebesgue-pontja van, szükséges és elegendő, hogy teljesüljön az* I. *tétel* 1. *feltétele és minden n-re fennálljon az*

$$\int_0^1 \psi_n(t)dt < M(< \infty)$$

egyenlőtlenség, ahol

$$\psi_n(t) = \operatorname*{vrai\,max}_{t \leq y \leq 1} |\varphi_n(y)| \qquad (0 < t \leqq 1).$$

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{1}{2} A_n(1) \leqq \int_0^1 \psi_n(t)dt \leqq A_n(1) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ebből az I. tétel alkalmazásával adódik az állítás. A $\psi_n(t)$ függvény definíciója szerint

$$\int_0^1 \psi_n(t)\,dt \geqq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \psi_n(t)\,dt \geqq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m-1} \operatorname*{vrai\,max}_{2^{-m} \leqq t \leqq 2^{-m+1}} |\varphi_n(t)| = \frac{1}{2} A_n(1).$$

Másrészről minden m-re

$$\int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \psi_n(t)dt \leqq 2^{-m-1} \sum_{\mu=0}^{m} \operatorname*{vrai\,max}_{2^{-\mu-1} \leqq t \leqq 2^{-\mu}} |\varphi_n(t)|$$

és így

$$\int_0^1 \psi_n(t)dt = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \psi_n(t)\,dt \leqq \sum_{\mu=0}^{\infty} \operatorname*{vrai\,max}_{2^{-\mu-1} \leqq t \leqq 2^{-\mu}} |\varphi_n(t)| \left\{ \sum_{m=\mu}^{\infty} 2^{-m-1} \right\} = A_n(1).$$

Az I. tétel felhasználásával bebizonyítható a

III. TÉTEL. *Ahhoz, hogy a* (7) *reláció minden olyan* $f(t) \in L[0, 1]$ *függvényre teljesüljön, amelynek az* $x = 0$ *pontban Lebesgue-pontja van, szükséges és elegendő, hogy*

a) *a* (7) *reláció minden* $L_0^p (p > 1)$ *függvényosztály minden* $f(t)$ *függvényére teljesüljön és*

b) *a* $\| \Phi_n \|_0^p (p > 1)$ *normák* p*-től és* n*-től független korlát alatt maradjanak.*

SZÜKSÉGESSÉG. Ha $p > 1$, akkor $L_0^p \subset L_0^1$ és $\| \Phi_n \|_0^p \leqq \| \Phi_n \|_0^{(1)}$, amiből a tétel feltételeinek szükségessége nyilvánvaló.

ELEGENDŐSÉG. a) miatt az I. tétel 1. feltétele teljesül. Továbbá minden természetes k-ra érvényes a következő becslés:

$$\sum_{m=0}^{k} 2^{-m} \operatorname*{vrai\,max}_{2^{-m-1} \leqq t \leqq 2^{-m}} |\varphi_n(t)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{k} \left| 2^{-m} \operatorname*{vrai\,max}_{2^{-m-1} \leqq t \leqq 2^{-m}} |\varphi_n(t)| - 2^{m/p} \left\{ \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q\,dt \right\}^{1/q} \right| + A_n(p).$$

Ha $p \to 1$, azaz ha $q \to \infty$, akkor a jobboldali összeg minden tagja 0-hoz tart és így elég kis $(p-1)$-re

$$\sum_{m=0}^{k} 2^{-m} \operatorname*{vrai\,max}_{2^{-m-1} \leq t \leq 2^{-m}} |\varphi_n(t)| \leq 1 + A_n(p).$$

Mivel k tetszőleges, ezért az $A_n(1)$ értékek b) és (5) szerint n-től független korlát alatt maradnak. Így az I. tétel alkalmazásával adódik a III. tétel feltételeinek elegendősége.

IRODALOM

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires,* Warszawa, 1932.

[2] D. K. Fagyejev, Sur la représentation des fonctions sommables au moyen d'intégrales singulières, *Recueil math. Moscou (Mat. Sbornik),* 1(43) (1936), 351—368.

[3] H. Lebesgue, Sur les intégrales singulières, *Annales de Toulouse,* 1(1900), 25—117.

[4] Б. И. Коренблюм, С. Г. Крейн и Б. Я. Левин, О некоторых нелинейных вопросах теории сингулярных интегралов, Доклады Акад. Наук СССР, **62** (1948), 17—20.

[5] С. Г. Крейн и Б. Я. Левин, О силной иредставимости функций сингулярными интегралами, Доклады Акад. Наук СССР, **60** (1948), 195—198.

KIVONATOK*

Abel-féle p-csoportok felbonthatósága ciklikus csoportok direkt összegére

Kertész Andor

A következő tételt bizonyítja be.

Egy tetszőleges számosságú Abel-féle p-csoport akkor és csakis akkor bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére, ha

1. nem tartalmaz végtelen magasságú elemeket, azaz egyetlen nemzérus a csoportelemre sem oldható meg a $p^k x = a$ egyenlet tetszőlegesen nagy k-ra,

2. tartalmaz olyan maximális lineárisan független rendszert, amelynek egyetlen eleme sem helyettesíthető egy nálánál nagyobb magasságú elemmel a rendszer függetlenségének megsértése nélkül.

Ebből a tételből következik néhány igen fontos felbontási tétel. Így pl. BAER azon tétele, hogy ha egy Abel-csoport korlátos elemrendű, akkor felbontható ciklikus csoportok direkt összegére, továbbá KULIKOV szovjet matematikusnak az a fontos tétele, hogy egy G Abel-féle p-csoport akkor és csakis akkor bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére, ha G előállítható olyan növekvő alcsoportlánc egyesítéseként, ahol az egyes alcsoportokban az elemek korlátos magasságúak. Végül következik PRÜFERnek egy nevezetes tétele, amely szerint egy megszámlálható Abel-csoport felbontható ciklikus csoportok direkt összegére, hacsak nem tartalmaz végtelen magasságú elemet.

Ciklikus csoportok direkt összege

Fuchs László

Ez a dolgozat továbbfejleszti a KERTÉSZ által kapott feltételt p-csoportokról tetszőleges Abel-féle csoportokra.

A G Abel-csoport B részhalmazát bázisnak nevezzük, ha G a B elemei által generált ciklikus csoportok direkt összege. A bázisnak a következő két alaptulajdonsága van:

1. maximális lineárisan független rendszer és

2. minimális generátorrendszer G-ben.

E két feltétel együtt jellemzi a bázist, de külön-külön már nem. A dolgozat, bevezetve a végtelenrendű elemek közt a „relatív rend“ fogalmát, kimutatja a következő két duál tételt:

* Ezen dolgozatok idegen nyelven az Acta Math. Acad. Sci. Hung.-ban jelentek meg.

1. G-nek egy maximális lineárisan független rendszere akkor és csakis akkor bázisa G-nek, ha e rendszer egyetlen eleme sem helyettesíthető egy relatíve nagyobb rendű elemmel a rendszer függetlenségének megsértése nélkül;

2. G-nek egy minimális generátorrendszere akkor és csakis akkor bázisa G-nek, ha a rendszer egyetlen eleme sem helyettesíthető egy relatíve kisebb rendű elemmel úgy, hogy újból generátorrendszert kapjunk.

Az 1. tételből azonnal következik KERTÉSZ eredménye, és így ennek következményei is. Segítségével esetszétválasztás nélküli bizonyítás adható KULIKOV azon érdekes tételére is, hogy ciklikus csoportok direkt összegére bontható csoport minden alcsoportja is ciklikus csoportok direkt összegére bontható csoport. A tételből néhány új eredmény is adódik, így pl.: ha nG valamilyen n természetes egészre ciklikus csoportok direkt összege, akkor maga G is ilyen tulajdonságú, s megoldható segítségével a következő bővítésprobléma is: ha A és B ciklikus csoportok direkt összege, mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy A-nak B-vel való minden Abel-féle bővítése ismét ciklikus csoportok direkt összegére bontható csoport legyen?

Teljesen reducibilis Abel-féle torzió-csoportok

Kertész Andor

A G Abel-féle csoportot teljesen reducibilisnek mondjuk, ha felbontható direkt felbonthatatlan csoportok direkt összegére. A direkt felbonthatatlan Abel-féle torzió-csoportok a prímhatványrendű ciklikus csoportok és a PRÜFER-féle p^{∞} típusú csoportok. E dolgozat KERTÉSZ már ismertetett dolgozatának eredményeit általánosítja, bevezetve a „külső" és „belső végtelen magasságú" elem fogalmát. Teljesen analóg feltételt kap: a tételben csupán végtelen magasságú elem hiánya helyett külső végtelen magasságú elem nem-létezését kell megkövetelni.

Ezen eredményből következik az, hogy ha egy Abel-csoportban a véges magasságú elemek magassága egy fix korlát alatt marad, akkor a csoport teljesen reducibilis. KULIKOV és PRÜFER említett tételeinek is van analogonja ebben az esetben.

Féligegyszerű gyűrűkről

Fuchs László és Szele Tibor

Féligegyszerűnek nevezik azokat a gyűrűket, amelyekben a minimumfeltétel érvényes a balideálokra és nincsenek nilpotens balideálok. WEDDERBURN és ARTIN nevezetes tétele értelmében ezek a gyűrűk azáltal is jellemezhetők, hogy véges sok minimális balideál direkt összegeként állíthatók elő. A dolgozat első része két újabb jellemző tulajdonságát adja a féligegyszerű gyűrűknek:

1. minden balideál egy idempotens elemmel generálható,

2. minden balideálnak van jobbegysége.

E karakterizálásnak egyik érdekessége, hogy e feltételek mindegyikéből már következik a minimumfeltétel.

A dolgozat további része analóg problémákat tárgyal. Így pl. kimutatják, hogy egy *R* gyűrű minden balideáljának akkor és csakis akkor van balegysége, ha kétoldali egysége is van és ha *R* véges sok ferdetest direkt összege. Továbbá: *R* minden részgyűrűjének akkor és csakis akkor van balegysége, ha *R* véges sok prímkarakterisztikájú abszolút algebrai test direkt összege.

Tágabb értelmű teljesideálgyűrűk I.

Rédei László

Az ismert Hamilton-féle csoportok gyűrűelméleti analogonjaként szerző korábban meghatározta a teljesideálgyűrűket, így nevezve minden olyan gyűrűt, amelynek összes részmodulusai ideálok. Ha az ideáltulajdonságot csak a részgyűrűktől kívánjuk meg, akkor erre az esetre a tágabb értelmű teljesideálgyűrű elnevezést használjuk. Ezek a gyűrűk is teljesen meghatározhatók. Kiderült, hogy ezeknek minden eleme algebrai, s fokszáma legfeljebb 3, amin azt értjük, hogy minden elem kielégít olyan, legfeljebb 4-fokú egész együtthatós algebrai egyenletet, amelyben a kezdőegyüttható 1 s a konstanstag zérus. A jelenlevő I. közlemény elintézi a problémát az egy elemmel generálható gyűrűk esetére, a leendő II. közlemény az itt tárgyalt speciális eset alapján az általános esetet fogja letárgyalni.

KÖNYVISMERTETÉS

Rédei László „Algebra" című könyvének I. kötete

A modern algebra, amelynek fő feladatát a matematika különféle fejezeteiben és alkalmazásaiban felmerülő fontos algebrai struktúrák tulajdonságainak vizsgálatában, mindenekelőtt pedig ezek szerkezetének feltárásában jelölhetjük meg, meglehetősen fiatal ága a mai matematikának. Speciális algebrai struktúrák vizsgálatával ugyan már a mult század folyamán is behatóbban foglalkoztak, így pl. a racionális számtest végesfokú normális algebrai bővítéseit leíró Galois-elmélettel, a permutáció-csoportoknak ennek nyomán kibontakozó struktúra-vizsgálatával, valamint a végesfokú algebrai számtestek egészei körében végzett oszthatósági vizsgálatok során felmerült ideálelméleti kérdésekkel, — mégis azt kell mondanunk, hogy a mai értelemben vett modern algebra tulajdonképpen a XX. század szülöttje. A mult század kutatásait ugyanis a konkrétság jellemezte, hiányzott belőlük a modern algebra egyik legjellegzetesebb vonása: az absztraktságban megnyilvánuló kellő általánosság, hiszen pl. a csoportelméletet addig legnagyobbrészt a véges permutáció-csoportok elmélete jelentette, s csak a századforduló körül jut központi szerephez egyelőre a véges, majd idővel a tetszésszerinti csoportok különféle tulajdonságainak vizsgálata. Ugyancsak a századforduló idejére esnek WEDDERBURN alapvető struktúra-vizsgálatai a végesrangú algebrákra vonatkozóan, továbbá LASKERnek és MACAULAYnak a polinomideálok felbontásával kapcsolatos eredményei. Az egész legújabb algebra fejlődésének szabott irányt STEINITZ testelméleti munkája (1910), amelyben felállította az izomorfia-elvet, ezáltal egyenes utat mutatva az algebrai kutatások irányának. E — mondhatni — korszakalkotó műnek hatása alatt, E. ARTIN és E. NOETHER úttörő előadásainak felhasználásával írta meg VAN DER WAERDEN Moderne Algebra c. könyvének két kötetét, amely az első nagyobbszabású munka, melyben a modern algebrára oly jellemzővé váló új absztrakt szemléleti mód és probléma-látás érvényesül. E kitűnően megírt s hamarosan nagy népszerűségre szert tett mű hatalmas lendületet adott az algebra fejlődésének, s bár gyors ütemben születtek fontos új eredmények, jóideig senki sem mert vállalkozni arra, hogy egy új egyetemes algebrai könyvet írjon, annyira elképzelhetetlennek tűnt egy jó modern algebrai munka a van der waerdeni mű árnyékában. Az utolsó évtizedben azonban már több országban is megjelent egy-egy nagyobb összefoglaló algebrai munka. Ezek közül kiemelkedik a francia BOURBAKI-iskola hét kötetre rúgó Algèbre-je, amelyben a különböző algebrai struktúráknak az algebra mai fejlődési fokához képest is elég absztrakt, nagy általánosságra törekvő, igen rendszeres elméletét találjuk. Bourbakiék nyomdokait követi PICKERTnek — a terjedelméhez képest meglehetősen nagy anyagot felölelő —

algebrája, amely elég sok rokon vonást mutat a Moderne Algebra I. kötetével is. Megemlítendő még az amerikai N. JACOBSONnak három kötetre tervezett munkája, amelyből eddig még csak két, igen jól sikerült kötet hagyta el a sajtót. Ezek mellé most egy újabb kitűnő munka sorakozik: a magyar modern algebrai iskola fejének, RÉDEI LÁSZLÓnak Algebra I. c. könyve.

RÉDEI két kötetre tervezett algebrájának most megjelent első kötete már terjedelmét tekintve is impozáns mű. Az itt feldolgozott anyag nagyjából VAN DER WAERDEN munkájának első kötetéhez igazodik, amennyiben ebben a kötetben RÉDEI is az absztrakt algebra szempontjából alapvető csoport-, gyűrű- és testelméleti ismereteken kívül a testelmélet különféle fejezeteivel foglalkozik részletesebben. Ennek ellenére RÉDEI munkája mégis lényegesen más, mint VAN DER WAERDENÉ. Az eltérés nem csak abban nyilvánul meg, hogy RÉDEI részletesebben vitatja meg az egyes kérdéseket, feldolgoz sok olyan problémát is, amelyek eddig tankönyvekben nemigen szerepeltek, hanem abban is, hogy tárgyalásmódja sokban különbözik nagynevű elődjéétől. Mindenekelőtt RÉDEI a művelet és az algebrai struktúra általános fogalmából indulva ki, az alapvető algebrai fogalmakat egész általánosságban vezeti be s csak azután konkretizálja őket csoportok, gyűrűk, ill. testek esetére. Így az olvasó előtt párhuzamosan bontakoznak ki a csoport- és a gyűrűelmélet megfelelő fogalmai. Egy másik szembetűnő különbség a két mű között az, hogy RÉDEI sokkal nagyobb teret szentel az általános gyűrű- és testelméleti tételeknek, mint VAN DER WAERDEN.

De vegyük sorra a könyv fejezeteit!

Az első fejezet bevezető jellegű: az algebrai stúdiumokhoz szükséges halmazelméleti alapismeretekkel ismerteti meg az olvasót. A halmaz, függvény, leképezés, reláció, osztályozás, ekvivalencia fogalmainak bevezetése után sor kerül az algebra transzfinit módszereinek tárgyalására (jólrendezési tétel, Zorn-lemma, Tukey-féle lemma stb.), amelyek nélkül ma már a modern algebra elképzelhetetlen. Ez a fejezet — jellegénél fogva — tömörebb s kevésbé részletesen kidolgozott, mint a könyv további fejezetei.

A „Struktúra" c. második fejezetben veszi kezdetét a tulajdonképpeni algebrai ismeretek tárgyalása. A művelet és az operátor fogalmának gondos kidolgozása után rendszeres áttekintést nyerhetünk az algebrában legfontosabbnak bizonyult struktúrákról a félcsoportoktól egészen a testekig. A rendszerezés során RÉDEI bevezet olyan elnevezéseket is, mint pl. a félferdetest fogalma, amelyek eddig nemigen szerepeltek az irodalomban; bár ezek a „félstruktúrák" nem egyszer fordulnak elő az algebrában, behatóbb vizsgálatuk mégsem szükséges, mert nagyrészt visszavezethetők a megfelelő egész struktúrák vizsgálatára (azonban félcsoportoknál nem ez a helyzet). Ezután sorra veszi az említett fontos struktúrákat és részletesen taglalja alapvető tulajdonságaikat. Több olyan alapvető jellegű kérdéssel is foglalkozik, amely tankönyvekben eddig alig szokott szóhoz jutni. Így példát mutat olyan modulusra, amelyre csak oly gyűrű építhető, amelyben bármely két elem szorzata 0, vagy kimutatja, hogy ferdetestekben nincs értelme a kommutátorok vizsgálatának, mivel mind az $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, mind pedig az $\alpha\beta-\beta\alpha$ alakú elemek által generált részferdetest szükségképpen megegyezik az egész ferdetesttel.[1] Az izomorfizmus, homomor-

[1] Talán érdemes lett volna megemlíteni a következő érdekes tényt is: egy K ferdetestnek oly K_1 valódi részferdeteste, melyre $a^{-1}K_1a = K_1$ tetszőleges $a \in K$ esetén, szükségképpen K centrumában van (analógia a normális részcsoportokkal!).

fizmus taglalása után a kompatibilis osztályozás és a faktorstruktúra értelmezését adja a szerző és bebizonyítja az általános homomorfizmus-tételt. A normális részcsoport és az ideál — analóg szerepük kidomborítása céljából — egyszerre kerülnek tárgyalásra. A két izomorfizmus-tételt is igen általánosan, kompatibilis osztályozások segítségével bizonyítja a szerző. ZASSENHAUS lemmájának előrebocsátása után kerül sor a nevezetes Jordan—Hölder—Schreier-tétel bizonyítására.

A következő fejezet az operátorstruktúráknak van szentelve. Az általános fogalommal kapcsolatos megjegyzéseket a legfontosabb speciális esetek: az operátorcsoportok, -modulusok és -gyűrűk sajátságainak diszkussziója követi. Az előző fejezetben már megemlített általános konstrukció-módnak: a lényegileg HAMILTONtól eredő, de tulajdonképpen csak a szerző korábbi vizsgálatai során igazán jelentőssé vált ferdeszorzatnak (mely módszert szolgáltat arra, hogy két (vagy több) struktúrából újabb struktúrát nyerjünk) speciális eseteként taglalja a Schreier-féle bővítéselméletet, külön csoportokra és gyűrűkre. Úgy érezzük, hogy ez a rész sokat nyert volna, ha a szerző kiegészíti egy viszonylag könnyen tárgyalható speciális eset részletes diszkussziójával; így nem maradna a Schreier-féle bővítés egyesek előtt talán mesterkéltnek látszó elméletnek és alkalom lenne konkrétan rámutatni a felmerülő nehézségekre is. Tekintettel arra, hogy e fejezet operátorstruktúrákról szól, úgy hisszük, indokolt lett volna az operátorstruktúrák Schreier-féle bővítését is érinteni. A következő két §-ban az egész algebra szempontjából alapvető fontos fogalmak kerülnek a szerző bonckése alá, nevezetesen a direkt szorzat és a szabad struktúra. Az utóbbihoz kapcsolódik a generátorrendszerrel és definiáló relációkkal megadott struktúra értelmezése. A direkt szorzatnál hiányát érezzük a ma már oly alapvetővé vált szubdirekt szorzat említésének. A vektortér és algebra szokásos fogalma mellett bevezetésre kerülnek a duplavektorterek és a duplaalgebrák is, ahol az alapul vett gyűrű elemei kétoldali operátorként hatnak. Ezen utóbbi, magától a szerzőtől származó fogalomnak szükségességét az indokolja, hogy míg egységelemes algebrák csak kommutatív gyűrűk felett lehetségesek, duplaalgebráknál (pl. gyűrű feletti teljes mátrixgyűrűnél) az alapgyűrű kommutativitása elejthető. A most említett fogalomra épülnek a fejezet hátralévő §-ai. Az E. NOETHERtől származó keresztszorzatnak a szokottnál általánosabb értelmezését követi az ún. monomiális gyűrűk és a polinomgyűrűk ismertetése, majd a lineáris leképzés kapcsán merülnek fel a mátrixok és a lineáris csoportok. A determináns definíciója és alaptulajdonságainak bizonyítása (egészen a Laplace-féle kifejtési tételig) alternáló egységek segítségével történik. A komplex test és a kvaternió-ferdetest vizsgálata zárja be ezt a fejezetet és ezzel a struktúrák általános ismertetését is.

A következőkben RÉDEI az algebra egy-egy konkrét fejezetével foglalkozik. A IV. fejezetben az euklideszi gyűrűket veszi vizsgálat alá, részletesen kidolgozva a nem-kommutatív esetet is. Általános gyűrűk elemeinek oszthatósági problémái ismét elvezetnek az ideál fogalmához. Specializálás révén eljutunk a (bal- s jobboldali) főideálgyűrűkhöz, majd a (bal- s jobboldali) euklideszi gyűrűkhöz. Mint legfontosabb speciális eset, részletes tárgyalásra kerül a racionális egészek gyűrűje, ferdetest feletti polinomgyűrű, valamint az egész kvaterniók gyűrűjének HURWITZtól eredő számelmélete, amely algebrai tankönyvben minden bizonnyal most szerepel először.

A következő fejezetben a véges Abel-csoportok elmélete van kidolgozva. Az alaptétel után szerző a véges Abel-csoportok faktorizációjával kapcsolatos nevezetes Hajós-féle tétel egyszerű bizonyítását közli. A VI. fejezet szorosan kapcsolódik az előbbi témához, amennyiben itt az operátormodulusok elméletét kapjuk. A szokásos bevezető fogalmak ismertetéséhez csatlakozik a kommutatív euklideszi gyűrűk feletti mátrixok determinánsosztóinak és elemi osztóinak, ill. a mátrixok diagonális mátrixszá való átalakításának tárgyalása. Ezek felhasználásával történik a végesen generált Abel-csoportok alaptételének bizonyítása. A következőkben ferdetestnek mint operátortartománynak alapulvétele mellett kerül megvitatásra a lineáris függés, majd a ferdetestben értelmezett lineáris egyenletrendszerek elmélete. Közben a mátrix rangjával kapcsolatos fontos tételek vannak megemlítve.

A VII. fejezetben az R egységelemes kommutatív gyűrűk feletti egy- s többváltozós polinomgyűrűk elméletével ismerkedik meg az olvasó. A fejezetet McCoy azon tétele vezeti be, mely szerint az $f(x)$ nullosztó polinomot már valamely R-beli nem-zérus elem is annullálja. Most következik annak diszkussziója, hogy egy polinom deriváltja mikor 0, továbbá a többszörös gyökök vizsgálata. A szimmetrikus polinomok alaptételének alkalmazásaként a rezultánst és a diszkriminánst, valamint a k-adik hatványösszegre vonatkozó formulát mutatja be szerző. A következőkben részletesen taglalja a kommutatív euklideszi gyűrű feletti polinomgyűrűk ideáljainak Kronecker—Henseltől eredő egyértelmű előállítását, majd az egy elemmel generált egységelemes gyűrűket, ill. ezek izomorfizmusát vizsgálja a polinomideálokra általánosított Tschirnhaus-féle transzformáció segítségével.

A VIII. fejezet a testek ma már nagyjából lezártnak tekinthető struktúraelméletének, a Steinitz-féle testelméletnek van szentelve. Az egész elmélet szempontjából alapvető fogalmak (prímtest, algebrai és transzcendens relatív test, adjunkció, egyszerű bővítés, felbontási test) és az ezekre vonatkozó fontos tételek ismertetése után Steinitznek az algebrai bővítésekre vonatkozó alaptétele van bizonyítva: minden K testnek van ekvivalencia erejéig egyértelműen meghatározott $\bar{K}$ algebrailag zárt, algebrai bővítési teste. (K algebrailag zárt, ha a K feletti $K[x]$ polinomgyűrűben minden nem-konstans irreducibilis polinom elsőfokú.) A radikálnak (egy elemből vont gyök) és a körosztási polinom irreducibilitásának vizsgálata után szerző a véges testeket ismerteti részletesebben. Bebizonyítja König és Rados tételét a véges testben adott egyenlet 0-tól és egymástól különböző gyökeinek számára vonatkozóan. Ehhez csatlakozik Wedderburn azon nevezetes tétele, mely szerint nincs véges nem-kommutatív ferdetest. Ezután következik Steinitz alaptétele a transzcendens bővítésekről: ha az L test K-nak transzcendens bővítése, akkor létezik olyan T közbülső test, amely K-nak tiszta transzcendens bővítése és amelynek L algebrai bővítése. (Tiszta transzcendensnek nevezzük az olyan bővítést, amely egy algebrailag független elemrendszer adjunkciója révén áll elő.) A szeparábilis és inszeparábilis bővítések, a tökéletes és a nem-tökéletes testek tárgyalása, valamint a végesfokú szeparábilis algebrai bővítések egyszerűségének bizonyítása után a normával és a nyommal foglalkozó paragrafus rekeszti be a fejezetet.

A IX. fejezet az elrendezett struktúrák elméletébe vezeti be az olvasót. A szerző mindenekelőtt (Szendrei nyomán) megmutatja, hogy minden gyűrű kibővíthető egységelemes gyűrűvé, amelyről minimalitást, ill. nullosztómentes gyűrű alapulvétele esetén még nullosztómentességet is feltételezhetünk. Modulusok elrendezhetőségének kritériumaként bebizonyítja F. Levi azon tételét, mely szerint szükséges és elégséges feltétel a modulus torziómentessége. Testek, ferdetestek és gyűrűk elrendezhetőségére vonatkozóan az Artin—

SCHREIERtől megindított, majd SZELE, ill. JOHNSON által kiterjesztett elmélet kerül megvitatásra: az elrendezhetőség szükséges és elégséges feltétele a gyűrű formálisan valós volta, azaz hogy 0 nem állítható elő oly szorzatok összegeként, amelyekben minden egyes tényező páros számszor fordul elő. Az alkalmazásokban igen fontos archimedeszi rendezésről részletesebben van szó. Az ilyen módon elrendezett gyűrűk szükségképpen kommutatívak és az így elrendezett testeknek elrendezett algebrai bővítése ismét archimedeszien rendezett.

A következő fejezet tárgya az újabban nagyfontosságúvá vált értékeléselmélet, amelynek alapjait a magyar KÜRSCHÁK JÓZSEF vetette meg. A konvergenciafogalom bevezetése után az értékelt testnek Cauchy-sorozatok segítségével való perfekt lezárása következik; ennek célja annak biztosítása, hogy a Cauchy-sorozatoknak a bővített testben már legyen határértékük. Az itt tárgyalt konstrukció a valós számoknak CANTORtól eredő bevezetési módjának általánosítása révén történik, amely lényegileg KÜRSCHÁKra megy vissza. Speciális esetként említve vannak a valós számok, majd ezekhez kapcsolódva a valósan zárt testek. A különféle értékelések diszkussziójára térve, az archimedeszi és nem-archimedeszi értékelésekkel, ill. az utóbbinak KRULLtól eredő exponenciális alakjával foglalkozik a szerző, de csak arra az esetre szorítkozik, mikor az értékek alkotta Abel-csoport elrendezése archimedeszi. A diszkrét értékelés legfontosabb speciális eseteként a racionális számok p-adikus értékelésével és ennek perfekt lezárásával: a p-adikus számok testével ismerkedünk meg. Ezután szerző OSTROWSKI nevezetes tételét bizonyítja: a racionális számtestnek az abszolút érték és a p-adikus értékeléseken kívül (ekvivalenciától eltekintve) nincs más nem-triviális értékelése. HENSEL fontos lemmájára épül a valós értékelésre vonatkozóan perfekt test értékelésének algebrai bővítésekre való folytathatósági vizsgálata. Ezt követi OSTROWSKI másik fontos tételének bizonyítása: archimedeszi értékelésre vonatkozóan perfekt test topologikusan ekvivalens az abszolút értékkel értékelt valós vagy komplex számtesttel. A fejezet utolsó §-ában az egyváltozós függvények testének értékeléseiről nyerünk teljes áttekintést.

A könyv utolsó, XI. fejezetében szerző az $N|K$ végesfokú szeparábilis normális testbővítések elméletével: a Galois-elmélettel foglalkozik. Rögtön az első §-ban bizonyítja be a Galois-elmélet főtételét, mely — mint ismeretes — az $N|K$ résztestei és $N|K$ (relatív) automorfizmus-csoportjának alcsoportjai között egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést állapít meg. Az alkalmazásokra térve, elsőnek a 0-karakterisztikájú körosztási testek Galois-csoportjait adja meg, majd megmutatja, hogy ha a megfelelő egységgyökök az alaptesthez tartoznak, akkor a testbővítés Galois-csoportjának ciklikus voltához a szükséges és elégséges feltétel az, hogy a bővítés egy alaptestbeli elemből vont gyöknek az adjunkciója révén álljon elő. Igen figyelemreméltó az a mód, ahogy RÉDEI az algebrai egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának kérdését vizsgálja. Nemcsak azért, mert a szokottnál általánosabb s a lényegbe mélyebb bepillantást nyújtó módon tárgyal egyes előkészületeket, hanem azért is, mert a főtételt ritkán látott éles formában fogalmazza meg (a prím karakterisztika esetére is kitér, de mi egyszerűség kedvéért csak a 0-karakterisztika esetére szorítkozunk): ha az $f(x)$ irreducibilis szeparábilis polinom egyik gyöke előállítható radikálok segítségével, akkor $f(x)$ Galois-csoportja feloldható; megfordítva, ha a Galois-csoport feloldható, akkor létezik olyan radikálkifejezés, amelyben a radikálok irreducibilisek, a kifejezés összes értékei az egyenlet gyökeit szolgáltatják és ezek között az egyenlet összes gyökei megtalálhatók.

Ezután a RUFFINI—ABEL-tétel bizonyítása következik: a 4-nél magasabbfokú általános algebrai egyenlet gyökjelekkel nem oldható meg. Részletesen vizsgálja a másod-, harmad-, negyedfokú egyenletek megoldási módját, a casus irreducibilist, mindezeket véges test felett is. A Galois-elmélet másik fontos alkalmazását, a geometriai szerkeszthetőség elméletének algebrai tárgyalását a következő §-ban kapjuk. Az általános kritérium segítségével a szabályos sokszögek szerkeszthetősége, a szög harmadolása, a kockakettőzés és a kör négyszögesítésének problémája nyer elintézést. Az utolsóelőtti § konkrét egyenletek Galois-csoportjának meghatározási módját ismerteti, majd ennek segítségével megmutatja, hogy vannak numerikus, mégpedig racionális együtthatójú, gyökjelekkel meg nem oldható n-edfokú egyenletek $n \geqq 5$ esetén. Végül a Galois-testek normálbázisának exisztenciája van bizonyítva. Főként tankönyveket, monográfiákat és tankönyvekben eddig kevésbé idézett cikkeket magában foglaló bibliográfia és elég részletes tárgymutató zárja be a kötetet.

A széles perspektívát nyújtó s világosan megírt mű minden tekintetben rendkívül elmélyedő és gondos munka eredménye. Szerző nagy körültekintéssel válogatta össze az anyagot, és így elérte, hogy a tárggyal kapcsolatos szinte valamennyi fontos és alapvető jellegű ismeret tárgyalásra került. Gondosan ügyelt arra, hogy megfelelő alkalmazási területet is bemutasson. Ezen elvtől vezettetve, s bizonyára azon felfogásának alapján is, mely szerint a számelmélet az algebra részének tekintendő, vett be egyes erősen számelméleti jellegű részleteket is a könyvbe, ami modern algebrai műben szokatlan. Bár nem értünk egyet RÉDEInek a számelmélet hovatartozásáról vallott nézetével, mégsem helyteleníthetjük a számelmélet alkalmazásának a szokottnál nagyobb mértékű szerepeltetését, mert ezáltal a bemutatott általános tételeknek közvetlen, konkrét alkalmazására nyílik lehetőség, ami a megértést is elősegítheti. Ez egyszersmind sajátos egyéni színt is ad a műnek.

A könyvön egyébként igen jól megfigyelhető az a törekvés, hogy ne csak az általános, a továbbiak szempontjából és elvileg lényeges ismeretek, hanem a konkrét, speciális jellegű tények is kellő súllyal legyenek megvilágítva. Ez természetesen a terjedelem jelentős megnövelése nélkül nem valósítható meg. Innen ered a könyvnek, a feldolgozott tárgykörökhöz képest szokatlanul nagy terjedelme. Ez az impozáns méret egyfelől örvendetes abból a szempontból, hogy lehetővé tette a könyvnek kitűnő kézikönyvvé való avatását, amely feladatának minden tekintetben kiválóan megfelel. Másfelől viszont komoly hátránya is van a bő terjedelemnek, kivált a kezdő olvasó szempontjából, és ez az, hogy a nagy anyagban nehezebb a tájékozódás az alapvető fontosságú részek és a kisebb jelentőségű, nem alapvető jellegű részek között. Általában meglehetősen nagy matematikai érettséget kíván az elmélet vázának a kibogozása a nagy terjedelmű művekből, ez pedig nyilván a tankönyv-jelleg rovására megy. Természetesen meg lehetne könnyíteni az olvasó dolgát azáltal, hogy a kevésbé alapvető eredményeket tartalmazó paragrafusokat feladatokban dolgozzuk fel, a megoldásokra vonatkozó részletes utasítások megadása mellett, vagy legalábbis ezeket a részeket apró betűkkel, ill. valamilyen megkülönböztető jellel ellátva szedetjük.

RÉDEI rendkívül nagy munkát végzett az anyag összeállításakor. Gondosan feldolgozta a legújabb eredmények legjavát, nem feledkezve meg magyar szerzők eredményeiről sem. A könyvben elsőízben publikált számos új eredmény mellett szép számmal szerepelnek magától a szerzőtől eredő már publikált tételek, de új módszerek, új bizonyítások is.

Ami az anyag elrendezését illeti, ezt már bevezetőnkben volt alkalmunk futólag érinteni. Említettük, hogy a felépítés egyik jellegzetes sajátsága a csoport-, gyűrű- és testelmélet megfelelő fogalmainak és tételeinek lehető egyidejű, egységes tárgyalása (amelyet egyébként a magyar algebrai iskola egyik legjellegzetesebb sajátságának tekinthetünk). Az ilyen tárgyalási módnak megvan ugyan az a hátránya, hogy az ugyanazon struktúrára vonatkozó tételek elszórtan szerepelnek, és így nincs könnyű dolga annak, aki pl. csupán a csoportok elméletével kíván megismerkedni, de azt, hogy e mű egyúttal az algebra fő fejezeteinek monográfiája is legyen, nem tűzte, mert nem is tűzhette ki céljául a szerző. Rédei tárgyalásának előnye, hogy lehetővé válik a felesleges ismétlések elkerülése, az egyes fogalmaknak több oldalról való megvilágítása, azonkívül pedig több közvetlen alkalmazásra is nyílik lehetőség. És hogy a különböző struktúrákra vonatkozó megfelelő fogalmak összehasonlítása nemcsak pedagógiai, hanem tudományos szempontból is milyen termékenynek bizonyulhat, annak illusztrálására elég utalnunk az utolsó évtized magyar absztrakt algebrai eredményeire, amelyeknek nem kis hányada ezen elvből sarjadt.

Az anyag feldolgozásával is igen elismerésre méltó munkát végzett a mű szerzője. Az első, összefoglaló jellegű fejezetet leszámítva, nagy súlyt helyez a fokozatosság elvére mind az anyag egymásutánjának megállapításában, mind pedig a feldolgozás módjában. A szöveget gyakran tarkítják szerencsésen kiválasztott illusztráló példák, amelyek részben a bizonyított tételek állítását konkrét esetekre alkalmazva mutatják be, nagyobb részben pedig arra mutatnak rá, hogy bizonyos feltételek elhagyása esetén mennyire módosulnak az egyes állítások. Ezek apró betűkkel vannak szedve. Ugyancsak apróbetűs részekként állnak egyes paragrafusok előtt az illető paragrafus tartalmának és jelentőségének ismertetései, valamint szöveg közben egyes kiegészítő megjegyzések, különféle fogalmak kapcsolatának megvilágítását célzó észrevételek, s általában mindaz, ami az anyag közvetlen tárgyalásában mellőzhető, de lényeges a megértés és a kellő megítélés szempontjából. Ezeknek a megjegyzéseknek nagy része egy háromévtizedes gazdag tudományos munkásságra visszatekintő tudós és tanár tapasztalatait használják fel és jelentősen hozzájárulnak az anyag alapos megértéséhez és helyes értékeléséhez. Egy-két helyen azonban egyszerűbb megjegyzések is helyet kaptak — úgy hisszük, helyenként lehetett volna csökkenteni ezek számát és terjedelmét, az olvasó dolgának megnehezítése nélkül.

A könyv megfogalmazásában is megnyilvánul a szerzőnek rendkívül gondos munkája. Szerző az absztrakt algebrai irodalom jellegzetes tömör stílusában rejlő veszélyeket igyekezett elkerülni, s így elérte, hogy a szöveg a tömörség ellenére is jól érthető. Mindössze egy-két olyan rész akad, amelynek tömörsége az olvasót kissé nehezebb feladat elé állítja. Mint az első magyarnyelvű modern algebrai könyv szerzőjének, komoly terminológiai problémákkal is meg kellett birkóznia, hiszen számos fogalomnak még nem alakult ki egyöntetű magyar elnevezése. Rédei egyes esetekben eltért a magyarnyelvű irodalomban meggyökeresedett szóhasználattól, de itt is következetesen jár el abban a törekvésében, hogy analóg fogalmak hasonló elnevezést nyerjenek.

Szólnom kell még ennek a világirodalmi viszonylatban is számottevő műnek egyetlen — véleményem szerint — komoly hiányosságáról is. Olyan könyvtől, mely az egyetemes algebra szempontjából bizonyos teljességre törekszik, azt várnók, hogy a modern algebra alapjainak megvetésekor ne feledkezzék meg a csoportok, gyűrűk és testek édestestvéréről: a hálókról. Készséggel elismerjük, hogy a hálókban definiált műveletek jellege elüt a csoportokban, testekben definiált műveletektől, és így a hálókat nemigen lehetne oly szervesen beilleszteni a tárgyalás menetébe, mint a tekintett struktúrákat, és az is igaz talán — ha szabad tudományos jóslásokba bocsátkozni —, hogy a hálók sosem fogják idősebb testvéreiket fontosságban utolérni, bár roppant fontosságuk elvitathatatlan. Ez azonban nem lehet elég ok arra, hogy a hálók mellőzésével hiányos áttekintést nyújtsunk a jelenlegi algebráról. Úgy véljük, hogy a hálók ismertetése igen jól lett volna beilleszthető az anyag tárgyalásába, hiszen nem egy bizonyított tétel a csoport- és gyűrűelméletben tulajdonképpen hálóelméleti jellegű. (Lehetett volna pl. a Boole-féle gyűrűk tárgyalása révén a gyűrűk és a hálók elméletét még közvetlenebbül összekapcsolni.) A hálók megnememlítését s azt a tényt, hogy az újabb kutatásokban elfoglalt szerepük nem nyer kellő megvilágítást, sajnálatos hiánynak kell elkönyvelnünk.

Őszinte köszönet illeti a Magyar Tudományos Akadémiát, hogy lehetővé tette e kitűnő könyv megjelenését, nagy szolgálatot téve a magyar algebristák egyre bővülő táborának. Külön ki kell emelnünk a könyv szép kiállítását, a szegedi nyomda ízléses és elismerésre méltó munkáját. Nemcsak tartalmilag, de formailag is dísze e mű a magyarnyelvű matematikai irodalomnak.

Mindent összevetve, megállapíthatjuk, hogy Rédei Algebrájának megjelenése igen nagy nyeresége a modern algebrai irodalomnak és minden bizonnyal jelentős mértékben fog hozzájárulni az algebra iránti érdeklődés felkeltéséhez, az algebrai kutatások fellendüléséhez. Feltétlenül kívánatosnak tartjuk, hogy e kitűnő munkát a külföld számára is hozzáférhetővé tegyük. Meg vagyunk győződve, hogy az idegennyelvű kiadás csak öregbíteni fogja a magyar modern algebrai iskola igen jó hírnevét.

Fuchs László
a matematikai tudományok doktora

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Fodor Géza kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1954. június 19-én rendezte a Tudományos Minősítő Bizottság FODOR GÉZA kandidátusi értekezésének vitáját a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizikai Intézetében. FODOR GÉZA három évig a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében volt aspiráns SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA levelező tag, aspiránsvezető mellett. A vitán RÉDEI LÁSZLÓ levelező tag elnökölt, az értekezés opponensei KALMÁR LÁSZLÓ levelező tag és CSÁSZÁR ÁKOS a matematikai tudományok doktora voltak.

FODOR GÉZA kandidátusi értekezésének címe: „Halmazleképezések szerkezetének vizsgálata". Halmazleképezésen általában olyan hozzárendelést értünk, amely egy S halmaz bizonyos részhalmazainak megfelelteti egy, az S halmazzal nem szükségképpen azonos F halmaz egy-egy részhalmazát. Az értekezés különösképpen azzal az esettel foglalkozik, amikor az S halmaz x elemeihez, vagyis az egyelemű részhalmazokhoz van hozzárendelve S-nek egy $H(x)$ részhalmaza, amely magát az x elemet nem tartalmazza. Egy ilyen halmazleképezésre vonatkozóan az S halmaz két x és y elemét *függetlennek* nevezzük, ha egyik sincs benne a másikhoz hozzárendelt részhalmazban, azaz $x \notin H(y)$, $y \notin H(x)$; továbbá az S halmaz egy S' részhalmazát *szabad halmaznak* nevezzük, ha S' elemei páronként függetlenek. Az értekezés elsősorban azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy az S halmaz és a $H(x)$ halmazok számosságára tett bizonyos feltevések mellett van-e S-nek adott számosságú szabad részhalmaza, vagy felbontható-e S bizonyos számú szabad részhalmaz összegére. Ilyen kérdések először GRÜNWALD GÉZA és TURÁN PÁL interpolációs polinomok divergenciájára vonatkozó vizsgálatai kapcsán merültek fel. Ennek a problémakörnek igen szemléletes gráfelméleti interpretációja adható. Legyen ugyanis $\mathfrak{G}$ hurokél, valamint többszörös él nélküli, irányított gráf; $\mathfrak{G}$ szögpontjainak a halmazát jelöljük S-sel. Jelentse $H(x)$ $\mathfrak{G}$ azon szögpontjainak a halmazát, amelyekbe vezet él az x szögpontból. Ekkor x és y függetlensége azt jelenti, hogy nincsenek valamely éllel összekötve, továbbá a szögpontoknak egy S' halmaza akkor szabad, ha nincs S'-nek két olyan eleme, amely a $\mathfrak{G}$ gráf valamely élével össze van kötve.

Adott számosságú szabad halmaz létezésének, vagy egy halmaz bizonyos számú szabad halmazra való felbonthatóságának a kérdésével számos kiváló matematikus foglalkozott. E kérdéskör egyik fő problémáját az alábbi általánosságban S. RUZIEWICZ vetette fel. Legyen S egy $\aleph_0$-nál nagyobb $\mathfrak{m}$ számosságú halmaz, S minden x eleméhez legyen hozzárendelve S-nek egy olyan $H(x)$ részhalmaza, amely x-et nem tartalmazza és amelynek számossága kisebb, mint egy az $\aleph_0$-nál nem kisebb $\mathfrak{n}$ kardinális szám. Kérdés, hogy ekkor az $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ esetben létezik-e S-nek $\mathfrak{m}$ számosságú szabad részhalmaza. Ez a probléma ilyen általánosságban még nincs megoldva; GRÜNWALD GÉZA, LÁZÁR DEZSŐ, W. SIERPIŃSKI, ERDŐS PÁL és S. PICCARD értek el részeredményeket.

FODOR GÉZA értekezésének legértékesebb eredménye ERDŐS PÁL egy problémájának megoldása, amelyet a következő tétel szolgáltat (ezt az eredményét FODOR GÉZA már értekezésének benyujtása előtt közzétette, l. *Acta Sci. Math. Szeged*, 12 (1952), 219—227.): Legyen S egy $\mathfrak{m}(>\aleph_0)$ számosságú halmaz és S minden x eleméhez legyen hozzárendelve S-nek egy, magát x-et nem tartalmazó $H(x)$ részhalmaza, amelynek számossága kisebb, mint egy $\mathfrak{n}$ kardinális szám, ahol $\mathfrak{m}>\mathfrak{n}\geqq\aleph_0$. Ekkor S felbontható $\mathfrak{n}$, vagy $\mathfrak{n}$-nél kevesebb szabad halmaz összegére.

Ebből a tételből korolláriumként adódik a pozitív válasz S. RUZIEWICZ említett problémájára abban az esetben, amikor $\mathfrak{m}$ olyan kardinális szám, amely nem állítható elő $\mathfrak{n}$ számú $\mathfrak{m}$-nél kisebb kardinális szám összegeként.

Az értekezés még számos, halmazleképezésekkel kapcsolatos, hasonló típusú eredményt tartalmaz, amelyek egy része az Erdős-féle problémát pozitív értelemben megoldó, fentebb említett tétel felhasználásával adódik. Így például szerepel a Ruziewicz-féle problémának egy további speciális esetben való megoldása is, amikor $\mathfrak{m}$ szinguláris kardinális szám (azaz $\mathfrak{m}$ előállítható $\mathfrak{m}$-nél kevesebb számú $\mathfrak{m}$-nél kisebb kardinális szám összegeként) és S minden x elemére a $Z(x)=\{y\in S, x\in H(y)\}$ halmaz számossága (gráfelméleti terminológiában kifejezve, az x szögpontba befutó élek számossága) $\mathfrak{m}$-nél kisebb.

Az értekezés részletesen foglalkozik azzal az esettel is, amikor az S halmazon megfelelő topológia, illetve metrika, továbbá egy mérték, vagy külső mérték van definiálva. A szerző feltételeket ad meg arra, hogy létezzék pozitív mértékű, illetve pozitív külső mértékű szabad halmaz. Azokat az eredményeket, amelyek arra az esetre vonatkoznak, mikor az S halmaz a $[0, 1]$ intervallum és a szóbanforgó mérték a Lebesgue-féle mérték, a szerző még az értekezés benyujtása előtt közzétette. Az értekezés általánosabb terek és általánosabb mértékek esetén tárgyalja a pozitív mértékű, illetve pozitív külső mértékű szabad halmazok létezésének feltételeit. Példaképpen megemlítjük az értekezésben bebizonyított és az ebbe a kérdéskörbe tartozó számos tétel egyikét:

Legyen S szeparábilis metrikus tér, az S tér minden x eleméhez legyen hozzárendelve az S térnek egy olyan $H(x)$ részhalmaza, amelynek az x-től való távolsága pozitív: $g(x)=d(x, H(x))>0$. Legyen B az S halmaz bizonyos részhalmazainak olyan rendszere, amely S elemeinek összes gömbkörnyezeteit tartalmazza és amelyből a halmazok különbségképzése, valamint a véges, vagy megszámlálhatóan sok halmazra alkalmazott egyesités és közösrész-képzés nem vezetnek ki, és legyen végül μ egy B-n értelmezett mérték. Ha van olyan i pozitív szám, hogy az $\{x: g(x)\geqq i\}$ halmaz tartalmaz B-ből egy pozitív μ-mértékű halmazt, akkor van S-nek pozitív μ-mértékű szabad részhalmaza. Ha minden x-re $H(x)$ az x pont valamely gömbkörnyezetének kiegészítő halmaza, akkor ilyen i pozitív szám létezése nemcsak elegendő, de szükséges is pozitív μ-mértékű szabad halmaz létezéséhez.

Mindkét opponens véleménye szerint FODOR GÉZA értekezésével bebizonyította, hogy a matematika tudományát hatékonyan képes továbbfejleszteni. KALMÁR LÁSZLÓ rámutatott arra, hogy az értekezés tárgya időszerű. CSÁSZÁR ÁKOS kiemelte, hogy a dolgozat legértékesebb része ERDŐS PÁL problémájának megoldása. E feladat nehézségét már az a tény is mutatja, hogy a szerző előtt többen is próbálkoztak vele, de csak részeredményeket sikerült elérniök. Az értekezésben közölt bizonyítás a szerző finom matematikai ötletességéről és az absztrakt halmazelmélet bizonyítási módszereiben való alapos tájékozottságáról egyaránt tanúskodik. Ugyanakkor mindkét opponens kifogásolta, hogy a szerző következetesen elkerülte a szemléletesebb gráfelméleti terminológiát, amelynek használatával az értekezés bizonyításai világosabbak lennének és a szemléletes gráfelméleti kifejezésmód a szerző további ilyen irányú kutatásait is megkönnyítené. CSÁSZÁR ÁKOS megemlítette, hogy az értekezés első részét képező irodalmi összefoglalás igen kiterjedt irodalmi anyag feldolgozása. Mindkét opponens azonban kifogásolta ennél az irodalmi összefoglalásnál az anyag kiválasztását, amennyiben a szerző itt olyan eredményekről is említést tesz, amelyek nincsenek szorosabb kapcsolatban az értekezésben tárgyalt problémákkal. Mindkét opponens megemlitette, hogy az értekezésben egyes bizonyítások egyszerűsíthetők, az értekezés kidolgozásában számos apróbb, a lényeget sehol sem érintő pongyolaság található és a gépelésben számos ki nem javított gépelési hiba van.

FODOR GÉZA az opponenseknek adott válaszában megjegyezte, hogy az irodalmi összefoglalásban szereplő, de az értekezés tulajdonképpeni tárgyához szorosan nem kapcsolódó problémák ismertetésével a halmazleképezések elméletének a matematika más ágaiban való jelentős alkalmazásaira kívánt példákat adni. Végül FODOR GÉZA kijelentette, hogy az opponensek bírálatával egyetért.

A vita során CSÁSZÁR ÁKOS megemlítette, hogy kívánatos lenne az értekezések nagyobb példányszámban való elkészítése, ami lehetővé tenné azt, hogy a megvédendő értekezést a bíráló bizottság tagjai is részletesebben áttanulmányozhatnák.

A vita után a kiküldött bíráló bizottság egyhangúan elfogadta FODOR GÉZA értekezését. A bizottság megállapította, hogy az értekezés értékes eredményeket tartalmaz és tartalmilag kifogástalan. Tárgya időszerű, amennyiben több kiváló, főleg hazai és lengyel matematikust foglalkoztató kérdést tárgyal és old meg. A dolgozat fő eredménye ERDŐS PÁL egy sejtésének bizonyítása, igen komoly teljesítmény, sok matematikai invenciót és nagyfokú halmazelméleti rutint kíván. A bizottság véleménye szerint kívánatos lett volna, ha a szerző egyes helyeken a gráfelméletnek jóval szemléletesebb terminológiáját alkalmazza. A dolgozat fogalmazása sok tekintetben nem elég szabatos, a jelölések nem mindenütt következetesek és az értekezésben számos ki nem javított gépelési hiba található. Ezek azonban a dolgozat lényegét nem érintik. A szerző értekezésével és előzőleg megjelent dolgozataival bebizonyította, hogy önálló tudományos munkára képes. Ennek alapján a bizottság javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy FODOR GÉZÁT nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.

Tandori Károly
a matematikai tudományok kandidátusa

Mátrai Tibor kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1954. június 25-én rendezte a Tudományos Minősítő Bizottság MÁTRAI TIBOR aspiráns „Megjegyzések a merev mozgás relativisztikus tárgyalásához" című kandidátusi értekezésének a vitáját. Az értekezés opponensei NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus és HORVÁTH JÁNOS a fizikai tudományok kandidátusa voltak, a vita elnökéül a TMB BUDÓ ÁGOSTON levelező tagot kérte fel.

A vita előtt MÁTRAI TIBOR ismertette értekezésének téziseit. Először felveti a kérdést, hogy miképpen lehetne pusztán kinematikai természetű mérésekkel a téridőkontinuum mértéktenzorát legalábbis elvben meghatározni? Ehhez szerinte első sorban merev hosszmérték szükséges, az általános relativitás elmélet azonban még nem ismer általánosan kovariáns oly feltételeket, amelyek a merev hosszmérték végpontjainak viszonylagos mozgását korlátozzák. Így merev mérőeszköz feltételezése azt a veszélyt rejti magában, hogy egy másik a természetes órák átvitelén alapuló mérési módszerrel ellentmondás adódhat. Ellentmondás csak akkor nem adódhat, ha a merev test fogalmát, ill. a hosszmérték merev mozgatásának általánosan kovariáns feltételeit a természetes óra fogalmából kiindulva alkotja meg.

BORN a merev elektronról írott híres dolgozatában egy közeg áramlásának feltételeit vizsgálva arra a megállapításra jut, hogy a mozgó térfogatelemmel együttmozgó észlelő számára egyidejű világpontokat összekötő ívelem négyzetet a

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{3} p_{ik} \, d\xi^i \, d\xi^k$$

alakra, az ún. nyugalmi alakra lehet hozni. ξ^i-k a kezdeti koordináták. BORN a közeget akkor mondja merevnek, ha annak nyugalmi alakja időben változatlan. Mint később többen kimutatták BORN ezen definíciója nehézségekre vezet. Pl. egy körhengerpalást nem hozható forgásba, ha előzőleg nyugodott és nem állítható le, ha előzőleg forgott, szabadsági fokainak száma hat helyett csak három, stb. LAUE azonban kimutatta, hogy a speciális relativitás elve nem korlátozhatja a merev test mozgását. Az ellentmondás nyilvánvaló.

LAUE kimutatta azt is, hogy a merev test nem valósulhat meg, mert vele a fénysebességnél nagyobb sebességgel lehetne jelet közölni, ami a speciális relativitás elvének ellentmond. Az utóbbi évtizedben még többen próbálkoztak olyan definíciót adni, amely Lorentz-invariáns és a közegnek háromnál több szabadsági fokot biztosít, de kutatásaik nem vezettek eredményre.

A dolgozat szerzője szakít a folytonos közeg fogalmával és a merev testet pontrendszernek tekinti. A hosszmérték legegyszerűbb modelljének a pontpárnak merev mozgására állít fel Lorentz-invariáns kényszeregyenleteket és megvizsgálja, hogy kényszeregyenletei hogyan módosítják a merev test klasszikus kinematikai tulajdonságait. Sikerült kimutatnia, hogy az egyenletek szerint mereven mozgó tetraeder valóban hat szabadsági fokú és nem három, amint a közegre specializált Born-féle kényszerfeltételekből HERGLOTZ megfontolásai szerint következik. Viszont négynél több pontnak minden párosítása általában már nem mozoghat egyszerre mereven. Szerinte a speciális relativitás elve hat szabadsági fokú merev testnek nemcsak megvalósulását, hanem az általános értelmezhetőségét is kizárja s így a Herglotz-féle paradoxon éppen ebben leli magyarázatát.

Ezután először NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus olvasta fel opponensi véleményét. Ebben először rámutat arra, hogy a testek merevségével kapcsolatos vizsgálatok igen fontosak a fizikus és filozófus számára egyaránt, hiszen a fizikus a nem-relativisztikus mechanikában az összes vonatkoztató rendszereket merevnek tekinti; a filozófus kijelentése, hogy a tér a jelenségek formája, hogy tehát egy test fizikai és geometriai tartalmának minden változtatása nélkül a tér különböző helyein jelen lehet, egyebek között feltételezi a merev áthelyezés lehetőségét. Így a disszertáció kellő fajsúlyú problémát tárgyal. Helyesli továbbá, hogy az előző kísérletekkel szemben MÁTRAI nem a kontinuumok merevségi differenciálegyenletéből indul ki, hanem elsősorban két pont merev mozgását definiálja relativisztikusan. Rámutat arra, hogy a merevség feltételét szemléletesebben is meg lehet fogalmazni, mint azt MÁTRAI teszi és a (3, 2) feltétel, melyet MÁTRAI előző feltételeivel egyenrangúnak tekint, csak speciális esetben helyes. Ez azonban zavart nem okoz, mert a merevségnek ezt a feltételét később sehol fel nem használja a jelölt.

A dolgozat eredményei közül kiemeli NOVOBÁTZKY akadémikus, hogy a saját összekötő egyenesének irányában haladó merev pontpár távolsága a Lorentz-kontrakciót szenvedi, ha pedig erre az irányra merőlegesen mozog, hossza változatlan marad, ami igen megnyugtató. Másik fontos eredménynek tartja, hogy nincs olyan merev rendszer, melynek minden pontja állandó és azonos gyorsulással mozogna az inerciarendszerhez képest. Ennek a ténynek elvi jelentősége abban rejlik, hogy matematikai szigorúsággal igazolja eddigi sejtésünket, mely szerint nincs olyan koordinátatranszformáció, mely két relatíve egyenletesen gyorsuló merev koordinátarendszer között kapcsolatot létesítene. Ezután még több érdekes eredményre mutat rá NOVOBÁTZKY akadémikus és javasolja, hogy a dolgozat megvédésével a szerző a kandidátusi fokozatot elnyerhesse.

HORVÁTH JÁNOS a fizikai tudományok kandidátusa, miután rámutatott a dolgozat helyes tárgyválasztására és több előnyös oldalára, bírálatában több kérdést intéz a szerzőhöz. A dolgozattal kapcsolatos kérdéseket két csoportra osztja. A merev mozgás definíciójával kapcsolatban a következő megjegyzéseket teszi.

Mint újabb vizsgálatok mutatják, ha a merev testet pontrészecskékből álló rendszernek képzeljük és a merev mozgást az eredeti Born-féle módon definiáljuk, ez jellemezhető oly módon, hogy részecskéinek a világvonala párhuzamos és így természetesen egyetlen pontjának a mozgása meghatározza az egész merev test mozgását. Kívánatosnak tartaná, ha a szerző több pont esetén is megkísérelné a viszonyokat a szemléletes világvonalak segítségével szemléltetni.

Megkérdezi HORVÁTH, hogy a merev mozgás GARDNER által adott definíciója és MÁTRAI definíciója között nincs-e rejtett kapcsolat, mert mind a kettő analitikus megfogalmazásában egy a dolgozatban részletezett feltételi egyenletre vezet.

MC CREA és munkatársai azzal kívánják definiálni a merev testet, ill. a merev mozgást, hogy benne minden fizikai hatás ill. zavar fénysebességgel terjed. Megkérdezi, hogy egy merev mozgást végző alakzat (háromszög, tetraeder) két szögpontjának leállításakor az a hatás, ami a harmadik szögpontot is leállítja, milyen sebességgel terjed és így tekintve milyen viszonyban van MÁTRAI elmélete MC CREA-val.

A merev mozgás analitikus megfogalmazásánál hiányolja HORVÁTH JÁNOS, hogy a szerző nem rögzíti le, hogy a két világpont távolságnégyzete pozitív, vagy negatív; tehát, hogy a két pont távolsága térszerű vagy időszerű. Szerinte merevségről csak akkor lehet beszélni, ha a megfelelő világpontok térszerű volta biztosítva van. Csak ebben az esetben állapítható meg ugyanis egyidejűleg a két pont koordinátája.

A dolgozat részleteivel kapcsolatban is több kérdést tett még fel HORVÁTH JÁNOS kandidátus s végül megállapítja, hogy a disszertáció teljes mértékben elfogadható és javasolja, hogy az MÁTRAI TIBOR kandidátussá nyilvánításának az alapját képezze.

Az opponensi vélemények meghallgatása után még HOFFMANN TIBOR és MARX GYÖRGY a fizikai tudományok kandidátusai a bírálóbizottság tagjai szóltak hozzá a disszertációhoz.

Ezután MÁTRAI TIBOR válaszolt az elhangzott kérdésekre. Igen részletes és minden kérdésre kiterjedő válaszában MÁTRAI TIBOR az opponensek kisszámú bíráló megjegyzésével egyetértett és azok kijavítására ígéretet tett s a többi, inkább a kutatásnak más hasonló irányú kutatásokkal való kapcsolatára vonatkozó kérdésekre igen kimerítő és kielégítő választ adott.

A bíráló bizottság a szerző válaszát elfogadta s határozathozatalra vonult vissza. Szünet után BUDÓ ÁGOSTON elnök hirdette ki a bizottság döntését:

„MÁTRAI TIBOR Megjegyzések a merev mozgás relativisztikus tárgyalásához" című kandidátusi értekezésének nyilvános vitájára kiküldött bírálóbizottság megállapította, hogy a jelölt disszertációja témájául kellő fajsúlyú problémát választott, a probléma időszerű és különösen az utóbbi években az érdeklődés előterében áll.

Több, sokat vitatott és mindeddig kellően meg nem világított probléma megoldását a jelöltnek sikerült lényeges lépésekkel előbbre vinnie. A disszertációjában közölt vizsgálatok, módszerek, ill. a kapott eredmények a relativitáselmélettel kapcsolatban több további vizsgálatnak képezhetik a kiindulópontját.

Az opponensi véleményekre és a feltett kérdésekre a jelölt minden részletre kiterjedő (egyes helyeken nagyon is részletező), a problémakör és az irodalom alapos ismeretéről tanuságot tevő választ adott, és ezzel is bebizonyította az önálló tudományos kutató munkában való jártasságát.

Mind a disszertációjában elért új eredmények, mind pedig a megvédés során is tanúsított nagyfokú felkészültsége alapján a bizottság javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy MÁTRAI TIBORt nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává."

Gáspár Rezső
a fizikai tudományok kandidátusa

A III. OSZTÁLY HÍREI

FELOLVASÓ ÜLÉSEK 1954. II. FÉLÉV

Október 22-én

1. EGERVÁRY JENŐ r. tag: Matrixok faktorizációja és lineáris egyenletrendszerek.
2. EGERVÁRY JENŐ r. tag: Felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokról és azok alkalmazásáról.
3. JÁNOSSY LAJOS r. tag, BÉKÉSSY ANDRÁS és PÁL LÉNÁRD: Megjegyzések a kaszkádelmélet diffúziós egyenletének problémájához.
4. EGERVÁRY JENŐ r. tag bemutatja K. KARANIKOLOV (Szófia) „Egy *n*-edrendű differenciálegyenletről“ című dolgozatát.
5. HAJÓS GYÖRGY r. tag bemutatja H. S. M. COXETER (Kanada) „Egyenlő gömbök elhelyezései a nemeuklideszi térben“, FEJES-TÓTH LÁSZLÓ „Reguláris politopok szélsőérték-tulajdonságai“, SZÁSZ PÁL „A hiperbolikus térgeometria ellentmondás-mentességének elemi geometriai bizonyítása a Poincaré-féle féltér segitségével“, SZÁSZ PÁL „A moduláris csoport geometriai interpretációról“ című dolgozatát.
6. JÁNOSSY LAJOS r. tag bemutatja NÁRAY ZSOLT „A HF molekula néhány állandójának hullámmechanikai meghatározása“, VARGA PÉTER és ÁDÁM ANDRÁS „A koincidencia mérés, két, koherens fénynyaláb elé helyezett elektronsokszorozó között“ című dolgozatát.

November 12-én

1. GYULAI ZOLTÁN r. tag: Tűkristályok elmálasztó hatása porózus anyagokban.
2. TURÁN PÁL r. tag és ERDŐS PÁL: A Lagrange-interpolációról.
3. RÉDEI LÁSZLÓ lev. tag: Zeta-függvények az algebrában.
4. RÉDEI LÁSZLÓ lev. tag: Hajós tételének összefüggése a csoportelméleti zeta-függvényekkel.
5. RÉDEI LÁSZLÓ lev. tag: Polinomideáloknak Hensel-féle és Szekeres-féle kanonikus alakjáról.

6. RÉDEI LÁSZLÓ lev. tag: A Tschirnhaus-féle transzformáció kiterjesztése a polinomideálokra.
7. RÉDEI LÁSZLÓ lev. tag: Egy elemmel generált gyűrűk.

December 17-én

1. JÁNOSSY LAJOS r. tag: Megjegyzések a valószínűségszámítás alapjaira vonatkozóan.
2. JÁNOSSY LAJOS r. tag és PÁL LÉNÁRD: Elemi részek diffúziós egyenletének általánosításáról.
3. BUDÓ ÁGOSTON lev. tag és KOVÁCS ISTVÁN lev. tag: Vizsgálatok az O_2^+ molekula $^4\pi$ állapotán.
4. JÁNOSSY LAJOS r. tag bemutatja H. W. FRANKE (Erlangen) „A hullámmechanika egy hidrodinamikai modellje“, S. N. BISWAS (Kalkutta) „Heitler integrálegyenletének Fredholm-féle elmélete“, PÁL LÉNÁRD „A kobalt differenciális szuszceptibilitásának hőmérséklettől való függése erős mágneses terekben“, PÁL LÉNÁRD „Néhány megjegyzés a domenfal eltolódások dinamikájához“, PÁL LÉNÁRD „A domenfal szerkezetének elmélete a mágneses kölcsönhatás figyelembevételével“ című dolgozatát.
5. RÉNYI ALFRÉD lev. tag bemutatja TAKÁCS LAJOS „Rekurrens folyamatok által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatokról“ című dolgozatát.

* * *

1954-ben a Magyar Tudományos Akadémia kiadásában a következő matematikai és fizikai könyvek jelentek meg;

Az Alkalmazott Matematikai Intézetének II. Évkönyve. (A III. már útban van a nyomda felé.)

RÉDEI LÁSZLÓ: Algebra I.

A. O. GELFOND: Differenciaszámítás (fordítás).

FARAGÓ PÉTER és PÓCZA JENŐ: Elektronfizika.

E. V. SPOLENSZKIJ: Atomfizika I. (fordítás).

I. C. SLATER: Mikrohullám Elektronika (fordítás).

A. AHIJEZER és L. POMERANCSUK: Fejezetek az Elméleti Magfizika köréből (fordítás).

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója. Műszaki felelős: Szöllőssy Károly.
A kézirat beérkezett: 1954. XII. 14. — Példányszám: 500. — Terjedelem: 7½ (A/5) ív, 16 ábra.

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged 54-7281 Felelős vezető: Vincze György

Ára: 17,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

KIVONATOK

KÖNYVISMERTETÉS

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

V. KÖTET 2. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1955

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:

CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY, RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:

ALEXITS GYÖRGY

V. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest V. Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest V. Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V. Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Sztálin út 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

SZOKATLAN RADIOAKTIVITÁS MEGFIGYELÉSE A DEBRECENBEN 1952. ÁPR. 22—DEC. 31 KÖZÖTT LEESETT CSAPADÉKOKBAN

SZALAY SÁNDOR és id. BERÉNYI DÉNES

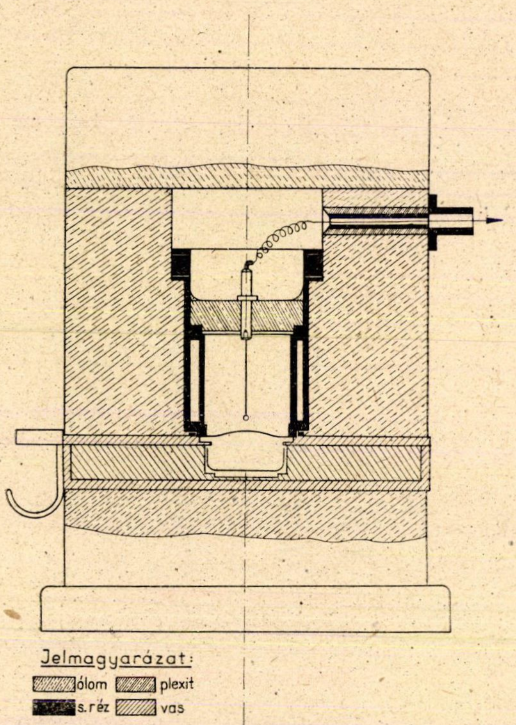
Előadta Szalay Sándor lev. tag az 1954. november 26-án tartott felolvasó ülésen

I.

Újabban több szerző mutatott ki sikerrel urán-hasadási termékeket az atmoszférában, valamint a csapadékban, a kísérleti atombombák robbantási helyeitől jelentős távolságban is [1], [2], [3], [4], [11], [12]. Lehetségesnek látszott kellő érzékeny mérőberendezéssel az aktivitást még nagyobb távolságban is kimutatni. Ez indította 1952 áprilisában a szerzőket arra, hogy a Debrecenben lehulló csapadékot begyűjtsék és radioaktív szempontból megvizsgálják.

A Kisérleti Fizikai Intézetben az egyik szerző (SZALAY) által régebben radioaktív izotóp nyomjelzés céljaira konstruált mérőberendezés erre a célra elég érzékenynek látszott. Ez a *Geiger—Müller* számlálócsöves mérőberendezés egy 0,1 mm vastag és 26 mm átmérőjű alumínium ablakkal ellátott *Geiger—Müller* számlálócsőből és hozzá szükséges erősítőből, stabilizált magasfeszültségű áramforrásból, számlálóműből, stb. állott. Itt csak a számlálócső és ólomvért rajzát adjuk (1. ábra). A számlálócső tengelyében 0,1 mm-es egyenes wolfram drót volt, egyik végén kis üveggyönggyel. A számlálócső ablaka alá egy kis fémfiókkal lehetett betolni a 24 mm átmérőjű és 7 mm mély, cca 2 mm falvastagságú egységesített típusú üveg mérőedénykéket. A számlálócső ablaka a közepes keménységű vagy keményebb β-sugarakat nagyobb abszorpció nélkül átengedte, az α-sugarakat természetesen teljesen visszatartotta. A számlálócső érzékenysége a γ-sugarakkal szemben cca két nagyságrenddel kisebb lévén, végeredményben kizárólag a β-sugarakat mérte. Az ólomvért elég vastag (4 cm) volt ahhoz, hogy a környezet radioaktív γ-sugárzását jelentősen abszorbeálja. A berendezés nulleffektusa percenként 13—14 impulzus között volt. A nulleffektus értékének kis ingadozása és a számlálásoknál természetszerűleg fellépő statisztikai hiba szabták meg a mérőberendezés érzékenységét. A berendezés geometriai hatásfoka 12,4% volt, ami annyit jelent, hogy az üveg mérőedénykébe bepárolt preparátumból a teljes 4π térszögbe kiinduló β-részecskék közül geometriai okokból 12,4% törtrész hatolt a számlálócsőbe. A számlálócső hitelesítése ismert (számítható) erősségű β-sugárzó preparátummal (UX_2) történt, így a mért csapadék radioaktivitása közvetlenül Curie-egységekben is kifejezhető volt. Itt azonban el kellett tekintenünk a 0,1 mm vastag Al-ablak abszorpciójának figyelembevételétől, mert a csapadékban mért ismeretlen radioaktív anyagok β-sugárzásainak energiáit nem ismertük. Igen lágy β-sugaraktól eltekintve az abszorpció nem jelentős.

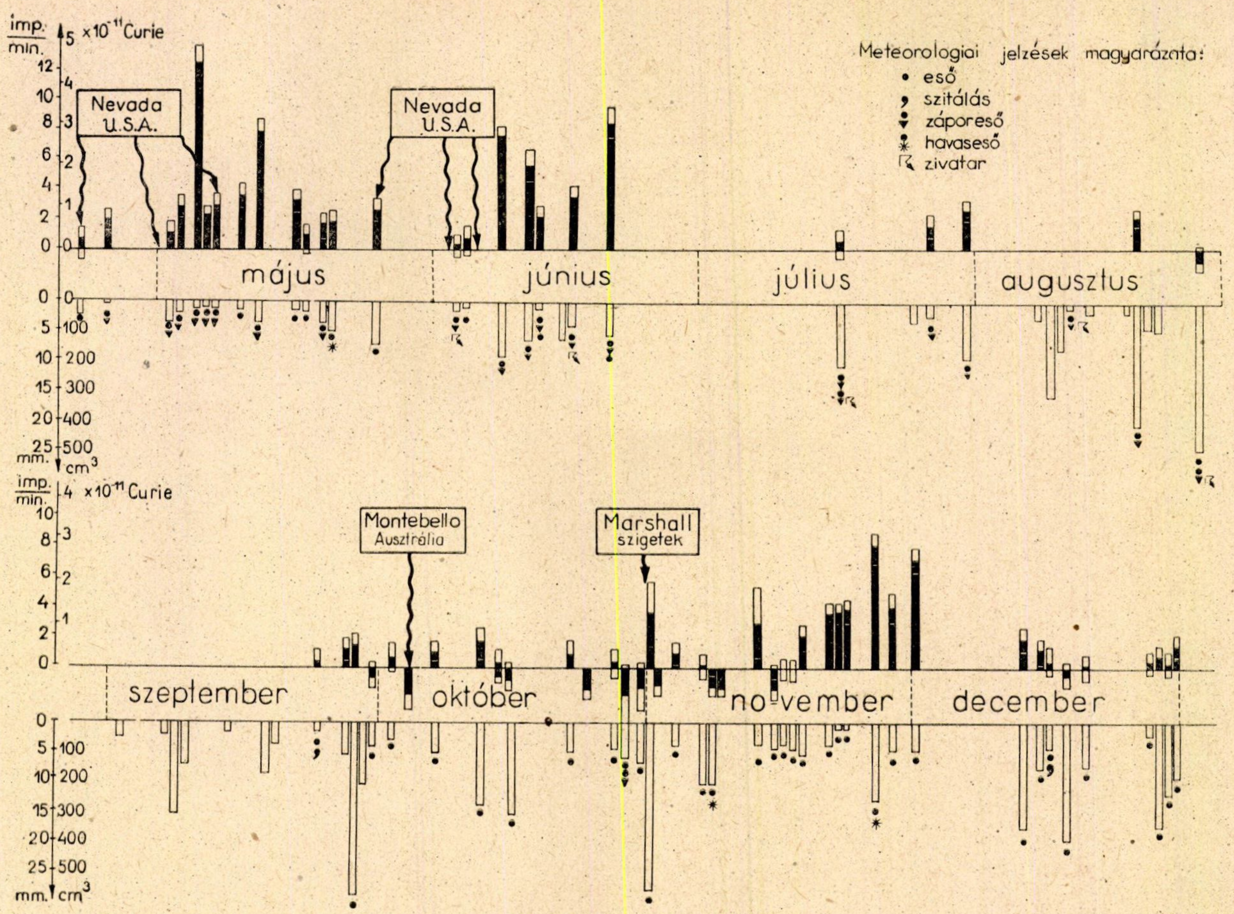
A Meteorológiai Intézet ombrométere által 159,6 mm átmérőjű 200 cm^2 körterületen felfogott csapadékot kevés pro anal. sósavval savanyítva vízfürdőn előbb porcelán tálakban koncentráltuk be, majd az egységesített üveg mérőedénykébe vittük át pipettával, gondosan ügyelve arra, hogy a porcelán tál falán esetleg adszorbeált nyomok sósavval maradék nélkül a mérő edénykékbe jussanak. A felfogott csapadék mennyisége pár cm^3-től pár száz cm^3-ig terjedt, az eső mértéke szerint. Beszárítás után a preparátumok mérésre kerültek. A csapadék leesése és a mérés között legalább 48 óra telt el, ami elegendő volt arra, hogy a levegőből oldott természetes radioaktív anyagok, amelyek rádium emanációból, illetve thorium emanációból származhatnak, teljesen lebomoljanak és így a méréseket ne zavarják. (RaB + C + ...; ThB + + C + ...). A levegő radon tartalma 10^{-14}— 10^{-13} Curie/liter nagyságrendben mozog. Így a mérésre kerülő üvegedénykékben természetes radioaktív anyag nem lehetett jelen, továbbá a gáznemű radioaktív anyagok is kiestek a mérésekből, mert a bepárolás alkalmával azok szükségképpen elillantak.



1. ábra. Végablakos Geiger—Müller számlálócső 4 cm vastag ólomvértben. Az üvegcsészében lévő preparátumot a kihúzható fiókkal a számlálócső 0,1 mm-es alumínium ablaka alá lehet betolni.

A mérés az impulzusok több órán át tartó számlálása útján történt az 1. ábrán látható geometriai elrendezésben. Mérés előtt, közben és után a készülék természetes effektusát is meghatároztuk, majd középértékét a mérési eredményből levontuk. Ahol az aktivitás jelentéktelen volt, ott csak rövid ideig mértünk, ennek következtében a statisztikai hiba nagyobb. Egyes erősebben aktív preparátumok aktivitását heteken át sorozatosan mértük, hogy a radioaktív bomlást és annak felezési idejét megállapíthassuk.

Az 1952. ápr. 22-től dec. 31-ig kapott mérési eredmények a 2. ábrán láthatók, a naptári időpont függvényében. Az ordinátán az aktivitást a ténylegesen óránként észlelt impulzus számban, valamint a számlálócső hitelesí-



2. ábra. A debreceni atmoszférikus csapadék radioaktivitása 1952. ápr. 22 és dec. 31-e között. Ordináta: fent jobboldalon az aktivitás 10^{-11}Curie egységekben, fent baloldalon ténylegesen számlált impulzus per minutum egységekben. Lent jobboldalon 1/50 m² területen begyűjtött eső mennyisége cm³-ben, baloldalon az eső mennyisége mm-ben. Abszcissza a naptári idő. Az irodalomban közzétett atombomba kísérletek helye és időpontja négyszögletes keretbe bejelölve.

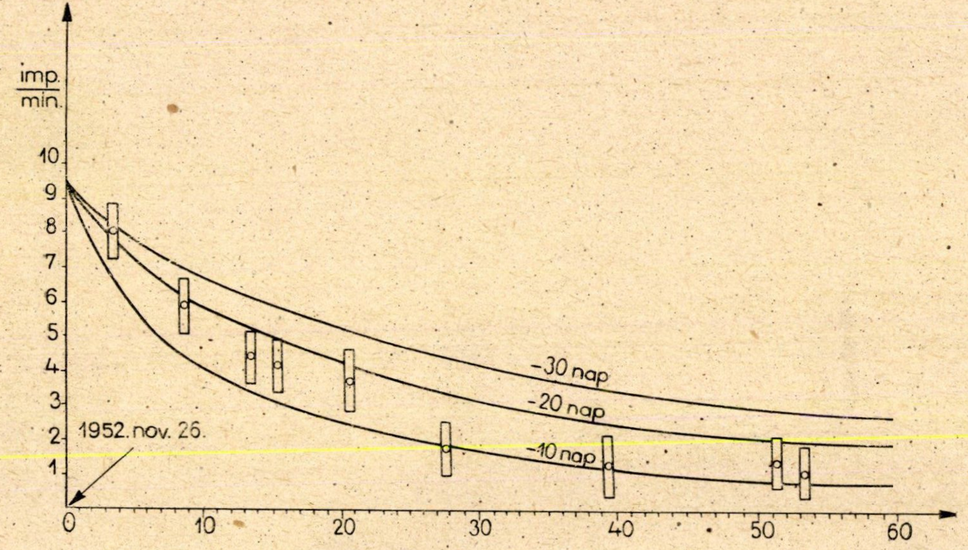
tése útján számított Curie egységekben is feltüntettük. (Ez utóbbinál már figyelembe van véve a geometriai hatásfok, de el van hanyagolva az Al-ablak abszorpciója.) A tömör fekete sáv hossza a mérési eredmény középértékét mutatja, felső vége felett és alatt látható jelek a statisztikai hiba valószínű határait jelzik. Feltüntettük a csapadék mennyiségét is, az ábrán lefelé külön ordinátán, fehér sávokkal. Az ordináta a csapadékot mm-ben és a 200 cm^2 területről begyűjtött térfogatban mutatja.

A 2. ábrán feltűnően látható a csapadék radioaktivitásának bizonyos időszakokban, egy-két héten át mutatkozó szokatlan nagy értéke, míg általában az aktivitás igen kicsiny, a statisztikai hiba határain nem igen emelkedik felül. Egyes mérések negatív aktivitást is adtak, ami természetesen fizikailag abszurd. Ennek oka a statisztikai ingadozás, illetve az ebből eredő mérési hiba. Minthogy a mérési eredményeket elvi okokból nem akartuk sem szépíteni, sem kihagyni, e negatív értékeket is feltüntettük.

A 2. ábrából látható, hogy a lehullott csapadék mennyisége és a radioaktivitás között nincsen semmi összefüggés. Így pl. a május 5-én hullott igen kis csapadék kiugró nagy aktivitást mutat, míg az aug. 26-án esett nagy mennyiségű csapadék bepárolásával nem sikerült lényeges aktivitást kimutatni.

Az irodalomból összeállítottuk a vizsgált időszakban különböző helyeken robbantott kísérleti atombombák helyét és időpontját, amennyire ezeket közölték [5], [6] és a 2. ábrán szintén feltüntettük. Ha ezeket egybevetjük az ábrán látható szokatlan radioaktivitású időszakokkal, akkor a korreláció nem vonható kétségbe. A nevadai kísérleti bombák robbantása után jelentkezett az aktivitás. A fent említett megfigyelési időszak alatt egyetlen atombomba (a montebelloi) kivételével valamennyi közzétett bomba radioaktivitása jelentkezett és egyetlen olyan aktivitás sem jelentkezett, amelyet ne lehetett volna valamelyik kísérlethez rendelni. Az észlelések még határozottabb hozzárendelését zavarta egyrészt az, hogy 1952 tavaszán nagyszámú kísérleti bombát robbantottak Nevadában és így az aktivitások egymásba folynak, másrészt az, hogy az 1952. júl.—szept. időszak szokatlanul csapadékmentes volt, ami a megfigyeléseket ez időszakban megakadályozta. Egyes csapadékminták megvizsgálása aug.—szept.-ben technikai okokból elmaradt. Érdekes, hogy a Montebello-szigeti (Észak-Ausztrália) brit kísérleti robbantás aktivitása nem volt kimutatható. A rendelkezésre álló gyér közlésből [5] kiderül, hogy e bombát egy hajóban, tehát a tenger színén robbantották és a robbanás sok iszapot és vizet dobott fel, továbbá a robbanási felhő nem emelkedett fel a magas légrétegekbe, csupán kb. 3,6 km magasra. Valószínűnek látszik, hogy a hasadási termékek nagy része a vízben és iszapban maradt, továbbá a felhő kis magassága folytán a csapadékkal hamarosan a tengerbe jutott anélkül, hogy nagy távolságra szétszóródhatott volna. Az 1952. nov. 1-én a Marshall-szigeteken (Eniwetok közelében) robbantott bomba [6] aktivitása a debreceni csapadékban három hét múlva jól mérhető volt. E bomba, bár erre vonatkozólag hivatalos részletesebb hírközlés nem történt, a feltevések szerint hidrogénbomba volt [6]. A legkisebb atomsúlyú atomok szintéziséből nem kaphatunk hasadási termékeket, így a Debrecenben észlelt aktivitás a gyujtáshoz használt hasadási láncreakció termékeiből eredhetett.

Annak ellenőrzésére, hogy valóban hasadási termékekről van szó, a legaktívabb csapadékok lebomlását hosszabb időn át megfigyeltük. A 3. ábra az

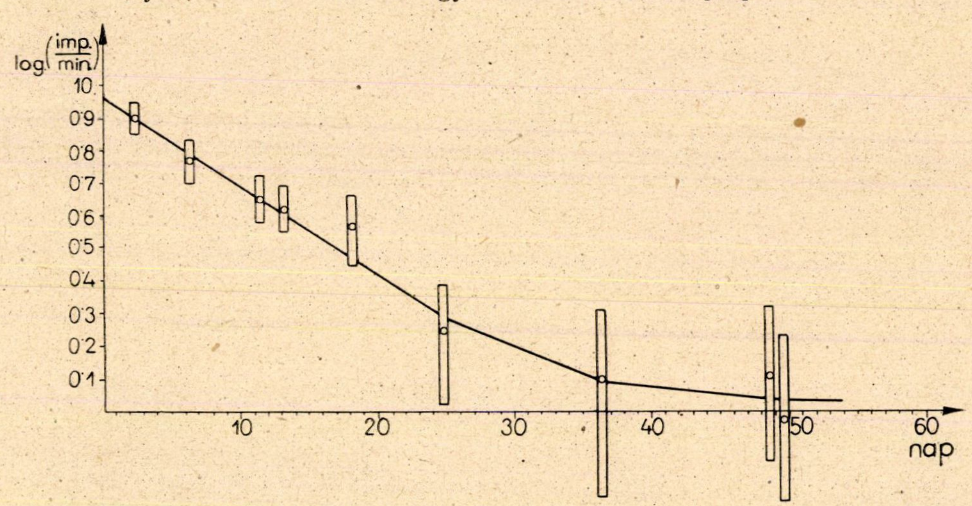


3. ábra. A november 26-án begyüjtött csapadék aktivitásának időbeli lebomlása. Abszcissza az idő napokban. Ordináta a β-sugár aktivitás önkényes egységekben. A görbék az $I(t) = I(1)t^{-1,2}$ empirikus formula által számított lebomlási görbéket ábrázolják 3 különböző paraméterben, azaz feltételezve, hogy a hasadás 10, 20, illetve 30 nappal az első észlelés előtt történt.

egyik ilyen lebomlási görbét, az 1952. nov. 26-án esett eső aktivitását mutatja az idő függvényében. Megfigyelhető a görbén, hogy az aktivitás eleinte gyorsabban, később lassabban csökken, kb. két hónapig megfigyelhető marad. Megállapítható az is, hogy nem egységes homogén radioaktív anyagról van szó, hanem különböző felezési idővel rendelkező anyagok keverékéről. A 4. ábrán logaritmikus ordinátán ábrázoltuk a 3. ábra mérési anyagát. Egynemű radioaktív anyagnak ilyen ábrázolásban egyenest kellene adnia. Látható, hogy inkább különböző hajlásszögű egyenesek egymásba átmenő sorozatáról van szó. Egy ilyen preparátum véges számú különböző felezési idejű, különböző kezdeti erősségű radioaktív anyag keveréke. A mérhető összes intenzitást elvben a következő formulával állíthatjuk elő:

$$I(t) = A_1 \cdot e^{-\lambda_1 t} + A_2 \cdot e^{-\lambda_2 t} + \cdots + A_i e^{-\lambda_i t} + \cdots + A_n e^{-\lambda_n t}, \tag{1}$$

ahol $I(t)$ mérhető különböző időpontokban. Ha a preparátum erőssége a pontos mérést lehetővé tenné, akkor $2n$ számú méréssel az A_i és λ_i adatok meghatározhatók lennének. Ilyen mérés gyakorlatilag már azért sem vihető keresztül, mert n ismeretlen, elég nagy szám, közel 200 körüli érték [9]. Különben sem volna sok jelentősége, mert a csapadékban már kémiai elkülönülés, frakcionálás lép fel, így pl. a bepárolásnál a gázállapotú hasadási termékek (pl. radioaktív krypton és xenon izotópok) elillannak, az igen rövid felezési idejűek lebomlanak, stb., így a mérésre kerülő preparátumban a rob-



4. ábra. A november 26-án esett csapadék aktivitásának időbeli lebomlása. Abszcissza idő napokban, ordináta az aktivitás logaritmusa.

banás pillanatában keletkezett sokféle terméknek csak egy része lehet jelen. További akadály a kis intenzitás, azaz a mérési hiba.

Sokkal érdekesebb lenne annak megállapítása, hogy mikor robbant az a bomba, amelyből a csapadék származott. Ezáltal a csapadék eredetét még megbízhatóbban megállapíthatnánk. Minthogy először a rövid felezési idejű termékek bomlanak le és azután sorrendben a többiek, elvben e kérdés közelítőleg eldönthető lenne, abból kiindulva, hogy milyen hosszú felezési idejűek vannak még jelen a mért preparátumban. Természetes, hogy a fent már előbb felsorolt okok a pontosságot rontják. Az irodalomból ismeretes egy empirikusan megállapított ún. normálgörbe [8] és egy közelítő formula [7], amelyik a hasadási termékek teljes készletének időbeli lebomlását jó közelítésben állítja elő:

(2) $$I(t) = I(1) \cdot t^{-1,2},$$

ahol $I(t)$ a mért intenzitás a t időpontban, $I(1)$ az intenzitás a $t=1$ időpontban, bárhogyan legyen az idő egysége megválasztva. $t=0$ időpont alatt a robbanás időpontja értendő. A formula $t \geqq 1$ időkre alkalmazható. A légköri csapadékból nyert preparátum lebomlási görbéjét elvben akár grafikusan, akár numerikusan illeszthetjük. E lehetőséget már N. Y. HOLTER és W. R.

GLASSCOCK [4] is felvetették, így itt az egyszerű elvi számítással nem foglalkozunk. Méréseinknél a csapadék kis aktivitásából eredő nagy statisztikai hiba a pontos illesztést lehetetlenné teszi. A 3. ábrán berajzoltuk a fenti (2) formula által megadott görbét, három különböző hasadási időpontot feltételezve, 10, 20 illetve 30 nappal az első mérés előtt. Az első mérési pontunk természetesen teljesen illeszkedik bármelyik paraméterhez, mert $I(1)$ értékét ezen pont alapján számítottuk ki. Mint látjuk, a mérési hibák miatt a pontos időpont megállapítás alig lehetséges, de mégis a nov. 10 körüli időpont látszik legvalószínűbbnek, ami nem tér el túlságosan a nov. 1-én a Marshall-szigeteken történt robbantási kísérlettől, különösen, ha figyelembe vesszük, hogy a mért preparátum már nem tartalmazza az összes hasadási termékeket, míg a formula a teljes hasadási termék keverékre vonatkozik.

Amint a 2. ábrán látható, az aktivitás Debrecenben a robbanáshoz képest mindig fáziskéséssel jelentkezik, ami nyilván a nagy távolság és így a hasadási termékek szétszóródásához szükséges időtartam következménye. Érdekes ezt egybevetni az uralkodó szélsebességekkel (lásd a II. részt).

További érdekes kérdés a radioaktív anyag Debrecenben mért mennyiségét összehasonlítani a robbanáskor kapott radioaktív anyag összes mennyiségével. Ezen összehasonlítás támpontot adhat arra, hogy véletlenül ide sodródott, aránylag koncentrált atmoszférikus foszlányok radioaktivitását észleljük-e vagy pedig az egész Földgömb légkörében majdnem egyenletesen elosztott átlagos aktivitást. Itt természetesen csak a nagyságrend becslésére szorítkozunk. Az ombrométer $1/50\,m^2$ területről gyűjti a csapadékot. Feltételezzük, hogy a csapadék egy ilyen terület felett levő légkör radioaktivitását, legalábbis nagyságrendben, lehozta (lásd a II. részt). Észleléseink szerint 10^{-11} Curie nagyságrendű aktivitás gyűl össze. Egyenletes eloszlást tételezve fel a Föld egész légkörében, a Föld egész területére $(5\cdot 10^8\,km^2 = 5\cdot 10^{14}\,m^2)$ kb. 10^6 Curie aktivitás esik. Minthogy egy atombomba robbanásakor az irodalmi adatok szerint [7] jóval nagyobb aktivitás szabadul fel (egy héttel a robbantás után még 10^7 Curie, egy hónappal utána $2\cdot 10^6$ Curie), úgy látszik, hogy az általunk észlelt aktivitás a légkör átlagos aktivitásának tekinthető, azaz hasonló érzékeny berendezéssel másutt is észlelhető lenne.

Az észlelhető aktivitás (10^{-11} Curie) elég csekély, aggodalomra akár biológiai hatása, akár ipari károkozás (pl. foto-ipar) vagy akár más tudományos vizsgálatok zavarása szempontjából nem ad semmi okot, mert több nagyságrenddel kisebb az e szempontokból számításba veendő aktivitásoknál.

II.

Az adatok meteorológiai kiértékelése

A meteorológiai kutatásnak egy mindig teljes tökéletességgel meg nem oldott problémája az általános légcirkuláció. Az atomrobbantások most lehetőséget nyújtanak arra, hogy ezt az eddigitől eltérő eszközökkel vizsgálják meg. Az atomrobbantásoknak ilyen célú felhasználásáról találunk irodalmi utalást is H. LOSNITZER munkájában [13], aki azt javasolta, hogy a légtömegeket aktivitással lássák el és ennek nyomán kövessék azok útját. H. IZRAEL [14] pedig azt javasolta, hogy az aktivitási méréseket Geiger—Müller számláló berendezéssel végezzék.

Az általános légcirkulációnak a csapadékaktivitás útján történő meghatározása az ilyen vizsgálatoknak egy sajátos módja. Előnye a csapadék hozzáférhetősége, de ugyanebből származik a hátránya és egyben az eljárás gyönge pontja, nevezetesen az a körülmény, hogy a csapadék nem folytonos, hanem időszakos elem. Nem figyelhető meg állandóan, mert megjelenése független az akaratunktól. Különösen korlátozott azonban ez a lehetőség akkor, ha csak egy helyről származó csapadékadatok aktivitását vizsgáljuk.

Mindenekelőtt azt kell tisztáznunk, hogy a leeső csapadék aktivitása honnan származik, és milyen természetű. A csapadék képződése tudvalevően az úgynevezett kondenzációs magok jelenlétéhez van kötve. Nyilvánvaló, hogy ezek a kondenzációs magok egyben a radioaktivitás hordozói is. Ezek vagy mint eredeti robbantási termékek kerültek arra a helyre, ahonnan kondenzáció folyamán leestek, vagy pedig a robbanás pillanatában a bomba egyéb szerkezeti anyagaiból, vagy a földről kerültek a magas rétegekbe a szerzett aktivitással. A kondenzációs magok nagysága általában 0,2—0,4 mikronig terjed. Az ilyen kis részecskék esési sebességét a Stokes-féle formula határozza meg, ami a következő:

$$v = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\, r^2 \,[\mathrm{cm\ sec}^{-1}],$$

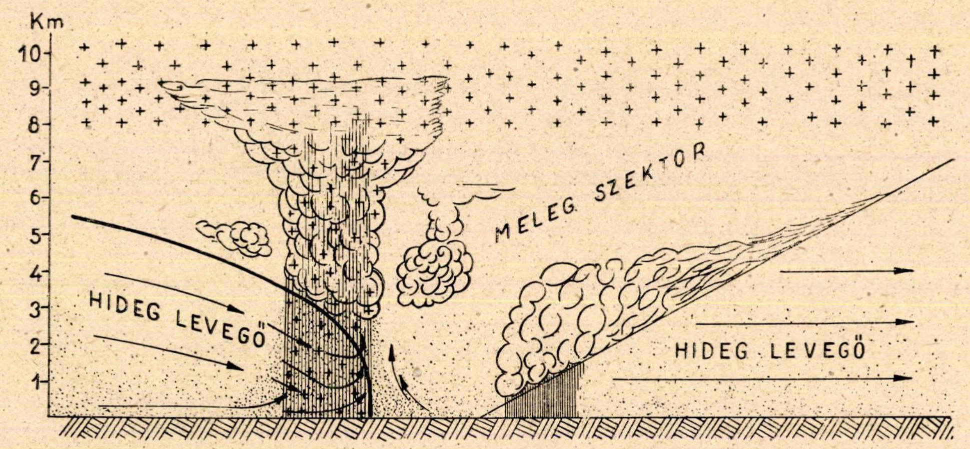
ahol v a részecske sebessége, r annak átmérője, 0,4 mikronnyi átmérőt véve alapul. Az ilyen nagyságú részecske 1 nap alatt 1,73 m-t, 30 nap alatt 51,9 m-t esik lefelé. Ahhoz tehát, hogy a 10 km magasságból (az átlagos sztratoszféra magasság nálunk) a föld felületére lejusson, 200 napra van szüksége. A robbantások alkalmával a magasba került 0,4 mikronnyi, vagy annál kisebb átmérőjű részecskék tehát nagyon sokáig lebegnek az atmoszféra magas rétegeiben.

Az atmoszférába került idegen anyagokról más vonatkozásban is vannak adataink. Így pl. közismert, hogy a *Krakatoa* 1883. évi augusztusi kitörése alkalmával óriási tömegű szilárd anyag került a magas atmoszférába, amelynek tömege sok nagyságrenddel meghaladta az egy-egy atomrobbantásnál a levegőbe került anyagok mennyiségét. Ezen vulkáni kitörés után 3 év múlva is kimutatható volt a robbanási termékek jelenléte az atmoszférában. De más időjárási helyzetek alkalmával a nagy szélviharok fölkavarva a sivatagok porát, azt a tengeren és óceánon át szállítva többezer km-re viszik. Így pl. a Szahara pora az Alpokban és még nagyobb távolságban rakódik le, s ilyen jelenségek úgyszólván évről évre megismétlődnek.

Nincs tehát semmi rendkívüli abban, hogy az atomrobbantások alkalmával a magas atmoszférába lövellt hasadási termékek eljussanak hozzánk. Mi ennek a folyamatnak az útja? A robbanás alkalmával az uránium-hasadási termékek följutnak egészen a sztratoszféráig, itt azután belekerülnek a magaslégkör 80—100 km óránkénti sebességgel mozgó nyugati légáramlásába, mely keleti irányban tovaszállítja őket, de közben a kicserélődés útján a tovaszállítás irányától minden irányba a turbulencia útján szétszóródnak. A robbanás alkalmával attól függően, hogy azt a talaj közelében, vagy nagyobb magasságban robbantották, talaj- és vízrészecskék is fölkerülnek a magas légkörbe, amelyek a hasadási termékektől, vagy a neutron sugárzástól aktivitást nyertek. A dürvább részecskék fokozatosan kiesnek a levegőből, míg a finom anyagok az előbb vázolt számításnak megfelelően igen sokáig lebegnek a magasban. A magasban lebegő aktivált részecskék a szállító légtömegekkel egyetemben részt vesznek az időjárási folyamatokban, s egy részük a frontcsapadékok nyomán lekerülhet a Földre. Az aktivitás a robbantás helyétől számított nagyobb távolságban csakis a magasabb rétegekben lehet hosszabb időn keresztül magas. Néhány nappal a robbantás után ezek a részecskék még többé-kevésbé zárt tömeget alkotnak, hosszabb idő múlva azonban szétszóródnak, úgyhogy mire az alacsonyabb rétegekbe jutnak, rendkívüli módon felhígulnak. Ebből az elgondolásból *következik, hogy csakis olyan csapadékképző folyamatnál számíthatunk jelentősebb aktivitásra, amelynél a csapadékképzésben résztvevő levegő magas légrétegekből,* 6—8 km-nyi magasságból *származik.* Ez az eset nyilvánvalóan a betörési frontokkal és az ezekkel kapcsolatban levő záporesőkkel, zivatarokkal jár együtt.

C. H. JUNGE [15] kutatásai nyomán tudjuk, hogy az európai kontinens fölött a helyi eredetű szennyeződés csak mintegy 3 km magasságig terjed. Ez a szennyező anyag szintén lehet kondenzációs folyamatok megindítója, sőt arra is lehet számítani, hogy a betörési frontok nyomán a helyi szennyeződés följut azokba a nagy magasságokba, ahol a robbantások után bizonyos időpontban erős aktivitás van, és a csapadékkal az aktivitás egy részét lehozzák a talajra. A helyi eredetű szennyeződésnek ilyen szerepe azonban csak betörési frontokon lehet, míg a felsikló frontoknál, ahol a csapadékképzés folyamata a helyi eredetű szennyeződés magasságát alig múlja felül, ilyenre alig lehet számítani. E feltevés szerint az atmoszférában lebegő radioaktív szennyeződést záporok és betörési frontcsapadékok, amelyeknél a kondenzációs folyamatok nagy magasságba hatolnak fel, nagyobb mértékben hozzák le magukkal, mint a felsikló csapadékok.

Fel kell továbbá tételeznünk azt, hogy a nagy magasságokban lejátszódó csapadékképző folyamatokban a helyi eredetű és a robbantás helyéről származó szennyeződésen kívül bizonyos időjárási helyzetekben más eredetű szennyeződések is részt vehetnek. Erre különösen az úgynevezett V_b időjárási helyzeteknél lehet számítani.



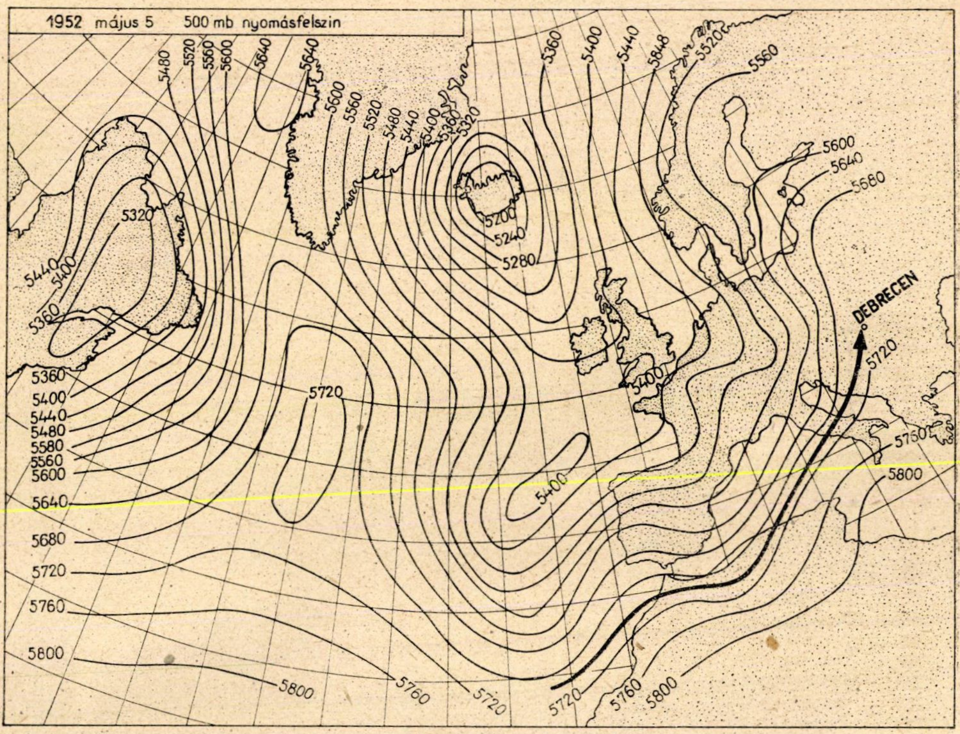
5. ábra. A közismert Bjerknes-féle ciklon sémát ábrázolja a frontfelületeken keletkező csapadékkal egyetemben. A légkör alsó részén a szennyeződést pontokkal jelöltük, míg a 8—10 km magasságban levő aktivitást keresztekkel. A csapadék aktiválódásának folyamata a betörési fronton az ábrából leolvasható.

A robbanásnál a magaslégkörbe lövellt részecske útja az idézett mű [7] 438. o. által közölt képlet alapján pontosan kiszámítható. Mivel azonban a képlet alkalmazásához szükséges adatok nem állnak rendelkezésünkre, a kérdést más irányból próbáljuk megközelíteni. A nevadai sivatagban végzett robbantások helye Debrecentől kb. 10 ezer km-nyi távolságra van, 100 km-es óránkénti sebességet föltételezve, a részecskék 4,2 nap alatt jutnak el hozzánk, ha a legnagyobb kör mentén, a legrövidebb út mentén mozognak. Mivel a tényleges út ennél hosszabb, 5—6 napra tehető az az időköz, amikor a maximális aktivitás a Debrecen fölötti légtérbe ér. A május 1-i robbantás az 5-i csapadékban jelentkezett és a részecske magassági útját Európa területén az 5-i, 5—6 km magasságot ábrázoló időjárási térképen megjelöltük (lásd a 6. ábrát); valószínűnek kell tartani, hogy nagyarányú aktivitásra a magaslégkörben csakis akkor számíthatunk, ha az aktivált részecskéket a sugáráram (jet-stream) hozza el hozzánk, ha azonban attól messze esünk, vagy a robbanási hely esett attól messze, akkor az aktivitás későbben fog jelentkezni és lényegesen kisebb lesz. Nem számíthatunk továbbá csapadékaktivitásra akkor sem, ha a robbanás földben, vagy vízben történt.

A második jelentősebb robbantás november elsején volt a Marshall-szigeteken. Ennek a helynek Debrecentől nyugati irányban mért távolsága

26 700 km. Minthogy az aktivitás nálunk 21 nap múlva jelentkezett, a továbbterjedés átlagsebessége 53 km/óra volt. Ez az adat egészen reálisnak vehető.

Az eddigi csapadékvizsgálati adatok nem nyújtanak még lehetőséget arra, hogy azokból a földi légcirkulációra vonatkozólag pontos következtetéseket vonjunk le. A Marshall-szigetek az egyenlítő közelében fekvő pont és



6. ábra. 1952. május 5-én a nyomás eloszlását ábrázolja, greenwichi időszámítás szerint hajnali 3 órakor, az 500 millibár felület izohipszái alapján. Azt az utat, amelyen az aktivált légtömeg Debrecen fölé érkezett, egy dupla vonallal jelölt nyíl mutatja. A görbe vonalakhoz írt számok geodinamikus métereket jelentenek.

a tény, hogy ennek a robbanásnak a termékei a debreceni csapadékban jelentkeztek, azt bizonyítják, hogy az északi féltekéhez tartozó trópusi légtér a magas rétegekben egységes részt képvisel a magasabb szélességekkel. Ez tökéletesen egybehangzik az általános légcirkulációról alkotott újabb felfogásokkal. A régi felfogás szerint a trópusok tájáról származó aktivitásnak a szubtrópusokon kellett volna leszállania és nem juthatott volna hozzánk. A déli és az északi félteke kapcsolatára vonatkozóan azonban az eddigi adatok alapján véleményt nem alkothatunk, noha föltételezhető, hogy abban az esetben, hogyha a trópusok közötti front (a téli évszakban) a déli féltekén tartózkodik, és a robbantás helye ettől északra van, úgy a robbantási termékek eljut-hatnak hozzánk, minthogy akkor az az északi félteke áramlási rendszerébe tartozik.

További probléma az aktivitás függőleges irányban való eloszlásának vizsgálata. Ez azonban csapadékvizsgálatokkal nem állapítható meg. Nem tudunk azonban még a különböző természetű frontális csapadékok aktivitásáról sem pozitív véleményt mondani, mivel sok esetben, nevezetesen az okkluziós frontok csapadékánál, a felsikló és a betörési csapadék a csapadékmérőből kivett esőben nem választható külön. Így az előbb közölt feltevésünk csak elmélet.

Az aktivitás vertikális eloszlása és a csapadékban jelentkező aktivitás nagysága érdekes volna, de csak repülőgéppel végzett anyaggyüjtéssel lehetne meghatározni. Valószínű azonban, hogy a csapadékon kívül is jutnak a földre radioaktív részecskék, ezek azonban a csapadékaktivitással nem határozhatók meg. Ennek részleteit lásd W. HERBST-nél [16].

A csapadékaktivitásokból is világosabb képet nyerhetünk akkor, ha a csapadékadatokat nem egy helyről, hanem az ország több pontjáról gyűjtjük be, de természetesen tökéletes képünk a dologról csak akkor lehetne, ha azt nagy területre kiterjedően (legalább egy kontinensnyi nagyságban) szinoptikusan vizsgálnánk. Szükséges volna továbbá a bepárolt csapadékból visszamaradt anyag mikroszkópikus, ásványtani vizsgálata, mely azok eredetére vetne fényt. Célszerű volna a levegőben lebegő por radioaktivitását is rendszeresen vizsgálni, ami a csapadékviszonyoktól függetlenül, rendszeresen kivitelezhető lenne.

Összefoglalás

A szerzők végablakos β-számlálócsöves Geiger—Müller számlálóberendezéssel vizsgálták a Debrecenben 1952. ápr. 22-től dec. 31-ig leesett esővíz radioaktivitását. Egyes időszakokban a csapadék radioaktivitást mutatott. A radioaktivitás a felezési idők alapján kétségtelenül atombombáktól eredő atomhasadási termékeknek bizonyult. Az anomális aktivitás pár napos késéssel időbeli korrelációban volt ugyanazon időszakban közzétett kísérleti atombomba robbantásokkal. Az aktivitás 10^{-11} Curie nagyságrendű volt 1/50 m^2 területre esett csapadékban. Ezt a föld felületével egybevetve, az aktivitás inkább látszik az egész földlégkör, vagy az északi félteke átlagos, mint véletlenül ide sodródott légtömegek aktivitásának. A vizsgálatokból úgy látszik, hogy elég érzékeny számlálóberendezéssel egy atombomba hasadási termékei igen nagy távolságban kimutathatók. Szerzők nézete szerint nemzetközileg megszervezett ilyen megfigyelésekkel az atomrobbantásokkal, vagy más módon aktivitással ellátott légtömegekkel az általános légcirkulációt, a légtömegek mozgását, az északi és déli féltekék közötti kicserélődését, ezen az úton is tanulmányozhatnánk, s ezzel a meteorológia legaktuálisabb kérdéseinek megoldását segítenénk elő.

Debrecen, Kísérleti Fizikai Intézet.
Debrecen, Meteorológiai Intézet.

IRODALOM

[1] NORMAN J. HOLTER and WILFORD R. GLASSCOCK, Tracing Nuclear Explosions, Nucleonics, Vol 10, 10—13, 1952.

[2] D. C. ROSE and J. KATZMAN, Radioactive Deposits Found at Ottawa. After the Atomic Explosions of January and February, 1951. Canadian Journ. of Physics, Vol 30, March 1952, Nr. 2, 111—116.

[3] HUBERT GARRIGUE, Comptes Rendus, Tome 233, 1447, 1951.

[4] HUBERT GARRIGUE, Sur la radioactivité anomale de l'atmosphere. Comptes Rendus, Tome 235, 1498—99, 1952.

[5] A. S. A. News, Vol 2, January 1953, 151—153.

[6] A. S. A. News, Vol 2, January 1953, 210—213.

[7] The Effects of Atomic Weapons, 250—252, Mc Graw Hill Boock Co, New-York, 1950.

[8] H. F. HUNTER, N. E. BALLOU, Nucleonics 9, No 5, 1951.

[9] Rev. Mod. Physics, Vol 8, 513, 1946.

[10] Bull. At. Sci., Vol VIII. 204, Nr 6, August 1952.

[11] M. EISENBUD and J. H. HARLEY, Radioactive Dust from Nuclear Detonations, Science, Vol 117, 141, 1953.

[12] W. W. MEINKE, Observations on Radioactive Snows at Ann-Arbor, Michigan, Science, Vol 113, 545, 1951.

[13] H. LOSZNITZER, Die Bedeutung der Strahlungsmessmethoden für die Dynamik der Athmosphäre. Ber. Dtsch. Wetterd. U. S. Zone. Nr. 35, 76—79.

[14] H. IZRAEL, Radioactivity of the atmosphere. Compendium of Meteorology, 1951, 157.

[15] C. H. JUNGE, Austausch und grossräumige Vertikalverteilung von Luftbeimengungen. Annalen der Meteorologie, 1951, 7—9.

[16] W. HERBST, Radioactive Isotope in der meteorologischen und angewandtmeteorologischen Forschung. Annalen der Meteorologie, 1952, 6.

K. SCHRÖTER EGY, AZ ÁLTALÁNOS REKURZÍV FÜGGVÉNY FOGALMÁNAK DEFINÍCIÓJÁRA VONATKOZÓ PROBLÉMÁJÁNAK MEGOLDÁSA

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag

Péter Rózsának, a rekurzív függvények világszerte elismert kutatójának 50. születésnapjára

A Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében a Német Demokratikus Köztársaságban tett tanulmányutam alkalmával több tudományos előadást tartottam különböző egyetemeken; közülük kettőt a berlini matematikai kollokviumon. Az egyik előadásom kapcsán, 1954. november 22-én, K. SCHRÖTER professzor felvetett egy problémát az általános rekurzív függvény fogalmának definíciójára vonatkozóan. A jelen dolgozat — a szükséges fogalmak és tételek ismertetése[1] után — e probléma megoldását tartalmazza.

1. *Az általános rekurzív függvény fogalma.* Az általános rekurzív függvények bizonyos tulajdonságú *függvényegyenletrendszerek* által definiált aritmetikai függvények. (Aritmetikai függvényen olyan egy- vagy többváltozós függvényt értünk, amely független változójának vagy változóinak nemnegatív egész számú értékeire van értelmezve és értékei is nemnegatív egész számok.) A függvényegyenletrendszer minden egyes egyenletének bal- és jobboldala adott nemnegatív egész számokból és a nemnegatív egész számokon átfutó változókból az egyetlen $y = x+1 = x'$ ismert függvény, valamint a függvényegyenlet által definiált ismeretlen függvények véges számú alkalmazásával felépülő *kifejezés.* A nemnegatív egész számokon átfutó változókat, az ún. *számváltozókat,* az x, y, z betűkkel jelölöm; minthogy azonban valamely általános rekurzív függvény definíciójául szolgáló függvényegyenletrendszerben akárhány számváltozó előfordulhat, felteszem, hogy megszámlálhatóan[2] végtelen sok számváltozó rendelkezésre áll (pl. $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$). Az ismeretlen függvények jelölésére az f, g, h, a, b, c, d betűket használom; minthogy valamely általános rekurzív függvény definíciójául szolgáló függvényegyenletrendszerben akárhány ismeretlen függvény szerepelhet, felteszem, hogy megszámlálhatóan[2] végtelen sok ilyen, függvények jelölésére szolgáló jel, ún.

[1] Ez az ismertető rész (**1., 2.** és **3.** pont) nem tartalmaz új eredményt, azonban lehetővé teszi, hogy e dolgozatot a rekurzív függvények elméletére vonatkozó előismeretek nélkül is meg lehessen érteni.

[2] Minthogy egy-egy függvényegyenletrendszerben csak véges számú számváltozó fordulhat elő és csak véges számú ismeretlen függvény szerepelhet, és minthogy mellékes, hogy a függvényegyenletrendszerben szereplő tetszőleges nemnegatív egész számokat és ismeretlen függvényeket hogyan jelöljük, megszámlálhatóan végtelen sok számváltozó és funktor biztosan elég bármely függvényegyenletrendszer felírásához.

funktor rendelkezésre áll (pl. $f, g, h, a, b, c, d, f_1, g_1, h_1, a_1, b_1, c_1, d_1, f_2, g_2, h_2, a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots$). Egy-egy funktort egy és ugyanazon függvényegyenletrendszerben mindig ugyanazon ismeretlen függvény, tehát mindig ugyanannyi változós ismeretlen függvény jelölésére használok, tehát kerülni fogom azt, hogy egy függvényegyenleten belül pl. $f(x)$ is, $f(x, y)$ is előforduljon. Ezért kikötöm, hogy minden egyes funktorhoz hozzá van rendelve egy pozitív egész szám, mint a funktor által jelölhető függvény független változóinak száma; ezt a számot a kérdéses funktor *argumentumszámának* nevezzük. Minthogy valamely általános rekurzív függvény definíciójául szolgáló függvényegyenletrendszerben akárhány változós ismeretlen függvényből akárhány előfordulhat, felteszem, hogy $r = 1, 2, 3, \ldots$ esetén végtelen sok r argumentumszámú funktor rendelkezésre áll.

Az általános rekurzív függvények definíciójául szolgáló függvényegyenletrendszerben szereplő egyetlen adott függvényt mindig így jelölöm: $y = x'$; itt tehát x' a természetes számsorban[3] a közvetlenül az x-szel jelölt nemnegatív egész szám után következő egész számot jelöli (pl. $0' = 1$, $1' = 2$, $2' = 3, \ldots, 9' = 10$, $10' = 11, \ldots, 99' = 100, \ldots$). Ennélfogva a pozitív egész számokat a szokásos $1, 2, 3, \ldots$ jelölés helyett így is jelölhetjük: $0', 0'', 0''', \ldots$. Ez a gyakorlati szempontból kényelmetlen jelölés az alábbi elméleti meggondolások szempontjából célszerűbb lesz, mint az $1, 2, 3, \ldots$ jelölés; ezért felteszem, hogy az általános rekurzív függvények definíciójául szolgáló függvényegyenletrendszerekben az adott nemnegatív egész számok mindenütt csak $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ alakban fordulnak elő.

Ezek előrebocsátása után pontosan definiálhatjuk, mit értünk (az általános rekurzív függvények definíciójául szolgáló függvényegyenletrendszerek egyenletei bal- és jobboldalán előfordulható) kifejezésen. A definíció a kifejezés komplikáltságát jelző *rendszáma* szerinti rekurzióval történik; később azonban nem lesz szükség a rendszám fogalmára.

0-adrendű kifejezésen értjük a 0 konstanst és a számváltozók bármelyikét. Ha már tudjuk, mi az az n-edrendű vagy alacsonyabbrendű kifejezés, akkor $n+1$*-edrendű kifejezésen* bármely $\mathbf{f}(K_1, K_2, \ldots, K_r)$ alakú jelsorozatot[4] értünk, ahol $\mathbf{f}$ helyén akármelyik r argumentumszámú funktor állhat[5], $K_1, K_2, \ldots, K_r$ pedig legfeljebb n-edrendű kifejezések, amelyek közül legalább egy pontosan n-edrendű, továbbá bármely K' alakú jelsorozatot[4], ahol K valamely n-edrendű

[3] A 0-t is a természetes számsorhoz számítom.

[4] A definícióból világos, hogy minden kifejezés — alakját tekintve — a 0 konstansból, a számváltozókból, a ′ jelből, a funktorokból és a (,) és , (kezdőzárójel, végzárójel és vessző) írásjelekből álló véges sorozat. Jelentését tekintve minden kifejezés valamely nemnegatív egész számot jelöl, amelynek értéke általában attól függ, milyen aritmetikai függvényeket jelölünk a benne előforduló funktorokkal és milyen nemnegatív egész számú értékeket adunk a benne előforduló számváltozóknak.

[5] Kövér kisbetűvel általában a funktorok közül valamelyik tetszőlegeset jelöljük.

kifejezés. *Kifejezésen* értünk bármely olyan K jelsorozatot[4], amelyhez van olyan n nemnegatív egész szám, hogy K n-edrendű kifejezés[6].

Pl. $0, x, y, z$ 0-adrendű kifejezések; $0', x', y', z'$ és (ha pl. az f, g, h funktorok argumentumszáma sorra 2, 2, 1) $f(0,0), f(x,x), f(x,y), f(y,x), g(0,0), h(0), h(x)$ elsőrendű kifejezések; $0'', x'', f(0',0'), f(0,0'), f(0,x'), f(0,0)', f(x,0)', f(x,y)', f(x,h(x)), f(g(x,y),h(0)), h(h(0)), h(0'), h(0)', h(x'), h(x)'$ másodrendű kifejezések; $0''', x''', f(0,0''), f(0,0')', f(0,0)'', f(x,y''), f(x',y''), f(x,y')', f(x,y)'', f(g(x,h(y)),z), f(0,h(h(x))), h(h(h(x))), h(f(x,y)'), h(f(x,g(x,0)))$ harmadrendű kifejezések. A fentieknek megfelelően *nemnegatív egész számokon* (röviden: számokon) a $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ kifejezéseket értjük.

Függvényegyenleten (röviden: egyenleten) $K = L$ alakú jelsorozatot értünk, ahol K és L kifejezések; *függvényegyenletrendszeren* (röviden: egyenletrendszeren) pedig olyan véges halmazt[7], amelynek elemei függvényegyenletek.

Pl.

$$\begin{aligned} 0 &= 0, \\ 0'' &= 0, \\ 0' &= x, \\ f(x, f(y,z)) &= f(f(x,y), z), \\ h(f(x,y)) &= f(h(x), h(y)), \\ h(h(x)) &= x'' \end{aligned}$$

függvényegyenletek,

$$\left\{\begin{aligned} x &= 0, \\ f(x,x) &= 0', \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} f(x,0) &= x, \\ f(x,y') &= f(x,y)', \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} f(x,y) &= f(y,x), \\ f(x,f(y,z)) &= f(f(x,y),z), \\ f(x,x) &= h(x), \\ h(f(x,y)) &= h(f(x), f(y)) \end{aligned}\right.$$

függvényegyenletrendszerek. Minden függvényegyenlet magában is függvényegyenletrendszert alkot.

[6] A kifejezés rendszáma fogalmának, amelyre kizárólag csak azért van szükség, hogy szerinte haladó rekurzióval definiálhassuk a kifejezés fogalmát, kiküszöbölésére szokás az ilyenféle definíciót a következő alakban is kimondani: a 0 konstans és a számváltozók kifejezések; ha $K_1, K_2, \ldots, K_r$ már kifejezések, $\mathfrak{f}$ pedig valamely r argumentumszámú funktor, akkor $\mathfrak{f}(K_1, K_2, \ldots, K_r)$ is kifejezés; ha K már kifejezés, akkor K' is kifejezés; más nem kifejezés. Halmazelméleti alakban így mondhatnók ki ezt a definíciót: a kifejezések halmazán értjük mindazon halmazok metszetét, amelyeknek a 0 konstans és bármely számváltozó eleme, továbbá, valahányszor $K_1, K_2, \ldots, K_r$ elemei és $\mathfrak{f}$ valamely r argumentumszámú funktor, akkor $\mathfrak{f}(K_1, K_2, \ldots, K_r)$ is eleme, és valahányszor K eleme, K' is eleme.

[7] A függvényegyenletrendszerhez tartozó függvényegyenletek sorrendje nem lényeges.

Egy F függvényegyenletről azt mondjuk, hogy valamely E függvényegyenletből *specializálással* keletkezik, ha F úgy jön létre E-ből, hogy egy vagy több számváltozó helyébe, mindenütt, ahol E baloldalán vagy jobboldalán előfordul, egy-egy tetszőleges számot (azaz a $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ kifejezések valamelyikét) helyettesítjük, azonban ugyanazon számváltozó helyébe mindenütt, ahol előfordul, egy és ugyanazt a számot. Pl. az $f(x, 0) = x$ függvényegyenletből az $f(0'', 0) = 0''$ egyenlet, vagy az $f(x, y') = f(x, y)'$ függvényegyenletből az $f(0'', 0') = f(0'', 0)'$ egyenlet specializálással keletkezik (az előbbi esetben x helyébe $0''$-t helyettesítettünk; az utóbbi esetben egyidejűleg helyettesítettünk x helyébe $0''$-t, y helyébe pedig 0-t). De specializálással (ti. y helyébe $0'$ helyettesítésével) keletkezik az $f(x, y') = f(x, y)'$ függvényegyenletből az $f(x, 0'') = f(x, 0')'$ egyenlet is.

Egy F függvényegyenletről azt mondjuk, hogy valamely E függvényegyenletből valamely G függvényegyenlet *alkalmazásával* keletkezik, ha F úgy jön létre E-ből, hogy a G baloldalán álló kifejezést egy vagy több helyen, ahol E-ben (akár baloldala, akár jobboldala részeként, esetleg E baloldalaként vagy jobboldalaként) előfordul, a G jobboldalán álló kifejezéssel pótoljuk. Pl. az $f(0'', 0') = f(0'', 0)'$ egyenletből az $f(0'', 0) = 0''$ egyenlet alkalmazásával az $f(0'', 0') = 0'''$ egyenlet keletkezik; az $f(f(x, x), f(x, x)) = f(f(x, x), 0)$ függvényegyenletből az $f(x, x) = h(x)$ függvényegyenlet alkalmazásával az $f(h(x), f(x, x)) = f(f(x, x), 0)$, $f(f(x, x), h(x)) = f(f(x, x), 0)$, $f(f(x, x), f(x, x)) = f(h(x), 0)$, $f(h(x), h(x)) = f(f(x, x), 0)$, $f(h(x), f(x, x)) = f(h(x), 0)$, $f(f(x, x), h(x)) = f(h(x), 0)$, $f(h(x), h(x)) = f(h(x), 0)$ függvényegyenletek bármelyike keletkezhetik (aszerint, hogy mely helyen vagy helyeken pótoljuk $f(x, x)$-et $h(x)$-szel); a $h(f(x, y)) = f(h(x), h(y))$ függvényegyenletből a $h(f(x, y)) = f(h(y), h(x))$ függvényegyenlet alkalmazásával az $f(h(y), h(x)) = f(h(x), h(y))$ függvényegyenlet keletkezik.

Egy F függvényegyenletről azt mondjuk, hogy valamely R függvényegyenletrendszer *triviális következménye*, ha az R egyenleteiből véges számú specializálással és alkalmazással (ti. akár az R egyenleteinek, akár a belőlük már véges számú specializálással és alkalmazással megkapott egyenleteknek alkalmazásával) keletkezik. A definíció világosabb lesz, ha a triviális következmény fogalmát a specializálások és alkalmazások együttes száma szerinti rekurzióval definiáljuk; ezt a számot a triviális következmény *rendszámának* nevezzük.

Egy F függvényegyenletet valamely R függvényegyenletrendszer 0-*adrendű triviális következményének* nevezzük, ha az R egyenleteinek valamelyike. Ha már tudjuk, mit jelent az, hogy egy függvényegyenlet valamely függvényegyenletrendszer n-edrendű vagy alacsonyabbrendű triviális következménye, akkor azon, hogy egy F függvényegyenlet valamely R függvényegyenletrendszer $n+1$-*edrendű triviális következménye*, azt értjük, hogy vagy specializálással keletkezik R valamely n-edrendű triviális következményéből, vagy pedig

R valamely legfeljebb n-edrendű E triviális következményéből R valamely legfeljebb n-edrendű G triviális következményének alkalmazásával keletkezik, de E és G közül legalább az egyik pontosan n-edrendű triviális következménye R-nek. Egy F függvényegyenletről akkor mondjuk, hogy valamely R függvényegyenletrendszer *triviális következménye*, ha van legalább egy[8] olyan n nemnegatív egész szám, hogy F az R-nek n-edrendű triviális következménye[9].

A *triviális* jelzőt azért célszerű alkalmazni, mert valamely R függvényegyenletrendszer *következményén* bármely olyan függvényegyenletet természetes érteni, amelyet R minden megoldása, azaz minden olyan függvényrendszer kielégít, amely R mindegyik egyenletét, az R-ben előforduló számváltozók minden értéke esetén, kielégíti. Világos, hogy valamely R függvényegyenletrendszer minden triviális következménye ilyen értelemben is következménye R-nek (feltéve, hogy olyan esetben, amikor R-nek egyáltalában nincs megoldása, bármely függvényegyenletet R következményének tekintünk)[10]. Fordítva azonban ez nem áll, van olyan R függvényegyenletrendszer, amelynek nem minden következménye triviális következménye. Ez adódik a jelen dolgozat eredményéből is, de egyszerűbben is bebizonyítható[11].

[8] Könnyen meggyőződhetünk, hogy előfordulhat, hogy egy és ugyanazon függvényegyenlet valamely függvényegyenletrendszernek különböző rendű triviális következménye.

[9] A triviális következmény rendszáma fogalmának kiküszöbölésére a következőképpen is kimondhatjuk a triviális következmény fogalmának definícióját (lásd a 6. lábjegyzetet): egy R függvényegyenletrendszer triviális következményének nevezzük R egyenleteit, továbbá bármely olyan függvényegyenletet, amely R valamely triviális következményéből specializálással, vagy R valamely másik triviális következményének alkalmazásával keletkezik, más függvényegyenletet azonban nem.

[10] Természetesen jogosan nevezhetnők még R bizonyos más következményeit is triviális következményeinek (pl. azokat, amelyekhez számváltozók helyébe *tetszőleges* kifejezések (nemcsak számok) helyettesítésével, továbbá az R-hez tartozó, vagy véges számú ilyen helyettesítéssel és alkalmazással már megkapott egyenletek alkalmazásával juthatunk; vagy bármely $K=K$ alakú egyenletet; vagy azokat, amelyekhez a fenti eljárásokon kívül az egyenletek bal- és jobboldalának felcserélésével juthatunk); azonban a továbbiakban mindig a fent definiált értelemben értjük majd a triviális következmény fogalmát.

[11] Pl. az

$$\begin{cases} f_1(x,0)=x, \\ f_1(x,y')=f_1(x,y)', \\ f_2(x,0)=0, \\ f_2(x,y')=f_1(x,f_2(x,y)), \\ c(f_1(x,y),x)=0, \\ c(x,f_1(x,y'))=0', \\ f_2(h(x),c(h(x),y))=0 \end{cases}$$

függvényegyenletrendszernek a $h(x)=0$ egyenlet következménye (mert az első hat egyenletének csak az $f_1(x,y)=x+y$, $f_2(x,y)=xy$ és

$$c(x,y)=\begin{cases} 0, \text{ ha } x\geqq y, \\ 1, \text{ ha } x<y \end{cases}$$

Egy R függvényegyenletrendszerről azt mondjuk, hogy valamely benne szereplő, azaz valamely R-ben előforduló $\mathbf{f}$ funktorral jelölt, függvény *értékeit meghatározza,* ha tetszőleges $n_1, n_2, \ldots, n_r$ nemnegatív egész számokhoz (azaz $0''\cdots'$ alakú kifejezésekhez), ahol r az $\mathbf{f}$ funktor argumentumszáma, egy és csak egy olyan m nemnegatív egész szám van, hogy az $\mathbf{f}(n_1, n_2, \ldots, n_r) = m$ egyenlet triviális következménye R-nek.

Pl. az

$$S \begin{cases} f_1(x, 0) = x, \\ f_1(x, y') = f_1(x, y)' \end{cases}$$

függvényegyenletrendszer az f_1 függvény értékeit egyértelműen meghatározza. Valóban, legyen k és n két tetszőleges nemnegatív egész szám. Mindenekelőtt bebizonyítjuk, hogy *van* olyan m nemnegatív egész szám, hogy az $f_1(k, n) = m$ egyenlet triviális következménye az S egyenletrendszernek. Valóban, ez áll, ha $n = 0$; ugyanis S első egyenletében x helyébe k-t helyettesítve adódik, hogy az $f_1(k, 0) = k$ egyenlet triviális következménye S-nek. Ha állításunk valamely n nemnegatív egész számra igaz, akkor igaz n'-re is. Ugyanis S második egyenletében x helyébe k-t, y helyébe n-et helyettesítve adódik, hogy az $f_1(k, n') = f_1(k, n)'$ egyenlet triviális következménye S-nek; ebből az egyenletből, az $f_1(k, n) = m$ egyenletet alkalmazva, amely az indukciós feltevés szerint triviális következménye S-nek, adódik, hogy az $f_1(k, n') = m'$ egyenlet is triviális következménye S-nek. Az, hogy adott k és n nemnegatív egész számokhoz *csak egy* olyan m nemnegatív egész szám lehet, ti. k és n összege, hogy az $f_1(k, n) = m$ egyenlet triviális következménye S-nek, pl. abból adódik, hogy az $f_1(x, y) = x + y$ függvény kielégíti az S függvényegyenletrendszert. Valóban, ha $f_1(x, y) = x + y$, akkor tetszőleges x nemnegatív egész szám esetén $f_1(x, 0) = x + 0 = x$ és tetszőleges x és y nemnegatív egész számok esetén $f_1(x, y') = x + y' = x + y + 1 = f_1(x, y)'$. Ennélfogva az $f_1(x, y) = x + y$ függvény kielégíti az S függvényegyenletrendszer bármely (triviális vagy nem triviális) következményét; így, ha az $f_1(k, n) = m$ egyenlet következménye S-nek, akkor[12] $m = k + n$. Ilyen értelemben tehát az S egyenlet-

függvények tesznek eleget és így a hetedik egyenlete azt mondja ki, hogy (bármely x-re és y-ra) vagy $h(x) = 0$, vagy $h(x) \geqq y$; minthogy az utóbbi nem állhat adott x esetén bármely y-ra, tehát csak a $h(x) = 0$ függvény tesz eleget az egész függvényegyenletrendszernek); azonban könnyen meg lehet mutatni, hogy nem triviális következménye (ennek az az oka, hogy a hetedik egyenletből y helyébe véges számú szám helyettesítésével csupa olyan egyenlet keletkezik, amelynek még más h függvény is eleget tesz, pl. bármely olyan konstans, amely nagyobb, vagy ugyanakkora, mint a helyettesített véges számú szám bármelyike). — A fenti példa nem a legegyszerűbb példa valamely függvényegyenletrendszer nem triviális következményére, azonban módot ad arra, hogy az olvasó előre megismerje a SCHRÖTER-féle probléma megoldásának alapgondolatát.

[12] Itt természetesen m azt a *kifejezést* jelöli, amely a $k + n$ nemnegatív egész számot állítja elő $0''\cdots'$ alakban (tehát 0-t annyi vesszővel, amennyi a k és az n kifejezésekben együttvéve van a 0 után). Hasonló értelemben beszélünk később majd ($k > n$ esetén) $k - n - 1$-ről, ill. ($k < n$ esetén) $n - k - 1$-ről.

rendszer az $f_1(x, y) = x + y$ függvény értékeit határozza meg. Hasonlóan látni, hogy a

$$P \begin{cases} f_1(x, 0) = x, \\ f_1(x, y') = f_1(x, y)', \\ f_2(x, 0) = 0, \\ f_2(x, y') = f_1(x, f_2(x, y)) \end{cases}$$

egyenletrendszer meghatározza az $f_1(x, y) = x + y$ és $f_2(x, y) = xy$ függvények értékeit, a

$$Q \begin{cases} f_1(x, 0) = x, \\ f_1(x, y') = f_1(x, y)', \\ f_2(x, 0) = 0, \\ f_2(x, y') = f_1(x, f_2(x, y)), \\ f_3(x, 0) = 0', \\ f_3(x, y') = f_2(x, f_3(x, y)) \end{cases}$$

egyenletrendszer pedig a $f_1(x, y) = x + y$, $f_2(x, y) = xy$ és $f_3(x, y) = x^y$ függvények értékeit.

Az S, P, Q egyenletrendszerek példát szolgáltatnak ún. primitív rekurzióval való definícióra. Általában *primitív rekurzióval való definíciónak* nevezünk minden

$$R \begin{cases} \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \ldots, x_{r_1-1}, 0) = K_1, \\ \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \ldots, x_{r_1-1}, x'_{r_1}) = L_1, \\ \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \ldots, x_{r_2-1}, 0) = K_2, \\ \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \ldots, x_{r_2-1}, x'_{r_2}) = L_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{f}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{r_n-1}, 0) = K_n, \\ \mathbf{f}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{r_n-1}, x'_{r_n}) = L_n \end{cases}$$

alakú függvényegyenletrendszert, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén r_i az $\mathbf{f}_i$ funktor argumentumszáma, K_i olyan kifejezés, amelyben nem fordul elő más számváltozó, mint $x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}$ és nem fordul elő más funktor, mint $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{i-1}$ (tehát K_1-ben egyáltalában nem fordul elő funktor), L_i pedig olyan kifejezés, amelyben nem fordul elő más számváltozó, mint $x_1, x_2, \ldots, x_{r_i}$ és nem fordul elő más funktor, mint $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_i$, de $\mathbf{f}_i$ is csak az $\mathbf{f}_i(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}, x_{r_i})$ kifejezésben fordul elő L_i-ben; továbbá minden olyan függvényegyenletrendszert, amely R-ből egy

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = K$$

alakú egyenlet hozzávételével keletkezik, ahol r az $\mathbf{f}$ funktor argumentumszáma, K pedig olyan kifejezés, amelyben nem fordul elő más számváltozó, mint $x_1, x_2, \ldots, x_r$ és nem fordul elő más funktor, mint $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. (Meg van engedve $n = 0$ is; ez esetben a primitív rekurzió egyedül az $\mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = K$ egyenletből áll és itt K-ban egyáltalában nem fordul elő funktor.) Pl.

az az egyenletrendszer, amely egyedül az $f(x)=0''$ egyenletből áll, továbbá az

$$A\ \begin{cases} a(0)=0' \\ a(x')=0, \end{cases}$$

egyenletrendszer és a P-ből a

$$d(x,y,z)=f_2(f_2(x,y),z)$$

egyenlet hozzávételével keletkező P' függvényegyenletrendszer is primitív rekurzióval való definíció; hasonlóan a Q-ból az

$$f_4(x,0)=0',$$
$$f_4(x,y')=f_3(x,f_4(x,y))$$

egyenletek hozzávételével keletkező Q' függvényegyenletrendszer is.

Meg lehet mutatni, hogy minden primitív rekurzióval való definíció meghatározza minden benne szereplő (funktorral jelölt) függvény értékeit. Az olyan aritmetikai függvényt, amelyhez van olyan primitív rekurzióval való definíció, amely (többek között) a kérdéses függvény értékeit meghatározza, *primitív rekurzív függvénynek* nevezzük[13]. Pl. a fentiek szerint $x+y$, xy, x^y, $0''$, továbbá az A egyenletrendszer által definiált a függvény (amelynek értéke a 0 helyen 1, a pozitív egész helyeken pedig 0), a P' egyenletrendszer által (az $f_1(x,y)=x+y$ és $f_2(x,y)=xy$ függvényekkel együtt) definiált $d(x,y,z)=xyz$ függvény, valamint a Q' egyenletrendszer által (az $f_1(x,y)=x+y$, $f_2(x,y)=xy$ és $f_3(x,y)=x^y$ függvényekkel együtt) definiált

$$f_4(x,y)=x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$$

függvény, ahol az x-ek száma y (és $y=0$ esetén $f_4(x,y)=1$), primitív rekurzív függvények.

Azonban a primitív rekurzióval való definíciókon kívül még más olyan függvényegyenletrendszerek is vannak, amelyek meghatározzák a bennük szereplő függvények értékeit. Ilyen pl. a

$$B\ \begin{cases} f_1(x,0)=x, \\ f_1(x,y')=f_1(x,y)', \\ b(x,x)=0, \\ b(f_1(x,y'),x)=0', \\ b(x,f_1(x,y'))=0' \end{cases}$$

függvényegyenletrendszer, amely nyilván nem primitív rekurzióval való definíció. Valóban, azt már láttuk, hogy a B egyenletrendszer első két egyenletéből álló S függvényegyenletrendszer meghatározza az $f_1(x,y)=x+y$ függvény értékeit; tehát nyilván csak azt kell megmutatni, hogy B meghatározza

[13] Könnyen látható, hogy ez a definíció ekvivalens a primitív rekurzív függvény fogalmának szokásos definíciójával, pl. azzal, amely PÉTER RÓZSA [2] könyvének 25. oldalán szerepel. (A nevek után szögletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén található irodalomra utalnak.)

a b függvény értékeit is, vagyis, hogy tetszőleges k és n nemnegatív egész számokhoz egy és csak egy olyan m nemnegatív egész szám van, hogy a $b(k, n)=m$ egyenlet triviális következménye B-nek. Valóban, ilyen m van, ha n ugyanaz a szám, mint k, mert akkor a $b(k, k)=0$ egyenlet a B egyenletrendszer harmadik egyenletéből specializálással keletkezik. Ellenkező esetben van olyan p nemnegatív egész szám (ti. $k>n$ esetén $p=k-n-1$, $k<n$ esetén pedig $p=n-k-1$), hogy vagy $k=n+p'$, vagy $n=k+p'$. Az első esetben az $f_1(n, p')=k$, a másodikban az $f_1(k, p')=n$ egyenlet triviális következménye B-nek (mert a B egyenletrendszer meghatározza az $f_1(x, y)=x+y$ függvény értékeit). Ugyancsak triviális következményei B-nek a

$$b(f_1(n, p'), n)=0',$$
$$b(k, f_1(k, p'))=0'$$

egyenletek is, amelyek B két utolsó egyenletéből specializálással keletkeznek. Ennélfogva a $b(k, n)=0'$ egyenlet is triviális következménye B-nek, hiszen ez akár a $b(f_1(n, p'), n)=0'$ egyenletből az $f_1(n, p')=k$ egyenlet alkalmazásával, akár a $b(k, f_1(k, p'))=0'$ egyenletből az $f_1(k, p')=n$ egyenlet alkalmazásával megkapható és, mint láttuk, az $f_1(n, p')=k$ és $f_1(k, p')=n$ egyenletek közül valamelyik triviális következménye B-nek. Eszerint minden esetben van olyan m nemnegatív egész szám, ti. $n=k$ esetben 0, különben 0′, hogy a $b(k, n)=m$ egyenlet triviális következménye B-nek. Hogy csak egy ilyen szám lehet, az az S függvényrendszerrel kapcsolatban mondottakhoz hasonló módon adódik abból, hogy az $f_1(x, y)=x+y$ és a

$$b(x, y)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x=y, \\ 1, & \text{ha } x\neq y \end{cases}$$

függvények kielégítik a B függvényegyenletrendszert. Eszerint a B egyenletrendszer az $f_1(x, y)=x+y$ és a fenti $b(x, y)$ függvények értékeit határozza meg.

Hasonló módon adódik, hogy a

$$C\begin{cases} f_1(x, 0)=x, \\ f_1(x, y')=f_1(x, y)', \\ c(f_1(x, y), x)=0, \\ c(x, f_1(x, y'))=0' \end{cases}$$

függvényegyenletrendszer, amely szintén nem primitív rekurzióval való definíció, meghatározza az $f(x, y)=x+y$ és a

$$c(x, y)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x\geqq y, \\ 1, & \text{ha } x<y \end{cases}$$

függvény értékeit.

Könnyen meg lehet mutatni, hogy a B, ill. C függvényegyenletrendszer által definiált b és c függvények primitív rekurzív függvények, azaz van primitív rekurzióval való definíciójuk is[14]. Meg lehet azonban mutatni, hogy van olyan függvényegyenletrendszer is, amely meghatározza a benne szereplő függvények értékeit, bár azok nem mind primitív rekurzív függvények. Ilyen pl. a

$$Q'' \begin{cases} d_1(x,y,0) = x+y, \\ d_1(x,0,0') = 0, \\ d_1(x,0,0'') = 0', \\ d_1(x,0,z''') = x, \\ d_1(x,y',z') = d_1(x, d_1(x,y,z'), z) \end{cases}$$

függvényegyenletrendszer, amely egy olyan d_1 függvény[15] értékeit határozza meg, amelyről ACKERMANN [1] bebizonyította, hogy nem primitív rekurzív függvény. (Később PÉTER RÓZSA [1] egy hasonló, de egyszerűbb egyenletrendszerrel definiált függvényről mutatta ki, hogy nem primitív rekurzív függvény.)

A Q'' (és a [15] lábjegyzetben szereplő Q''') egyenletrendszer két változó (y és z) szerint haladó, ún. kétszeres rekurzióval való definíció. Az ilyen definíció a primitív rekurzióval való definíció legegyszerűbb olyan általánosítása, amely már nem minden esetben pótolható primitív rekurzióval való definícióval. A primitív rekurzióval való definíciónak még több, bonyolultabb általánosítása ismeretes[16]; ezek mind olyan egyenletrendszerek, amelyek a definiálandó függvény (és a definíciójához szükséges esetleges „segédfüggvények") értékeit meghatározzák. Ez a körülmény indokolja a következő definíciót:

Általános rekurzióval való definíción (röviden: *általános rekurzív definíción*) *b á r m e l y olyan függvényegyenletrendszert értünk, amely minden benne szereplő függvény értékeit meghatározza. Az olyan aritmetikai függvényeket,*

[14] Ez adódik pl. abból, hogy (PÉTER RÓZSA [2] művének jelöléseivel) $b(x,y) = \mathrm{sg}(|x-y|)$, $c(x,y) = \mathrm{sg}(y \dot{-} x)$ és hogy $y \dot{-} x$, $\mathrm{sg}(x)$ és $|x-y|$ primitív rekurzív függvények; lásd PÉTER RÓZSA [2], 6., 7. és 12. oldal.

[15] Könnyen látható, hogy $d_1(x,y,0) = f_1(x,y) = x+y$, $d_1(x,y,1) = f_2(x,y) = xy$, $d_1(x,y,2) = f_3(x,y) = x^y$, $d_1(x,y,3) = f_4(x,y+1) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$ (az x-ek száma $y+1$) és általában $d_1(x,y,z)$ jelentése: a $z+1$-edik direkt „alapművelet" az x „alapon" és y „kitevőn" elvégezve. Az ACKERMANN által választott $d_1(x,0,z) = x$ definíció ($z \geqq 3$ esetén) önkényes, logikusabb volna a definíciót úgy módosítani, hogy $z \geqq 3$ esetén $d_1(x,0,z) = 1$ legyen (mint $z = 2$ esetén is). Ez esetben $d_1(x,y,3) = f_4(x,y) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$ volna, ahol az x-ek száma y és a (módosított) $d_1(x,y,z)$ függvényt az egyszerűbb

$$Q''' \begin{cases} d_1(x,y,0) = x+y, \\ d_1(x,0,0') = 0, \\ d_1(x,0,z'') = 0', \\ d_1(x,y',z') = d_1(x, d_1(x,y,z'), z) \end{cases}$$

egyenletrendszerrel lehetne definiálni, amely ugyancsak meghatározza a d_1 függvény értékeit.

[16] Ezeket az általánosításokat meg lehet ismerni PÉTER RÓZSA [2] művéből; ott további irodalmi utalásokat is talál az e kérdések iránt érdeklődő olvasó.

amelyekhez van olyan általános rekurzív definíció, amely (többek között) a kérdéses függvény értékeit meghatározza, általános rekurzív függvényeknek nevezzük[17].

2. *Schröter problémája.* Az általános rekurzióval való definíció fogalma merész általánosítást tartalmaz, amennyiben a definíció gyanánt szolgáló függvényegyenletrendszer alakjáról semmit sem köt ki, ellentétben a primitív rekurzióval való definícióval és annak egyéb általánosításaival, amelyeknek éppen az alakjuk adja meg a jellegüket. Ennek a merész általánosításnak köszönhető, hogy a tapasztalat szerint minden olyan függvénydefiníció, amelynek alapján a definiált aritmetikai függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, átalakítható általános rekurzióval való definícióvá (amennyiben eredetileg nem az), úgy, hogy az általa definiált függvény általános rekurzív függvénynek bizonyul.

Azt a tényt, hogy ez valóban mindig így van, természetesen addig nem lehet szabatosan bebizonyítani, amíg szabatosan nem definiáljuk, mit értünk olyan aritmetikai függvényen, amelynek értékét bármely adott helyen, a függvény definíciója alapján, véges számú lépésben ki lehet számítani, röviden: „kiszámítható" függvényen. A kiszámítható függvény fogalmának többen is javasolták egy-egy definícióját (l. pl. CHURCH [1], TURING [1], MARKOV [1]); e definíciók bármelyike alapján valóban sikerült is megmutatni, hogy a kérdéses definíció értelmében kiszámítható függvények osztálya azonos az általános rekurzív függvények osztályával (l. KLEENE [2], ill. TURING [2]; MARKOV szóbeli közlése szerint ez az ő definíciójára is áll). E definíciók mindegyike olyan, hogy lerögzíti az aritmetikai függvények definiálásának egy módját; mindegyik esetén világos, hogy a kérdéses módon definiált függvények értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani. Azonban a kiszámítható függvény fogalmának egyik definíciója esetén sem ölel fel a lerögzített függvénydefiniálás-mód *minden* olyan függvénydefiníciót, amelynek alapján a definiált függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, úgy, hogy a kiszámítható függvény fogalmának mindegyik definíciója azon a sejtésen alapul, hogy minden olyan függvénydefiníció, amelynek alapján a definiált függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, *visszavezethető* egy, a kérdéses függvénydefiniálás-mód alá tartozó definícióra. E sejtések egyike sem plauzibilisebb, mint az a sejtés, hogy minden olyan függvénydefiníció, amelynek alapján a definiált függvény értékét bármely adott helyen ki lehet számítani, visszavezethető általános rekurzióval való definícióra; legegyszerűbb tehát a kiszámítható függvény fogalmát úgy definiálni, hogy éppen az általános rekurzív függvényeket értjük kiszámítható függvényeken.

Természetesen ez esetben is, éppúgy, mint a kiszámítható függvény fogalmának többi javasolt definíciója esetében, fennáll az a kétely, vajon nem

[17] Lásd pl. KLEENE [1], Definition 2*b*, 731. oldal.

sikerül-e egyszer majd olyan függvénydefiníciót találni, amelyről nyilvánvaló, hogy az általa definiált függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, de amelyet mégsem lehet általános rekurzióval való definícióra (vagy a kiszámítható függvény fogalmának többi javasolt definíciójában szereplő megfelelő függvénydefiniálás-módra) visszavezetni, mert az általa definiált függvény nem általános rekurzív függvény. Ezt a kételyt a kiszámítható függvény fogalmának semmiféle újabb definíciója sem tudná eloszlatni, hiszen minden definíció elhatárolás, márpedig a kiszámítható függvény fogalmának a lényegéhez tartozik hozzá, hogy nem tűr semmiféle elhatárolást: akármilyen függvénydefiníciót, amelynek alapján az általa definiált függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, kiszámítható függvény definíciójának kell tekintenünk, akár közé esik az elhatárolt függvénydefiníciók közé, akár nem. Így a kiszámítható függvény fogalmának bármely szabatosan definiált fogalmát csak többé-kevésbé plauzibilisnak tarthatjuk, de véglegesnek nem.

Annak a definíciónak plauzibilitása, amely szerint az általános rekurzív függvényeket értjük kiszámítható függvényeken, más szóval annak a sejtésnek a plauzibilitása, hogy minden olyan függvénydefiníció, amelynek alapján az általa definiált függvény értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, visszavezethető általános rekurzióval való definícióra, éppen az általános rekurzióval való definíció fogalmának fentemlített merészen általános voltán alapul s így csak emelkedik, ha meg tudjuk mutatni, hogy e fogalom még további kínálkozó általánosításai sem vezetnek bővebb függvényosztályhoz.

Így pl. mindenekelőtt arra lehet gondolni, hogy felesleges kikötés az általános rekurzív definíció fogalmának definíciójában, hogy a függvényegyenletrendszer *minden* benne szereplő függvény értékeit meghatározza, hiszen ha csak egyes benne szereplő függvények értékeit határozza meg egy függvényegyenletrendszer, a többiét nem[18], akkor is ki lehet azon függvények értékét

[18] Pl. az

$$\begin{cases} a(0) = 0', \\ a(0') = 0, \\ h(0) = 0, \\ h(x') = a(h(x)), \end{cases}$$

függvényegyenletrendszer *egyáltalában* nem határozza meg $a(2)$ értékét (azaz nincs $a(0'') = m$ alakú triviális következménye (nem triviális sincs), ahol m nemnegatív egész szám); az

$$\begin{cases} a(0) = 0', \\ a(0') = 0, \\ a(0'') = 0, \\ a(0'') = 0', \\ h(0) = 0, \\ h(x') = a(h(x)), \end{cases}$$

függvényegyenletrendszer pedig nem határozza meg $a(2)$ értékét *egyértelműen* (mert $a(0'') = 0$ is, $a(0'') = 0'$ is triviális következménye). A h függvény értékeit azonban mégis mindkét egyenletrendszer (egyértelműen) meghatározza: a $h(0) = 0$, $h(0') = 0'$, $h(0'') = 0$, $h(0''') = 0'$, bármely adott helyen véges számú lépésben számítani a függvényegyenletrendszer alapján, amelyeknek értékeit a függvényegyenletrendszer meghatározza. Könnyen meg lehet azonban mutatni, hogy azon aritmetikai függvények osztálya, amelyekhez van olyan függvényegyenletrendszer, amely a *kérdéses* függvény értékeit meghatározza, a többi benne szereplő függvényét esetleg nem, azonos az általános rekurzív függvények osztályával[19].

Másrészt arra lehet gondolni, hogy amilyen merészen általános az általános rekurzív definíció fogalma abból a szempontból, hogy nem kíván meg semmit sem a függvényegyenletrendszer alakjáról, annyira speciális abból a szempontból, hogy azt kívánja meg, hogy a függvényegyenletrendszer a benne szereplő függvényeknek (vagy egy részüknek) értékeit olyan értelemben határozza meg, hogy azok az egyenletek, amelyek megmondják, hogy egy-egy helyen mi e függvények értéke, *a fent definiált értelemben* legyenek a függvényegyenletrendszer triviális következményei. Valóban, mint már rámutattunk, valamely függvényegyenletrendszernek ugyanolyan joggal még más következményeit is nevezhetnők triviális következményeinek. Pl. a specializáláson és valamely egyenlet alkalmazásán kívül még megengedhetnők a következő „triviális" lépéseket is a triviális következmény fogalmának definíciójában: $K = K$ alakú egyenlet felírását; számváltozók helyébe tetszőleges kifejezések helyettesítését; valamely egyenlet bal- és jobboldalának felcserélését[20]. Meg

$h(0''') = 0$, $h(0'''') = 0', \ldots$ egyenletek mind triviális következményei mindkét egyenletrendszernek, más $h(n) = m$ alakú egyenlet azonban, ahol n és m számok, nem. Az így definiált

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ páros} \\ 1, & \text{ha } x \text{ páratlan} \end{cases}$$

függvény primitív rekurzív függvény; azonban könnyű olyan függvényegyenletrendszert is megadni, amely valamely általános rekurzív, de nem primitív rekurzív függvény értékeit határozza meg, de más, benne szereplő függvény értékeit nem.

[19] PÉTER RÓZSA [2] könyvének 130—131. oldalán így definiálja az általános rekurzív függvény fogalmát.

[20] Ez azt jelenti, hogy a triviális következmény fogalmának definícióját a következőképpen módosíthatnók. Valamely R függvényegyenletrendszer 0-adrendű triviális következményein értjük R egyenleteit, továbbá bármely $K = K$ alakú egyenletet, ahol K tetszőleges kifejezés. Ha már tudjuk, mit jelent az, hogy egy függvényegyenlet valamely függvényegyenletrendszernek n-edrendű vagy alacsonyabbrendű triviális következménye, akkor valamely R függvényegyenletrendszer $n+1$-edrendű triviális következményein az olyan függvényegyenleteket értjük, amelyek vagy R valamely n-edrendű triviális következményéből úgy keletkeznek, hogy bizonyos benne szereplő számváltozók helyébe, mindenütt, ahol előfordulnak, tetszőleges kifejezéseket (nem feltétlenül számokat) helyettesítünk, azonban ugyanazon számváltozó helyébe mindenütt, ahol előfordul, ugyanezt a kifejezést, vagy R valamely n-edrendű triviális következményéből bal- és jobboldalának felcserélésével keletkeznek, vagy pedig R két legfeljebb n-edrendű triviális következményéből, amelyek közül legalább az egyik pontosan n-edrendű triviális következménye R-nek, úgy keletkeznek, hogy az egyikre alkalmazzuk a másikat. Egy függvényegyenletet akkor nevezünk valamely R függvényegyenletrendszer triviális következményének, ha van olyan n nemnegatív egész szám, hogy a kérdéses függvényegyenlet R-nek n-edrendű triviális következménye.

lehet azonban mutatni, hogy ha az általános rekurzív függvény fogalmát szószerint úgy definiálnók, mint fentebb, azonban a definícióban azon, hogy egy-egy függvényegyenletrendszer valamely függvény értékeit meghatározza, annyiban értenénk mást, hogy e fogalom definíciójában a triviális következmény fogalmát a fent említett módosított értelemben értenők, akkor sem jutnánk az általános rekurzív függvény más (bővebb) fogalmához.

Ez igaz a triviális következmény fogalmának említett (közelfekvő) általánosításaira, de még mindig fennmarad az a kétely, nem lehet-e a triviális következmény fogalmát (értelmes módon) úgy általánosítani, hogy ezáltal már megváltozzék (kibővüljön) az általános rekurzív függvény fogalma. Ezt a kételyt eloszlatná, ha meg lehetne mutatni, hogy az általános rekurzív függvény fogalma akkor sem bővül, ha annak definíciójában, hogy mit értünk azon, hogy egy függvényegyenletrendszer valamely függvény értékeit meghatározza, a triviális következmény fogalmát a következmény általános fogalmával pótolnók, vagyis akkor mondanók, hogy valamely függvényegyenletrendszer valamely benne szereplő **f** függvény értékeit meghatározza, ha tetszőleges $n_1, n_2, \ldots, n_r$ nemnegatív egész számokhoz, ahol r az **f** funktor argumentumszáma, egy és csak egy olyan m nemnegatív egész szám van, hogy az $\mathbf{f}(n_1, n_2, \ldots, n_r) = m$ egyenlet következménye R-nek. Ez (adott $n_1, n_2, \ldots, n_r$ és m esetén) azt jelenti, hogy minden olyan aritmetikai függvény, amely **f** helyébe téve (bizonyos, az R-ben előforduló esetleges további funktorok helyébe teendő aritmetikai függvényekkel együtt) kielégíti az R függvényegyenletrendszert, az $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ helyen az m értéket veszi fel[21]. Az, hogy $n_1, n_2, \ldots, n_r$ bármely értékére van olyan m, amelyre ez áll, azt jelenti, hogy csak egy olyan aritmetikai függvény létezhetik, amely **f** helyébe téve (bizonyos esetleges további aritmetikai függvényekkel együtt) kielégíti az R függvényegyenletrendszert (mert bármely két olyan függvény, amely kielégíti, bármely helyen ugyanazt az értéket veszi fel). Ennélfogva az a kérdés, hogy a triviális következmény fogalmát a következmény általános fogalmával pótolva nem bővül-e az általános rekurzív függvény fogalma, a következőképpen is fogalmazható.

Tegyük fel, hogy valamely R függvényegyenletrendszernek van megoldása, továbbá, hogy bármely megoldásrendszerében valamely, az R-ben előforduló **f** *funktor helyébe egy és ugyanaz az aritmetikai függvény kerül. Igaz-e, hogy akkor ez a függvény általános rekurzív függvény?*

Ez az a probléma, amelyet SCHRÖTER felvetett. Meg fogom mutatni, hogy e problémára negatív a válasz, mégpedig azért, mert *van olyan függ-*

[21] Ha az R függvényegyenletrendszernek egyáltalában van megoldása, akkor világos, hogy adott $n_1, n_2, \ldots, n_r$ számokhoz *legfeljebb egy* ilyen m szám létezhetik. Fordítva, ha adott $n_1, n_2, \ldots, n_r$ számokhoz csak egy ilyen m van, akkor van az R függvényegyenletrendszernek megoldása, mert ha nem volna, akkor megállapodásunk szerint bármely függvényegyenletet, így pl. az $f(n_1, n_2, \ldots, n_r) = 0$ és az $f(n_1, n_2, \ldots, n_r) = 0'$ egyenletet is, R következményének tekintenők.

vényegyenletrendszer, amelynek egy és csak egy megoldásrendszere van, de e megoldásrendszerben szereplő függvények közül az egyik nem általános rekurzív függvény.

3. *Néhány tétel általános rekurzív függvényekről.* A kimondott tétel bizonyításához szükségem lesz arra, hogy bizonyos aritmetikai függvények általános rekurzív függvények. Ennek bizonyítására természetesen nem elég megmutatni, hogy e függvények értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, hanem meg kellene adni egy-egy általános rekurzív definíciójukat. Ahol ez könnyen lehetséges, ott meg is teszem; ahol azonban nehéz meggondolásokat igényelne, ott megelégszem annak beláttatásával, hogy a kérdéses függvények értéke bármely adott helyen a definiálatlan, heurisztikus értelemben véges számú lépésben kiszámítható; általános rekurzív voltuk KLEENE [1] cikkében szabatosan be van bizonyítva.

Így pl. az

$$a(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } x=0,\\ 0, & \text{ha } x\neq 0,\end{cases}$$

$$b(x,y)=\begin{cases}0, & \text{ha } x=y,\\ 1, & \text{ha } x\neq y,\end{cases}$$

$$c(x,y)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\geqq y,\\ 1, & \text{ha } x<y,\end{cases}$$

$$d(x,y,z)=xyz$$

függvényekről minden további nélkül evidens, hogy bármely adott helyen véges számú lépésben ki tudjuk számítani az értéküket (hiszen bármely adott nemnegatív egész számról véges számú lépésben el tudjuk dönteni, 0-e vagy nem; bármely két adott nemnegatív egész számról véges számú lépésben el tudjuk dönteni, egyenlők-e vagy nem, vagy pedig, hogy az első nagyobb vagy egyenlő-e, mint a második, vagy kisebb; három adott nemnegatív egész számnak véges számú lépésben ki tudjuk számítani a szorzatát). Ahhoz azonban, hogy szabatosan bebizonyítsuk, hogy ezek általános rekurzív függvények, meg kell adni egy-egy általános rekurzív definíciójukat, mint ahogy fentebb meg is adtuk (ti. az A, B, C ill. P' függvényegyenletrendszereket).

Világos az is, hogy ha f kétváltozós általános rekurzív függvény, akkor az f függvénnyel együtt a

$$g(x,y)=\prod_{z<y} f(x,z)$$

egyenlettel definiált g függvény értékét is bármely adott helyen ki tudjuk számítani véges számú lépésben. Ahhoz azonban, hogy bebizonyítsuk, hogy f-fel együtt g is általános rekurzív függvény, meg kell adni g egy általános rekurzív definícióját (f egy általános rekurzív definíciója segítségével). Ez könnyen lehetséges; ha ugyanis R olyan függvényegyenletrendszer, amely a benne szereplő függvényeknek, többek között az f függvénynek értékeit meghatározza, s amelyben az f_1, f_2 és g funktorok nem fordulnak elő[22], akkor az az R' egyenletrendszer, amely R-ből a P egyenletrendszer egyenleteinek, valamint a

$$g(x, 0) = 0',$$
$$g(x, y') = f_2(g(x, y), f(x, y))$$

függvényegyenleteknek hozzávételével keletkezik, meghatározza g értékeit. Valóban, mint már tudjuk, a P egyenletrendszer meghatározza az $f_1(x, y) = x + y$ és $f_2(x, y) = xy$ függvények értékeit. Legyen k és n két tetszőleges nemnegatív egész szám; akkor van olyan m nemnegatív egész szám, hogy a $g(k, n) = m$ egyenlet triviális következménye R'-nek. Ez áll, ha $n = 0$; ugyanis a $g(k, 0) = 0'$ egyenlet R' utolsó előtti egyenletéből specializálással keletkezik. Ha már n-re áll az állításunk, akkor áll n'-re is. Ugyanis a

$$g(k, n') = f_2(g(k, n), f(k, n))$$

egyenlet R' utolsó egyenletéből specializálással keletkezik. Ha már most m, m_1 és m_2 olyan nemnegatív egész számok, hogy a $g(k, n) = m$, $f(k, n) = m_1$ és $f_2(m, m_1) = m_2$ egyenletek R' triviális következményei (márpedig ilyen m szám az indukciós feltevés, ilyen m_1 ill. m_2 szám pedig amiatt létezik, mert az R ill. P egyenletrendszer meghatározza az f ill. f_2 függvény értékeit), akkor a $g(k, n') = f_2(g(k, n), f(k, n))$ egyenletből a $g(k, n) = m$ egyenlet alkalmazásával a $g(k, n') = f_2(m, f(k, n))$ egyenlet, ebből az $f(k, n) = m_1$ egyenlet alkalmazásával a $g(k, n') = f_2(m, m_1)$ egyenlet, végül ebből az $f_2(m, m_1) = m_2$ egyenlet alkalmazásával a $g(k, n') = m_2$ egyenlet adódik. Az, hogy adott k és n számokhoz csak egy olyan m szám van, amelyre a $g(k, n) = m$ egyenlet triviális következménye R'-nek, adódik abból, hogy az f, $f_1(x, y) = x + y$, $f_2(x, y) = xy$ és $g(x, y) = \prod_{z < y} f(x, z)$ függvények kielégítik az R' függvényegyenletrendszert[23].

A **2.** pont végén kimondott állítás azt is magában foglalja, hogy *van* olyan aritmetikai függvény, amely nem általános rekurzív függvény. Ez ismeretes és könnyen belátható. Ugyanis az összes függvényegyenletek halmaza megszámlálható; hiszen minden függvényegyenlet — alakját tekintve — a 0 konstansból, a számváltozókból, a $'$ jelből, a funktorokból, az $=$ jelből és a

[22] Ezt könnyű elérni: ha az f_1, f_2 vagy a g funktor előfordul benne, akkor ezt más (ugyancsak 2 argumentumszámú) funktorra változtatjuk.

[23] A bizonyítás azt is mutatja, hogy ha f primitív rekurzív függvény, akkor g is az (lásd pl. PÉTER RÓZSA [2], 7. oldal); mert ha R primitív rekurzióval való definíció, akkor R' is nyilván az. Hasonlóan adódik, hogy ha f általános, ill. primitív rekurzív függvény, akkor a $g_1(x, y) = \sum_{x < y} f(x, y)$ egyenlettel definiált g_1 függvény is az (primitív rekurzív f esetén lásd pl. PÉTER RÓZSA [2], 6. oldal).

(,) és , írásjelekből álló véges sorozat, márpedig megszámlálhatóan végtelen sok elemből megszámlálhatóan végtelen sok véges sorozat képezhető. Ebből következik az is, hogy az összes függvényegyenletrendszerek (azaz függvényegyenletekből álló véges halmazok) halmaza is megszámlálható; ugyanis megszámlálhatóan végtelen halmaznak megszámlálhatóan végtelen sok véges részhalmaza van. Ennélfogva általános rekurzív definíció is legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok van; hogy van végtelen sok, azt könnyű megmutatni. Egy-egy általános rekurzív definíció több általános rekurzív függvényt is definiálhat, de mindenesetre csak véges számút (mert csak véges számú funktor fordulhat elő benne); ennélfogva legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok (és, mint könnyű látni, valóban megszámlálhatóan végtelen sok) általános rekurzív függvény van. Ezzel szemben az összes aritmetikai függvények halmaza nem megszámlálható; tehát van olyan aritmetikai függvény, amely nem általános rekurzív függvény.

Ha sikerülne az összes általános rekurzív függvények halmazát *effektíve* megszámlálni, azaz úgy rendezni sorozatba, hogy bármely n természetes számhoz véges számú lépésben meg lehessen állapítani, melyik a sorozat n-edik tagja (pl. úgy, hogy megadjuk, melyik függvényegyenletrendszer definiálja és abban melyik funktorral van jelölve), akkor az átlós módszer segítségével máris lehetne ellenpéldát találni arra a sejtésre, hogy minden olyan aritmetikai függvény, amelynek értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, általános rekurzív függvény. Ez esetben ugyanis könnyen (ti. a többváltozós általános rekurzív függvények elhagyásával) megkaphatnók az összes *egyváltozós* általános rekurzív függvények egy

$$h_0, h_1, h_2, \ldots$$

effektív megszámlálását. De ekkor a

$$h_\omega(x) = h_x(x) + 1$$

egyenlettel definiált h_ω függvény értékét bármely adott n helyen véges számú lépésben ki tudnók számítani (mert véges számú lépésben meg tudnók állapítani, melyik a h_n függvény; minthogy ez általános rekurzív függvény, további véges számú lépésben ki lehetne számítani értékét az n helyen, vagyis a $h_n(n)$ számot és így a $h_\omega(n) = h_n(n) + 1$ értéket is véges számú lépésben ki lehetne számítani). Mégsem lehet h_ω általános rekurzív függvény, különben azonos volna valamelyik h_n-nel, holott az n helyen más (ti. 1-gyel nagyobb) értéket vesz fel, mint az.

Azonban a fenti meggondolás alapján nem sikerül az összes általános rekurzív függvények halmazát effektíve megszámlálni[24]. Az összes függvény-

[24] Ha igaz az a sejtés, hogy az olyan aritmetikai függvények osztálya, amelyek értéke bármely adott helyen véges számú lépésben kiszámítható, azonos az általános rekurzív függvények osztályával, akkor, mint éppen bebizonyítottuk, nem is lehet effektíve megszámlálni az általános rekurzív függvények halmazát.

egyenletek halmazát még sikerül: ehhez nem kell mást tenni, mint az öszszes, a fent felsorolt jelekből álló véges sorozatok halmazát valamelyik, a halmazelméletben szokásos módon effektíve megszámlálni, majd az így kapott sorozatnak elhagyni azokat a tagjait, amelyek nem függvényegyenletek. (Hogy egy adott, a fent felsorolt jelekből álló véges sorozat függvényegyenlet-e, azt könnyű véges számú lépésben eldönteni.) Legyen $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ az összes függvényegyenletek így kapott sorozatbarendezése. Ebből, a halmazelméletben szokásos módok bármelyike segítségével megkaphatjuk az $\{E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots\}$ halmaz összes véges részhalmazai, vagyis az összes függvényegyenletrendszerek valamely $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$ effektív megszámlálását. Ahhoz azonban, hogy ebből megkapjuk az összes általános rekurzív függvények halmazának egy effektív megszámlálását, mindenekelőtt el kellene hagyni $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$ közül azokat, amelyek nem általános rekurzív definíciók (aztán a megmaradt általános rekurziv definíciók mindegyikét az általa definiált általános rekurzív függvények (véges) sorozatával pótolni). Ily módon azonban nem jutunk az összes általános rekurzív definíciók (és velük az összes általános rekurzív függvények) *effektív* megszámlálásához, mert nem ismeretes olyan módszer, amelynek segítségével véges számú lépésben el lehetne dönteni egy függvényegyenletrendszerről, hogy általános rekurzív definíció-e[25]. Már pedig ahhoz, hogy az $R_0, R_1, \ldots. R_n, \ldots$ sorozatból az olyan függvényegyenletrendszerek elhagyásával keletkező sorozat n-edik tagját meghatározzuk, amelyek nem általános rekurzív definíciók, sorra el kellene döntenünk R_0-ról, R_1-ről, R_2-ről,... hogy általános rekurzív definíció-e, míg az első n olyant meg nem találjuk közülük, amelyik az.

Ezen úgy próbálhatunk segíteni, hogy az $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$ sorozatból nem válogatjuk ki azokat a függvényegyenletrendszereket, amelyek általános rekurzív függvény definíciói, hanem e sorozat mindegyik tagját, tehát minden függvényegyenletrendszert, egy vagy több függvény definíciójának tekintjük (annyiénak, ahány funktor előfordul benne). Csakhogy ezek a függvények általában nem minden helyen vannak értelmezve és általában többértékűek. Ti. ha R valamely tetszőleges függvényegyenletrendszer és $\mathfrak{f}$ valamely R-ben előforduló funktor, akkor R-et úgy tekinthetjük, mint (esetleges egyéb, az R-ben előforduló többi funktornak megfelelő függvénnyel együtt) annak a függvénynek a definícióját, amely azokon és csak azokon az $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ helyeken van értelmezve, amelyekhez van olyan m nemnegatív egész szám, hogy az $\mathfrak{f}(n_1, n_2, \ldots, n_r) = m$ egyenlet triviális következménye R-nek (itt természetesen r az $\mathfrak{f}$ funktor argumentumszáma, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ pedig tetszőleges nemnegatív egész számok); éspedig úgy, hogy minden ilyen $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ helyen mindezeket az m értékeket vegye fel és csak ezeket. Egyszerűség kedvéért célszerű

[25] Ez a meggondolás azt is mutatja, hogy ha igaz az előző lábjegyzetben említett sejtés, akkor nincs is ilyen módszer.

minden egyes függvényegyenletet e függvények közül *egyetlen egy* függvény definíciójának tekinteni, pl. azénak, amely az R-ben előforduló funktorok közül azzal van jelölve, amely a funktorok valamely rögzített, pl. az $f, g, h, a, b, c, d, f_1, g_1, h_1, a_1, b_1, c_1, d_1, f_2, g_2, h_2, a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots$ effektív sorozatbarendezésében a *legkésőbbi*. (Ez nem megszorítás, hiszen ha valamely függvényt valamely függvényegyenlettel akarunk definiálni, akkor mindig jelölhetjük a kérdéses sorozatbarendezésben későbbi funktorral, mint a többi, a függvényegyenletrendszerben előforduló funktor.) A továbbiakban tehát, ha valamely R függvényegyenletrendszer által definiált függvényről beszélünk, azt a függvényt értjük rajta, amelynek értéke bármely $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ helyen minden olyan m szám, hogy az $\mathfrak{f}(n_1, n_2, \ldots, n_r) = m$ egyenlet triviális következménye R-nek, ha pedig nincs ilyen m, akkor nincs értelmezve az $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ helyen; itt $\mathfrak{f}$ az R-ben előforduló funktorok közül a legkésőbbi (a funktorok rögzített sorozatbarendezésében), r pedig az $\mathfrak{f}$ funktor argumentumszáma.

Az átlós módszer szempontjából csak azok a függvényegyenletrendszerek érdekelnek bennünket, amelyek *egyváltozós* függvényt definiálnak, tehát a bennük előforduló funktorok közül a legkésőbbinek argumentumszáma 1. Minthogy bármely függvényegyenletrendszerről véges számú lépésben el tudjuk dönteni, melyik a benne előforduló funktorok közül a legkésőbbi és mi annak az argumentumszáma, ezért az összes függvényegyenletrendszerek $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$ effektív megszámlálásából azon függvényegyenletrendszerek elhagyásával, amelyek többváltozós függvényt definiálnak, az egyváltozós függvényt definiáló függvényegyenletrendszerek $R'_0, R'_1, \ldots, R'_n, \ldots$ effektív megszámlálásához jutunk. Ha az ezek által sorra definiált egyváltozós függvényekre alkalmaznók az átlós módszert, olyan függvényhez jutnánk, amely ugyan nem fordul elő közöttük, de nincs mindenütt értelmezve és többértékű. (Az átlós módszert kissé módosítva kellene alkalmaznunk, mert az, hogy egy többértékű függvény valamely helyen két különböző értéket vesz fel, nem ellentmondás.) Hogy az átlós módszerrel mindenütt értelmezett és egyértékű aritmetikai függvényhez jussunk, az $R'_0, R'_1, \ldots, R'_n, \ldots$ függvényegyenletrendszerek mindegyikéhez hozzá kell rendelnünk egy-egy mindenütt értelmezett egyértékű egyváltozós aritmetikai függvényt. Evégett az $R'_0, R'_1, \ldots, R'_n, \ldots$ függvényegyenletrendszerek által definiált függvényeket úgy kell módosítanunk, hogy az azokon a helyeken felvett értékeik közül, ahol több értéket vesznek fel, egy-egy határozott értéket kiválasztunk, azokon a helyeken pedig, ahol nincsenek értelmezve, valahogyan értelmezzük őket. Az így kapott függvényekre alkalmazva az átlós módszert, nem jutunk ugyan ellenpéldához arra a sejtésre, hogy minden olyan aritmetikai függvény, amelynek bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani az értékét, általános rekurzív függvény, de példát kapunk olyan aritmetikai függvényre, amely nem általános rekurzív függvény, bár nagyon egyszerű módon keletkezik egy általános rekurzív függvényből.

Az R_n' függvényegyenletrendszer által definiált többértékű, nem mindenütt értelmezett függvénynek egyértékűvé tételére a legegyszerűbb módnak az kínálkozik, hogy olyan x helyen, ahol e függvény több m értéket vesz fel, válasszuk ki ezen értékek közül a *legkisebbiket*. Azonban egyszerűbb (valamely általános rekurzív függvényből egyszerűbb módon keletkező) példához jutunk nem általános rekurzív függvényre, ha ezen m értékek közül nem a legkisebbiket választjuk ki, hanem azt, amelyre nézve az $\mathbf{f}(x) = m$ egyenlet, ahol $\mathbf{f}$ a megfelelő funktor, a *legelső* helyen fordul elő az R_n' függvényegyenletrendszer triviális következményei között e triviális következmények valamely megszámlálásában. A továbbiak szempontjából döntő lesz, hogy ez a megszámlálás is választható *effektívnek* (ez biztosítja majd, hogy az átlós módszer szolgáltatta függvény, ha nem is lesz minden adott helyen véges számú lépésben kiszámítható az értéke, egyszerű módon keletkezik valamely általános rekurzív függvényből).

Valamely adott R függvényegyenletrendszer összes triviális következményeit legegyszerűbben úgy lehetne megszámlálni, hogy az összes függvényegyenletek $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ sorozatából elhagyjuk azokat a függvényegyenleteket, amelyek nem triviális következményei R-nek. Így azonban nem kapnánk *effektív* megszámlálást, mert nem ismeretes olyan módszer, amellyel bármely adott függvényegyenletről véges számú lépésben el lehetne dönteni, triviális következménye-e R-nek vagy nem[26]. Mégis lehetséges az R függvényegyenletrendszer összes triviális következményeinek effektív megszámlálása, pl. a következőképpen. Mindenekelőtt sorra effektíve megszámláljuk az R-nek 0-adrendű, elsőrendű, másodrendű,... triviális következményeit; ha valamely n-re csak véges számú n-edrendű triviális következménye van, mint pl. $n = 0$ esetén biztosan, akkor ez úgy értendő, hogy olyan végtelen sorozatot állítunk elő, (amelyiknek bármely tagját véges számú lépésben meg tudjuk határozni, ha adva van, hányadik tagról van szó és) amelyben R bármelyik n-edrendű triviális következménye *legalább egyszer* előfordul és más függvényegyenlet nem fordul elő. A 0-adrendű triviális következmények effektív megszámlálása könnyű, hiszen csak véges számú van belőlük. Ha már az R függvényegyenletrendszer n-edrendű és alacsonyabbrendű triviális következményeinek effektív megszámlálása megtörtént, akkor az $n+1$-edrendű triviális következményeinek effektív megszámlálása a halmazelméletből ismert módon annak felhasználásával történhetik, hogy R minden n-edrendű triviális következményéből legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok[27] $n+1$-edrendű triviális következménye keletkezik specializálással, mert véges számú számváltozó fordul elő benne és mindegyik helyébe megszámlálhatóan végtelen sok számot helyette-

[26] Meg lehet mutatni, hogy ha a már többször említett sejtés igaz, akkor nincs is minden R függvényegyenletrendszerhez ilyen módszer.

[27] Ha nem fordul elő benne számváltozó, akkor egy sem.

síthetünk, továbbá bármely, R-nek két legfeljebb n-edrendű triviális következményéből álló rendezett párból R-nek csak véges számú $n+1$-edrendű triviális következménye keletkezik alkalmazással[28], mert a pár második komponensének baloldala csak véges számú helyen fordulhat elő a pár első komponensében, és minden helyen csak kétféle dolog történhetik vele: vagy változatlan marad, vagy a pár második komponensének jobboldalával pótoljuk. Végül az R függvényegyenletrendszer 0-adrendű, elsőrendű, másodrendű,... triviális következményeinek így kapott effektív megszámlálásából a halmazelméletből ismert módon előállíthatjuk R összes triviális következményeinek egy $T_0(R), T_1(R), \ldots, T_n(R), \ldots$ effektív megszámlálását.

Rendeljük már most bármely olyan R függvényegyenletrendszerhez, amelyben előforduló legkésőbbi **h** funktor argumentumszáma 1, a következő egyváltozós, mindenütt értelmezett, egyértékű aritmetikai függvényt. Ha az R függvényegyenletrendszer által definiált függvény értelmezve van valamely nemnegatív egész k helyen, azaz van olyan m szám, hogy a $\mathbf{h}(k)=m$ egyenlet triviális következménye R-nek, akkor értsük az R-hez hozzárendelt függvénynek a k helyen felvett értékén ezen m-ek közül azt, amelyre a $\mathbf{h}(k)=m$ egyenlet a *legelső* helyen fordul elő az R triviális következményei között ezeknek $T_0(R), T_1(R), \ldots, T_n(R), \ldots$ sorozatbarendezésében. Ha az R függvényegyenletrendszer által definiált függvény nincs értelmezve a k helyen, azaz nincs olyan m szám, hogy a $\mathbf{h}(k)=m$ egyenlet triviális következménye R-nek, akkor értsük az R-hez hozzárendelt függvénynek a k helyen felvett értékén a 0 számot. Ha R általános rekurzív definíció, akkor az íly módon az R-hez rendelt függvény éppen az R által definiált (általános rekurzív) függvény; ez utóbbi ugyanis bármely k helyen értelmezve van és R bármely $\mathbf{h}(k)=m$ alakú triviális következményének, ahol m szám, tehát a $T_0(R), T_1(R), \ldots, T_n(R), \ldots$ sorozatbarendezésben a legelsőnek is, ugyanaz a jobboldala, mégpedig éppen az R által definiált függvény értéke a k helyen.

Legyen már most az $R'_0, R'_1, \ldots, R'_n, \ldots$ függvényegyenletrendszerhez íly módon hozzárendelt függvény sorra $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ és legyen ismét

$$h_\omega(x)=h_x(x)+1.$$

Akkor h_ω nem fordulhat elő $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ között, hiszen $n=0, 1, 2, \ldots$ esetén más (ti. 1-gyel nagyobb) értéket vesz fel az n helyen, mint h_n. Ennélfogva h_ω nem lehet általános rekurzív függvény, mert ha az volna, akkor volna olyan R általános rekurzív definíciója, amelyben h_ω (a funktorok rögzített sorozatbarendezésében) későbbi funktorral van jelölve, mint az R-ben előforduló többi funktor, és ez előfordulna $R'_0, R'_1, \ldots, R'_n, \ldots$ között; de akkor h_ω az előző bekezdés végén tett megjegyzés szerint az ehhez hozzárendelt függvény volna, tehát előfordulna $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ között.

[28] Ha a pár egyik komponense sem n-edrendű triviális következménye R-nek, akkor egy sem.

Az így kapott h_ω nem általános rekurzív függvény definícióját röviden így írhatjuk fel:

$$h_\omega(x)=\begin{cases} m+1, & \text{ha } T_0(R'_x), T_1(R'_x), \ldots, T_n(R'_x), \ldots \text{ közül az első olyan egyenletnek, amelynek baloldalán } \mathbf{h}(x) \text{ áll, ahol } \mathbf{h} \text{ az } R'_x \text{ függvényegyenletrendszerben előforduló funktorok közül a legkésőbbi, jobboldalán pedig valamely szám, amennyiben van köztük ilyen egyenlet, éppen } m \text{ áll a jobboldalán,} \\ 1, & \text{ha } T_0(R'_x), T_1(R'_x), \ldots, T_n(R'_x), \ldots \text{ között nincs olyan egyenlet, amelynek baloldalán } \mathbf{h}(x) \text{ áll, jobboldalán pedig valamely szám, ahol } \mathbf{h} \text{ az } R'_x \text{ függvényegyenletrendszerben előforduló funktorok közül a legkésőbbi.} \end{cases}$$

Ezt a bonyolult definíciót a következő módon tagolva áttekinthetőbb alakra hozhatjuk. Legyen

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{ha a } T_y(R'_x) \text{ függvényegyenlet baloldalán } \mathbf{h}(x) \text{ áll, ahol } \mathbf{h} \text{ az } R'_x \text{ függvényegyenletrendszerben előforduló funktorok közül a legkésőbbi, jobboldalán pedig valamely szám áll,} \\ 1 & \text{különben;} \end{cases}$$

$$g_1(x,y)=\begin{cases} m+1, & \text{ha } f(x,y)=0 \text{ és a } T_y(R'_x) \text{ függvényegyenlet jobboldalán az } m \text{ szám áll,} \\ 1, & \text{ha } f(x,y)\neq 0; \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} \text{a legkisebb olyan } y \text{ nemnegatív egész szám, amelyre } f(x,y)=0, & \text{ha van ilyen } y, \\ 0, & \text{ha nincs olyan } y, \text{ amelyre } f(x,y)=0. \end{cases}$$

Akkor

$$h_\omega(x)=g_1(x,h(x)).$$

Legyen ugyanis $\mathbf{h}$ az R'_x függvényegyenletrendszerben előforduló legkésőbbi funktor. Ha $T_0(R'_x), T_1(R'_x), T_2(R'_x), \ldots$ közül valamelyiknek a baloldalán $\mathbf{h}(x)$ áll, a jobboldalán pedig valamely szám, akkor legyen $T_y(R'_x)$ az első ilyen és álljon $T_y(R'_x)$ jobboldalán m. Akkor $f(x,y)=0$ és y a legkisebb olyan nemnegatív egész szám, amelyre ez áll, tehát $y=h(x)$; és $g_1(x,h(x))=$ $=g_1(x,y)=m+1$. Ha pedig $T_0(R'_x), T_1(R'_x), T_2(R'_x), \ldots$ közül egyik sem olyan, hogy a baloldalán $\mathbf{h}(x)$ áll, jobboldalán pedig valamely szám, akkor a definíció szerint bármely y-ra $f(x,y)=1$, tehát $g_1(x,y)=1$, továbbá $h(x)=0$; tehát többek között $g_1(x,h(x))=g_1(x,0)=1$.

Már most világos, hogy az f és g_1 függvények értékét bármely adott (k,n) helyen véges számú lépésben ki lehet számítani. Ha ugyanis k és n adva vannak, akkor véges számú lépésben meg tudjuk állapítani, melyik az R'_k függvényegyenletrendszer, melyik az utolsó, benne előforduló $\mathbf{h}$ funktor;

továbbá, hogy melyik a $T_n(R'_k)$ függvényegyenlet, vajon $\mathbf{h}(k)$ áll-e a baloldalán, a jobboldalán pedig szám-e és ha igen, melyik ez a szám. Ebből sejthető, de mint már említettem, szabatosan be is bizonyítható, hogy f és g_1 általános rekurzív függvények[29].

Azt viszont már tudjuk, hogy h_ω nem általános rekurzív függvény. Ebből következik, hogy h sem lehet az. Valóban, ha az lenne, legyen R_1 és R_2 egy-egy olyan általános rekurzív definíció, amely (többek között) g_1 ill. h értékeit meghatározza, mégpedig olyan, hogy R_1-ben a h funktor, R_2-ben a g_1 funktor ne forduljon elő. Legyen $\mathbf{h}$ most valamely olyan 1 argumentumszámú funktor, amely sem R_1-ben, sem R_2-ben nem fordul elő. Akkor az az R_3 függvényegyenletrendszer, amely R_1 és R_2 egyenleteiből és a

$$\mathbf{h}(x) = g_1(x, h(x))$$

egyenletből áll, nyilván meghatározná a benne szereplő függvények értékeit, tehát általános rekurzív definíció lenne; és pedig (többek között) a $\mathbf{h} = h_\omega$ függvény értékeit határozza meg, ami lehetetlen, mert h_ω nem általános rekurzív függvény.

Ebből nemcsak az adódik, hogy van olyan aritmetikai függvény, amely nem általános rekurzív függvény, hanem a következő, a továbbiak szempontjából fontos tény is: *Van olyan kétváltozós f általános rekurzív függvény, hogy a következőképpen definiált h függvény:*

$$h(x) = \begin{cases} \text{a legkisebb olyan } y \text{ nemnegatív egész szám, amelyre } f(x,y) = 0, \\ \quad \text{ha van ilyen } y, \\ 0, \text{ ha nincs ilyen } y, \end{cases}$$

nem általános rekurzív függvény[30].

[29] Lásd KLEENE [1], 734—738. oldal. (KLEENE jelölései szerint — a $\mathbf{h}$ funktor választását illető lényegtelen eltéréstől eltekintve — $f(x, y)$ a $T_1(x, x, y)$ reláció karakterisztikus függvénye, $g_1(x, y) = (1 - f(x, y))\,\mathrm{Val}(H(x, y)) + 1$.)

[30] Lásd KLEENE [1], 741. oldal (XIV. tétel). — A h függvény nem szolgáltat ellenpéldát arra a sejtésre, hogy minden olyan aritmetikai függvény, amelynek értékét bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani a definíciója alapján, általános rekurzív függvény. Ugyanis a h függvény definíciója nem ad módot arra, hogy bármely adott n nemnegatív egész helyen véges számú lépésben kiszámítsuk a $h(n)$ értéket. Ehhez ugyanis mindenekelőtt el kellene dönteni, van-e olyan y nemnegatív egész szám, amelyre $f(n, y) = 0$. Ha *van* ilyen, az véges számú lépésben kiderül (pl. úgy, hogy sorra kipróbáljuk, $y = 0, 1, 2, \ldots$ ilyen szám-e, amíg ilyen számot nem találunk); de ha *nincs* ilyen, akkor ez általában csak *végtelen sok* lépés után (ti. *valamennyi y* nemnegatív egész szám kipróbálása után) derül ki, hacsak nem tudjuk *bebizonyítani,* hogy nincs ilyen y szám. Amennyiben igaz az a sejtés, hogy minden olyan aritmetikai függvény, amelynek értékeit bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani, általános rekurzív függvény, akkor kell lennie olyan n nemnegatív egész számnak, amelyre *nincs* olyan y nemnegatív egész szám, amelyre $f(n, y) = 0$, de azt, hogy nincs ilyen, nem lehet (véges számú lépésben) bebizonyítani. Ez a tény nagyon valószínűtlenné teszi a szóbanforgó sejtés igazságát.

4. *Schröter problémájának megoldása.* Ennek alapján bebizonyíthatjuk a 2. pont végén kimondott állítást[31]. Legyen ugyanis R az f függvény valamely általános rekurzív definíciója; szükség esetén jelölésváltozással elérhetjük, hogy az a, b, c, d, f_1, f_2, g és h funktorok egyike se forduljon elő benne. Vegyük hozzá R-hez mindenekelőtt az A, B, C és P' függvényegyenletrendszerek egyenleteit; az így kapott R' függvényegyenletrendszernek egy és csak egy megoldásrendszere van, mégpedig az, amely a fenti f, a, b, c, d, f_1 és f_2 függvényekből áll (az esetleges többi, az R függvényegyenletrendszerben előforduló funktoroknak megfelelő bizonyos további általános rekurzív függvényekkel együtt).

Már most a h függvénynek az f függvény segítségével való fenti definícióját átalakíthatjuk úgy, hogy az a, b, c, d és f_2 függvények segítségével függvényegyenletrendszer alakjában lehessen írni. Valóban, legyen x és y két tetszőleges nemnegatív egész szám. Akkor vagy van olyan y-nál kisebb x nemnegatív egész szám, hogy $f(x, z) = 0$, vagyis $\prod_{z<y} f(x, z) = 0$, vagy ha nincs, akkor vagy $h(x) \geqq y$, mégpedig, amennyiben $f(x, y) = 0$, akkor $h(x) = y$, vagy pedig $h(x) = 0$ (ti. ha $z \geqq y$ esetén is $f(x, z) \neq 0$). Jelöljük most a $\prod_{z<y} f(x, z)$ általános rekurzív függvényt $g(x, y)$-nal; akkor tehát egyrészt vagy $g(x, y) = 0$, vagy (amennyiben $g(x, y) \neq 0$,) $f(x, y) \neq 0$, vagy pedig (amennyiben $g(x, y) \neq 0$ és $f(x, y) = 0$,) $h(x) = y$, másrészt vagy $g(x, y) = 0$, vagy (amennyiben $g(x, y) \neq 0$,) $h(x) \geqq y$, vagy pedig $h(x) = 0$. Az $f(x, y) \neq 0$ egyenlőtlenség az $a(f(x, y)) = 0$, a $h(x) = y$ egyenlőség a $b(h(x), y) = 0$, a $h(x) \geqq y$ egyenlőtlenség pedig a $c(h(x), y) = 0$ egyenlet alakjában írható; tehát egyrészt $g(x, y)$, $a(f(x, y))$ és $b(h(x), y)$ közül, másrészt $g(x, y)$, $c(h(x), y)$ és $h(x)$ közül valamelyik biztosan 0. Vagyis x és y minden értékére

$$g(x, y)\, a(f(x, y))\, b(h(x), y) = 0$$

és

$$g(x, y)\, c(h(x), y)\, h(x) = 0.$$

Más szóval, a $g(x, y) = \prod_{z<y} f(x, z)$ és a h függvények az f, a, b, c, d és f_2 függvényekkel együtt kielégítik a

$$g(x, 0) = 0', \tag{1}$$

$$g(x, y') = f_2(g(x, y), f(x, y)), \tag{2}$$

$$d(g(x, y), a(f(x, y)), b(h(x), y)) = 0 \tag{3}$$

és

$$d(g(x, y), c(h(x), y), h(x)) = 0 \tag{4}$$

függvényegyenleteket is.

[31] E bizonyítást egyidejűleg beküldtem közlés végett a berlini *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* c. folyóiratnak.

Vegyük hozzá ezeket az R' függvényegyenletrendszerhez; megmutatjuk, hogy az így kapott R'' függvényegyenletrendszernek csak egy megoldásrendszere van. Valóban, az R' függvényegyenletrendszernek, mint már mondtuk, nem tesznek eleget más függvények, mint a fenti f, a, b, c, d, f_1, f_2 függvények (és az esetleges többi, az R függvényegyenletrendszerben szereplő függvények). Azt is láttuk, hogy az R' függvényegyenletrendszer az (1) és (2) egyenletekkel együtt általános rekurzív definíciót alkot és így a g függvényt is egyértelműen meghatározza. Tehát csak azt kell még megmutatnunk, hogy a (3) és (4) egyenletek a h függvényt is egyértelműen definiálják. Valóban, ha (3) és (4) teljesül, akkor x és y bármely (nemnegatív egész) értékére egyrészt vagy $g(x,y)=0$, vagy $a(f(x,y))=0$, vagy $b(h(x),y)=0$, másrészt vagy $g(x,y)=0$, vagy $c(h(x),y)=0$, vagy $h(x)=0$. Ha már most valamely x számhoz van olyan z nemnegatív egész szám, hogy $f(x,z)=0$, akkor legyen y a legkisebb ilyen szám; akkor $f(x,y)=0$, de $z<y$ esetén $f(x,z)\neq 0$, tehát sem $g(x,y)=\prod_{z<y} f(x,z)=0$ nem állhat, sem $a(f(x,y))=0$; tehát akkor $b(h(x),y)=0$, vagyis $h(x)=y$. Ha pedig nincs olyan z, hogy $f(x,z)=0$, akkor bármely y-ra $g(x,y)=\prod_{z<y} f(x,z)\neq 0$; tehát akkor bármely y-ra vagy $c(h(x),y)=0$, vagyis $h(x)\geqq y$, vagy $h(x)=0$. De $h(x)\geqq y$ nem állhat bármely y-ra, tehát ebben az esetben $h(x)=0$; más szóval, $h(x)$ mindkét esetben csak a fent definiált h függvénynek az x helyen felvett értéke lehet. Minthogy ez a h függvény nem általános rekurzív függvény, ezért ezzel a **2.** pont végén kimondott állítás be van bizonyítva.

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete.

IRODALOM

W. ACKERMANN [1], Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, *Mathematische Annalen*, **99** (1928), 118—133.

A. CHURCH [1], An unsolvable problem in elementary number theory, *American Journal of Mathematics*, **58** (1936), 345—363.

S. C. KLEENE [1], General recursive functions of natural numbers, *Mathematische Annalen*, **112** (1936), 727—742.

[2], λ-definability and recursiveness, *Duke Mathematical Journal*, **2** (1936), 340—353.

A. Марков [1], Теория алгорифмов, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei* (1950. aug. 27—szept. 2), Budapest, 1952, 191—203.

R. PÉTER [1], Konstruktion nichtrekursiver Funktionen, *Mathematische Annalen*, **111** (1935), 42—60.

[2], *Rekursive Funktionen*, Budapest, 1951.

A. M. TURING [1], On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society*, (2) **42** (1937), 230—265, (2) 43 (1937), 544—546.

[2], Computability and λ-definability, *The Journal of Symbolic Logic*, **2** (1937), 153—163.

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS NÉHÁNY ÚJ EREDMÉNYÉRŐL

JORDAN KÁROLY lev. tag

I.*

POISSON formulája $\psi(m, x) = \frac{m^x}{x!} e^{-m}$, melyben egy rendelkezésre álló paraméter van m és amelyben az x változó $0, 1, 2, 3, \ldots$ értékeket vehet fel, alkalmas nem folytonos változójú függvények megközelítésére (egyenlő közök esetén), de tekintettel arra, hogy csak egy paramétert tartalmaz ritkán ad elegendő pontosságot. Ez késztetett arra 1926-ban, hogy a formulát általánosítsam, úgy hogy benne tetszőleges számú paraméter lehessen és ennek folytán a kívánt pontosságot megadhassa, továbbá, hogy a paraméterek könnyen kiszámíthatók legyenek.

Az általánosított formula a következő volt

$$f(x) = [a_0 G_0 + a_1 G_1(x) + a_2 G_2(x) + \cdots + a_n G_n(x)]\, \psi(m, x),$$

ahol $G_s(x)$ oly s-edfokú polinom, amely ortogonális oly értelemben, hogy

$$\sum_{x=0}^{\infty} G_\nu G_\mu \psi = 0 \text{ ha } \nu \neq \mu.$$

$$G_s(x) = \frac{s!}{m^s} \sum_{i=0}^{s+1} (-1)^i \frac{m^i}{i!} \binom{x}{s-i},$$

továbbá

$$\sum_{x=0}^{\infty} G_s^2(x) \psi(x) = \frac{s!}{m^s}.$$

Ez értekezésben a differenciaszámításnak megfelelően, az összegekbe az alsó határ be van értve, a felső nem.

Ha az $f(x)$ függvénnyel kivánunk megközelíteni adott észleléseket a momentumok elve szerint, akkor az ortogonalitás révén az a_s paramétereket legegyszerűbben a megközelítendő $y(x)$ észlelési adatok faktorális momentumai segélyével az alábbi szimbolikus formula adja

$$a_s = \frac{1}{s!} (\mathfrak{M} - m)^s,$$

amelyben a binom kifejtésénél $\mathfrak{M}^i$ helyett $\mathfrak{M}_i$ irandó, $i = 0$ esetén is; továbbá

$$\mathfrak{M}_i = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\ldots(x-i+1) \cdot y(x), \text{ és } m = \mathfrak{M}_1 / \mathfrak{M}_0 \text{ az } x \text{ változó átlaga.}$$

* Az I. rész képezte az 1954 szeptember 27-iki Jósvafőn tartott előadást.

A G_s polinomoknak érdekes matematikai tulajdonságaik vannak, pl.

$$\mathop{\triangle}_{x} G_s(x) = \frac{s}{m} G_{s-1}(x)$$

következőleg

$$\sum_{x=a}^{b} G_s(x) = \frac{m}{s+1}[G_{s+1}(b) - G_{s+1}(a)]$$

továbbá

$$\triangle G_s(x)\psi(m,x) = -G_{s+1}(x+1)\psi(m,x+1)$$

és ebből

$$\sum_{x=a}^{b} G_s(x)\psi(m,x) = G_{s-1}(a-1)\psi(m,a-1) - G_{s-1}(b-1)\psi(m,b-1).$$

Ez a képlet megadja az $f(x)$ függvény összegét, például $F(x<x_1)$-et:

$$F(x<x_1) = a_0[1 - I(\bar{u},\bar{p})] - \sum_{s=1}^{n+1} a_{s-1}G_{s-1}(x_1-1)\psi(x_1-1)$$

E formulában $I(\bar{u},\bar{p})$ a nem-teljes gamma függvény viszonya a teljes függvényhez, továbbá $\bar{u} = m/\sqrt{x_1}$ és $\bar{p} = x_1 - 1$.

Ezek után felmerült az a probléma, hogy hasonlóan járjunk el folytonos változós függvény, POISSON formulájával való megközelítésénél is; általánosítva a formulát, melyet most

$$\varphi = \varphi(p,x) = \frac{x^p e^{-x}}{\Gamma(p+1)}$$

alakban írunk. Legyen az általánosított függvény a következő:

(2) $$f(x) = [a_0Q_0 + a_1Q_1 + \cdots + a_nQ_n]\varphi(p,x),$$

melyben $Q_s = Q_s(x)$ s-edfokú polinom, mely úgy van meghatározva, hogy e polinomok ortogonálisak legyenek $\varphi(p,x)$-re vonatkoztatva a $0, \infty$ közben, vagyis, ha $\nu \neq \mu$ akkor

$$\int_0^\infty Q_\nu Q_\mu \varphi\, dx = 0.$$

Ebből kiindulva a Q_s polinomok meghatározása a következő eredményre vezetett

$$Q_s(x) = \sum_{\nu=0}^{s+1} (-1)^\nu \binom{p+s}{\nu} \frac{x^{s-\nu}}{(s-\nu)!} \quad *$$

* Utólag Takács Lajos figyelmeztetett a $Q_s(x)$ polinomok és a Laguerre polinomok közötti összefüggésre. Ha a $Q_s(x)$ polinomot megszorozzuk $-s!$-sal és ha benne a p paramétert nullával tesszük egyenlővé, megkapjuk a LAGUERRE polinomot. (J. LENSE: Reihenentwicklungen der mathematischen Physik. Berlin W. 1953.)

Partikuláris értékek:

$$Q_0=1, \quad Q_1=x-(p+1), \quad Q_2=\frac{x^2}{2!}-(p+2)x+\binom{p+2}{2}$$

$$Q_3=\frac{x^3}{3!}-\binom{p+3}{1}\frac{x^2}{2!}+\binom{p+3}{2}x+\binom{p+3}{3}$$

és

$$\int_0^\infty Q_s^2\varphi\,dx=\binom{p+s}{s}.$$

Az a_s paramétereket a momentumok elvének megfelelően határozzuk meg az $y(x)$ függvény momentumai segélyével; a számítás az ortogonalitás következtében egyszerű. Legyen M_i az i-edfokú momentuma $y(x)$-nek

$$M_i=\int_0^\infty x^i y(x)\,dx$$

A számítás eredményét, miután s és ν nem negatív egész számok, a következőképp írhatjuk:

$$a_s=\sum_{\nu=0}^{s+1}(-1)^\nu\frac{\binom{p+s}{\nu}M_{s-\nu}}{\binom{p+s}{s}(s-\nu)!}=\sum_{\nu=0}^{s+1}\frac{(-1)^\nu\binom{s}{\nu}M_{s-\nu}}{\Gamma(p+s-\nu+1)}\cdot\Gamma(p+1).$$

Az a_s paraméterek meghatározása után célszerű a (2) képletet x hatványai szerint átrendezni, ekkor

$$f(x)=\sum_{s=0}^{n+1}C_{ns}\frac{x^s}{s!}\varphi(p,x)=\sum_{s=0}^{n+1}C_{ns}\binom{p+s}{s}\varphi(p+s,x), \tag{3}$$

ahol

$$C_{ns}=\sum_{\nu=0}^{n-s+1}(-i)^\nu\binom{p+s+\nu}{\nu}a_{s+\nu}$$

$\varphi(p+s,x)$ értékét pedig táblázatból vesszük ki.

Ezáltal fölöslegessé válik táblázatok szerkesztése a polinomok értékeire, ami nagy munkával jár és különben is célszerűtlen, a (2) formulában például n interpolációra volna szükség. 1921-ben én is közöltem hasonló esetben táblázatokat a Proceedings of the London Mathematical Society-ben. Azért tartom ezt szükségesnek fölemlíteni, mert például FISHER, Statisztikai Táblázataiban még ma is közöl másféle ortogonális polinomokra táblázatokat. Ha a paramétereket meghatároztuk, akkor az eredményt átrendezzük folytonos változó esetén x hatványai szerint, mint a jelen esetben vagy pl. Hermite polinomoknál; nem folytonos változó esetén pedig $\binom{x}{s}$ szerint, mint például ortogonális polinomoknál vagy az említett G_s polinomoknál.

A (3) függvényből könnyen megkapjuk annak integrálját $x=0$-tól $x=x_1$-ig, ugyanis

$$\int_0^{x_1} \varphi(p+s,x)dx = I(\bar{u},p+s), \text{ ahol } \bar{u}=x_1\sqrt{p+s+1}.$$

Következőleg

$$F(x<x_1)=\sum_{s=0}^{n+1} C_{ns}\binom{p+s}{s} I(\bar{u},p+s).$$

Az $I(\bar{u},p+s)$ értékét a nem-teljes gamma függvény táblázata adja.

II.*

Dacára annak, hogy PASCAL, FERMAT és HUYGENS szép eredményeket értek el a valószínűségszámítás terén, annak igazi megalapítójául mégis JACOBUS BERNOULLI-t kell tekinteni.

NICOLAS STRUYCK, 1716-ban megjelent valószínűségszámítási könyvének előszavában azt mondja: „Nem szükséges bizonyítani e számítások hasznosságát és előnyösségét; de azért nem merünk azoknak oly nagy jelentőséget tulajdonítani mint azt JACOB BERNOULLI tette, hanem jobbnak látjuk, csatlakozni HUYGENS szavaihoz, melyek szerint ha valaki kissé elmélyed a dolgokba, látni fogja, hogy nem csupán játékról van szó, hanem mély és érdekes elvekről." LEIBNITZ még tovább ment, kétségbe vonva BERNOULLI okoskodásának helyességét.

Az utókor azonban BERNOULLI-nak adott igazat, még magasabbra becsülve eredményeit, melyeket húsz évi munkával ért el, mint ő maga. BERNOULLI formulája, mely ν kedvező eset valószínűségét adja n észlelésnél, ha a tünemény valószínűsége minden észlelésnél p marad, és amelyből a nagyszámok törvényét állapította meg, a következő:

$$P(\nu)=\binom{n}{\nu}p^\nu q^{n-\nu}, \text{ ahol } q=1-p. \tag{4}$$

Ezt a továbbiakban *Bernoulli függvényének* fogjuk nevezni. Ebből következik, hogy annak a valószínűsége, hogy a kedvező eset kevesebbszer forduljon elő mint λ

$$P(\nu<\lambda)=\sum_{\nu=0}^{\lambda} P(\nu) \tag{5}$$

Ez a formula is BERNOULLI-tól származik. A (4) képlet numerikus számításra igen alkalmas; ma már nagy n esetén is, ugyanis vannak táblázatok $\log x!$-ra $x=3000$-ig.**

* A II. tárgyát a Magyar Tudományos Akadémián 1954. november 26-án tartott előadás képezi.

** F. J. DUARTE, Nouvelles tables de $\log n!$ à 33 décimales. Genève, 1927.

Ellenben az (5) formula, ha λ nagy, számításra igen hosszadalmas. Ki lehet ugyan mutatni, hogy

$$(6) \qquad \sum_{\nu=0}^{\lambda} P(\nu) = \int_0^q \frac{t^{n-\lambda}(1-t)^{\lambda-1}}{B(n+1-\lambda,\lambda)}\,dt = I_q(n+1-\lambda,\lambda),$$

vagyis ki lehet fejezni az (5) valószínűséget egy nem-teljes beta függvény és a megfelelő teljes függvény viszonyával. A nehézség abban áll, hogy a nem-teljes beta függvény táblázata, tekintve hogy három változós táblázat szükségképp csak kis számokig terjedhet. Ha λ és $n-\lambda$ kisebbek mint 51, akkor a táblázat megadja a (6) valószínűséget. Ellenkező esetben ki kellene számítani a nem-teljes beta függvényt; miután azonban azt csak $\Sigma P(\nu)$-höz hasonló összegezéssel tudjuk kiszámítani, tehát a (6) formulának íly esetekben gyakorlati jelentősége nincsen. Tulajdonképpen, egész számú argumentumok esetén a nem-teljes beta függvényt BERNOULLI (5) formulája adja. Régen törekszenek az (5) valószínűséget valamely zárt formulával kifejezni, mert az egyúttal a nem-teljes beta függvény kiszámítására is szolgálna.

BERNOULLI függvényének valamely s-edfokú polinomra $f_s(\nu)$ vonatkoztatott teljes momentumát

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} f_s(\nu)P(\nu)$$

könnyen megtudjuk határozni; a legegyszerűbb eljárás a polinomot binomiális együtthatók sorába, NEWTON sorba rendezni, amidőn a függvény momentumát kifejezhetjük a BERNOULLI függvény *binomiális momentumaival*

$$B_i = \binom{n}{i} p^i.$$

Az $f_s(\nu)$ momentumok között a legfontosabbak a binomiálisokon kívül a ν kedvező esetek, továbbá a $\xi = \nu - np$ eltérések hatvány momentumai. Ezéket a binomiális momentumok segélyével határozhatjuk meg; de van egy másik jó eljárás is; ugyanis kifejezhetjük, úgy a kedvező esetek, mint az eltérések hatvány momentumait a THIELE féle félinvariánsokkal. A BERNOULLI függvény e félinvariansaira az alábbi egyszerű formulát vezettem le; az s-edfokú félinvarians:

$$\lambda_s = n \sum_{i=0}^{s} (-1)^i i!\, p^{i+1} \mathfrak{S}_s^{i+1},$$

ahol $\mathfrak{S}_s^{i+1}$ a másodfajú STIRLING féle szám. Végeredményben a BERNOULLI függvény teljes momentumainak kiszámításánál semmi nehézség sincsen. A Stirling számok a valószínűség számításban nagy szerepet játszanak. Például a BERNOULLI probléma egyik általánosításánál, ha minden észlelésnél m esemény egyike fordulhat elő, $1/m$ valószínűséggel, akkor annak a valószínűsége hogy n észlelésnél minden esemény legalább egyszer forduljon elő (POINCARÉ tételének egy általánosítása)

$$P = \frac{m!}{m^n} \mathfrak{S}_n^m .$$

Azonban gyakran szükség van a *nem-teljes momentumokra* is. A BERNOULLI függvény nulladrendű nem-teljes momentumát (5), már tárgyaltuk. RAGNAR FRISCH-nek sikerült 1924-ben a BERNOULLI függvénynek $\xi = \nu - np$ eltérésekre vonatkoztatott nem-teljes momentumát meghatározni:

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda} (\nu - np) P(\nu) = -q\lambda P(\lambda). \tag{7}$$

RAGNAR FRISCH fontos eredménye után felmerült az a gondolat, hogy meg kellene határozni a BERNOULLI függvénynek egy magasabb fokú nem-teljes momentumát, mert az módot nyújthatna a függvény többi nem-teljes momentumának meghatározására. Tudtommal ez eddig nem sikerült. Ennek folytán valószínűségszámítási könyvem kéziratának revidiálásánál elhatároztam, hogy e kérdést a differenciaszámítás szempontjából vizsgálom meg.

A (7) formulából következik, hogy $\xi P(\nu)$ inverz differenciája $-q\nu P(\nu)$ tehát

$$\Delta^{-1} (\nu - np) P(\nu) = -q\nu P(\nu). \tag{8}$$

Ennélfogva ha a határokat a jobboldali mennyiségbe behelyettesítjük, megkapjuk a baloldali mennyiségek összegét az alsó határtól a felsőig, az utóbbi nincsen az összegbe beleértve. E formula értelmében, ha BERNOULLI függvényét (ν-np)-vel szorozzuk, akkor a szorzat inverz differenciája egyenlő BERNOULLI függvényének egy másik elsőfokú polinomali szorzatával. Megvizsgálandó, hogy magasabb fokú polinomok esetén fenn áll e hasonló reláció, továbbá, hogy milyen polinomok között.

Legyen $\varphi(\nu)$ egy tetszőleges polinom, melynek konstans tagja hiányzik. Rendezzük a polinomot NEWTON sorba és határozzuk meg a $\binom{\nu}{s} P(\nu)$ tag inverz differenciáját, a szorzatok inverz differenciájának képletével. Ha a szorzatot a következő módon írjuk,

$$\frac{1}{s} \Delta^{-1} \binom{\nu-1}{s-1} \cdot \nu P(\nu)$$

egyszerű számítás a következő eredményre vezet:

$$\Delta^{-1} \left[\binom{\nu}{s+1} P(\nu) \right] = -q \binom{\nu}{s+1} P(\nu) + \frac{(n-s)p}{(s+1)} \Delta^{-1} \left[\binom{\nu}{s} P(\nu) \right].$$

Ha bevezetjük a következő jelölést $f(s) = \Delta^{-1} \binom{\nu}{s} P(\nu)$, akkor az

$$f(s+1) - \frac{(n-s)p}{s+1} f(s) = -q \binom{\nu}{s+1} P(\nu) \tag{9}$$

elsőrendű, változós koefficiensű, teljes differencia egyenletre jutunk, melyet pozitív egész számú s-ekre a klasszikus módon megoldunk. Az eredmény, ha $f(s)$ és $f(0)$ helyett ismét visszatérünk az előző jelölésre

$$(10) \qquad \Delta^{-1}\left[\binom{\nu}{s}-\binom{n}{s}p^s\right]P(\nu)=-qP(\nu)\sum_{i=0}^{s}\binom{\nu}{s-i}\binom{n-s+i}{i}p^i\Big/\binom{s}{i}.$$

Miután az egyenlet jobb oldala zérus $\nu=0$ és $\nu=n+1$ esetén tehát a baloldali mennyiség teljes momentuma nulla.

Ha a műveletet a NEWTON sor minden tagján elvégezzük, arra a következtetésre jutunk, hogy csak ha a Δ^{-1} jel alatti mennyiség teljes momentuma nulla, csak akkor fejezhetjük ki annak inverz differenciáját és ennélfogva nem-teljes momentumát, a BERNOULLI függvény egy polinommal való szorzatával. Ez a polinom ugyanolyan fokszámú lesz, mint a Δ^{-1} jel alatti. Íly módon hosszú sorozatát kapjuk a BERNOULLI függvény nem-teljes momentumainak, melyeket a BERNOULLI függvénynek egy polinommal való szorzata ad. RAGNAR FRISCH eredménye is ezek közé tartozik.

Ha χ_s-vel jelöljük a kedvező esetek s-edrendű binomiális függvényének eltérését aritmetikai várhatóságuktól, $\chi_s=\binom{\nu}{s}-\binom{n}{s}p^s$ akkor a (10) formula egyszerűen megadja azok nem-teljes momentumát a

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda}\chi_s P(\nu)$$

összeget; de a $\binom{\nu}{s}P(\nu)$ mennyiség inverz differenciáját már nem fejezhetjük ki íly módon; ekkor ugyanis a (10) formulában a jobb oldalra kerül

$$\binom{n}{s}p^s\Delta^{-1}P(\nu)=\binom{n}{s}p^sI_q(n+1-\nu,\nu).$$

Leggyakrabban a $\xi=\nu-np$ eltérések, továbbá a ν kedvező esetek száma hatványainak nem-teljes momentumaira van szükség. Ezeket is megkaphatjuk a (10) képlettel, ha a ξ^k illetve ν^k hatványokat kifejezzük a $\binom{\nu}{i}$ együtthatókkal $i=0,1,2,\ldots,k$-ra.

De ha alacsony fokszámról van szó, akkor azokat egyszerűbb közvetlenül meghatározni. Például ha ξ^2 esetén a $\Delta^{-1}\ \xi\cdot\xi P(\nu)$ szorzaton végezünk parciális összegezést, végül a

$$\Delta^{-1}[\xi^2-npq]P(\nu)=q\nu(p-\xi)P(\nu)$$

eredményt érjük el. Hasonlóan kapjuk:

$$\Delta^{-1}[\xi^3-npq(q-p)]P(\nu)=-q\nu[(p-\xi)^2+(2n-1)pq]P(\nu).$$

Ezek után már csak a BERNOULLI függvény inverz differenciájának más, számításra alkalmasabb módon való kifejezése volna hátra. Ennek a lehetősége megmaradt, csupán az van kizárva, hogy azt a BERNOULLI függvénynek valamely polinommal való szorzatával érjük el. E kérdéssel való foglalkozás melegen ajánlható.

A RÖVID PERIÓDUSÚ CEPHEIDÁK PERIÓDUSVÁLTOZÁSAIRÓL*

DETRE LÁSZLÓ lev. tag

1. A változócsillagok periódusváltozásának kérdése kozmogónai szempontból nagy jelentőségű. A fényváltozás periódusát ugyanis, főleg a rövid periódusú változócsillagok esetében, összehasonlíthatatlanul nagyobb pontossággal lehet meghatározni, mint a csillagok bármely más állapotjelző adatát. Így tehát a csillag állapotában történő fejlődésszerű változásokat előbb, vagy utóbb — elsősorban a periódusában mutatkozó változásokon vehetjük észre.

A pontos fotometriai módszerek kidolgozása után remélhetjük, hogy még az egész csekély egy irányú periódusváltozásokat is belátható időn belül ki tudjuk mutatni. Fotoelektromosan a rövid periódusú Cepheidák fénygörbéjének felszálló ágán egy bizonyos fázis időpontját néhány másodperc pontossággal meg tudjuk határozni. Ilyen módon lehetségessé válhat, hogy még olyan lassú egy irányú periódusváltozásokat is néhány év alatt megállapíthatunk, amelyek csupán néhány percet tesznek ki egymillió év alatt.

Nagyon megnehezíti azonban a problémát a ciklikus periódusváltozások fellépése. Az $O-C$ diagramban** ezeknek a ciklikus periódusváltozásoknak az amplitudója igen nagy és így egy esetleg létező csekély egy irányú periódusváltozás — még a legpontosabb észlelésekkel is — hosszú időn át rejtve maradhat. Az eddig észlelt ciklusok hosszai 1,4 és 46 év között vannak és valószínű, hogy léteznek még hosszabb ciklusok is. Némely csillagnál még hozzá több ciklus rakódik egymásra. Emiatt nem állíthatjuk azt, hogy csak egyetlen RR Lyrae-változó periódusváltozásáról is bebizonyíthattuk volna annak fejlődésszerű mivoltát, még akkor sem, ha a periódus hosszú időn keresztül állandóan ugyanolyan irányú és egyenletes változást mutatott. Ugyanis mindig nyitva áll a lehetősége annak, hogy a látszólagosan szekuláris változás csak rövidebb fázisa egy hosszú periódusú periódusváltozásnak, vagy hogy az $O-C$ diagram sztochasztikus periódusváltozások felhalmozódásából alakul ki. Ez a helyzet még hosszú ideig így fog tartani.

Amennyiben ilyen esetekben az $O-C$ értékeket tisztán formálisan mégis egyenletes periódusváltozás ($P=P_0+\beta E$)*** feltételezésével egy

$$O-C=\varepsilon+\Delta P_0\cdot E+\frac{1}{2}\beta E^2 \tag{1}$$

* A moszkvai IV. Szovjet Kozmogóniai Konferencián 1954. október 28-án tartott előadás.

** Az $O-C$ diagramban általában a fényességmaximum megfigyelt időpontjának (O) eltérését ábrázoljuk egy állandó periódussal számított (C) értéktől.

*** Itt E a megfigyelések kezdete óta eltelt periódusok számát jelenti.

parabolával ábrázoljuk, akkor, ha a periódusokban csak periodikus, vagy sztochasztikus változások mutatkoznának, nagyobb számú csillagot véve tekintetbe kb. egyenlő számban kapnánk pozitív és negatív értékeket a β-ra. Érdekes megvizsgálni a jelenleg rendelkezésre álló megfigyelési anyag alapján, hogy a β-értékek megfelelnek-e ezeknek a követelményeknek. Annál is inkább, mert MARTIN az ω Centauri gömbhalmazban levő RR Lyrae csillagokra lényegesen több pozitív értéket kapott, mint negatívot.* A Tejútrendszer szabad RR Lyrae csillagaira a megfigyelési anyag lényegesen gazdagabb, mint az ω Centauri változóira és így rajtuk pontosabban lehet ilyen vizsgálatot elvégezni, mint a csillaghalmazokban található RR Lyrae csillagokról. Emellett fontos a periodikus periódusváltozások kérdése is. Felhasználtam ezekhez a vizsgálatokhoz az RR Lyrae csillagokról az irodalomban található egész megfigyelési anyagot és ezen kívül kb. 40 ezer fotografikus és 10 ezer fotoelektromos, még eddig közzé nem tett budapesti megfigyelési adatot is.

2. Az irodalomban igen sok adatot találni az RR Lyrae-csillagok periódusváltozásáról. Az $O-C$ diagramjaik interpretálására szekuláris és periodikus periódusváltozások mellett még ugrásszerű periódus- és fázisváltozásokat is feltételeztek. A szekuláris változások esetében már vizsgálták a β és a P_0 közötti összefüggést is és azt találták, hogy a β/P_0 hányados a P_0-lal nő. De ez az összefüggés véleményem szerint csak onnét származik, hogy egy bizonyos megfigyelési idő alatt a hosszabb periódusú csillagokon csak az erősebb periódusváltozásokat lehet észrevenni. Az ultrarövid periódusú RRa-csillagok periódusai mindenesetre aránylag stacionáriusak. Így CY Aqr ($P=0^d.06$) periódusában csak legutóbb tudtunk kimutatni egy igen kis amplitudójú ciklikus változást, míg XX Cyg ($P=0^d.14$) csak 50 évi megfigyelés után mutatott egy $0^s.03$ nagyságú periódusnövekedést.

Némelyik RR Lyrae-csillag periódusa már néhány év után kifejezetten változást mutat. Ameddig a megfigyelési idő rövid, az $(O-C)$-diagram legtöbbször az (1) formulával állítható elő. Az így kapott β-értékek körülbelül egyenlően oszlanak el pozitív és negatív értékekre, legfeljebb igen kicsi többlet mutatkozik a negatív β-kban. De ha a csillagokat tovább figyeljük, akkor némelyikről, éspedig túlnyomórészt a negatív β-juakról csakhamar kiderül, hogy az $(O-C)$ diagram ciklikus.

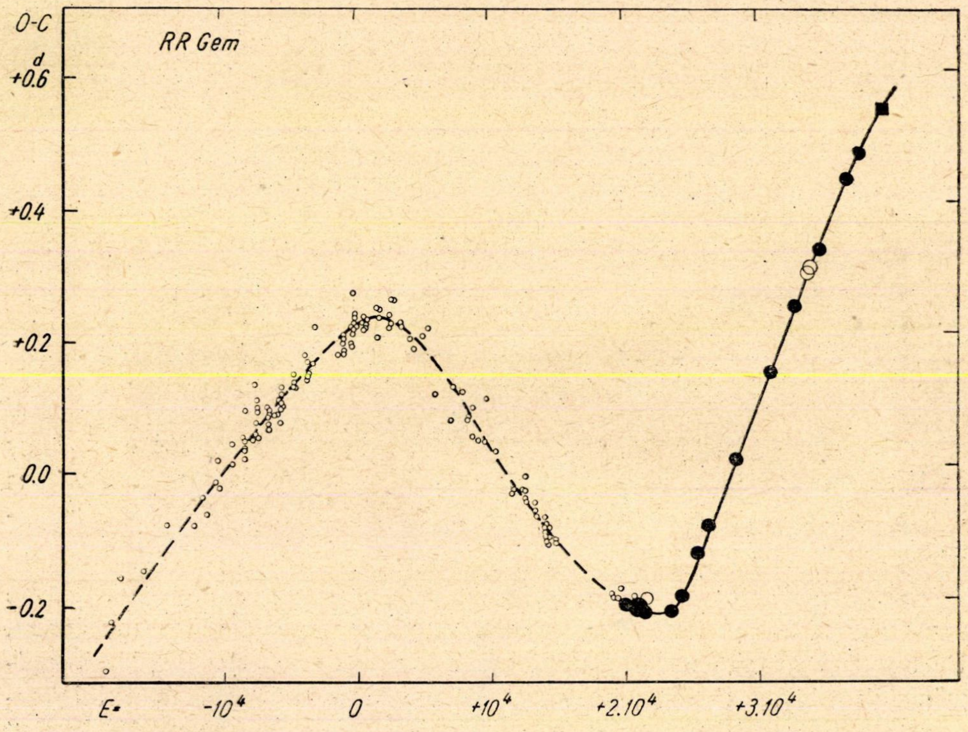
Jelenleg 69 olyan RR Lyrae-csillag van, amelyről már 25 évnél hoszszabb időre kiterjedő olyan megfigyelési anyag áll rendelkezésünkre, hogy $(O-C)$-diagramjuk jól analizálható. Ezek közül 19-re nem mutatható ki periódusváltozás. A többi 50 csillag $(O-C)$-diagramja mind a következő formulával állítható elő:

$$O-C=\varepsilon+\Delta P_0\cdot E+\frac{\beta}{2}E^2+\text{periodikus tag.} \tag{2}$$

Ugrásszerű változást egynél sem találtunk.

* Leiden Ann. XVII. 2.

11 csillagra $\beta = 0$, azaz ezek periódusa ciklikusan változik. Ha valamelyik csillagra már több ciklust átészleltek, akkor a különböző ciklusok periódusa és amplitudója, néhány RRc-csillagtól eltekintve ugyanaz. Így valószínű, hogy az összes ciklikus változások szigorúan periodikusak. A periodikus változások, különösen ha amplitudójuk az $(O-C)$-diagramban nagy, nem ábrázolhatók egyszerű sinus-formulával, mert a periódus fogyása hosszabb ideig tart, mint a növekedése. Nyilván ettől van, hogy a rövid időn át megfigyelt csillagokra kapott β értékek között több a negatív, mint a pozitív előjelű. A periódus-



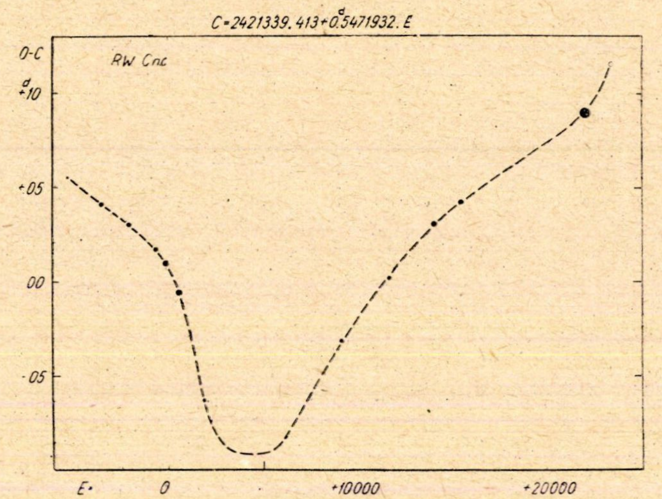
1. ábra. RR Gem $(O-C)$-diagramja. A budapesti megfigyeléseket fekete körrel (fotografikus megfigyelések) és négyzettel (fotoelektromos megfigyelések) ábrázoltuk.

csökkenésből a periódusnövekedésbe való néha igen gyors átmenet ugrásszerű változás látszatát kelti. De ha ez az átmenet jól át van észlelve, akkor tisztán látható, hogy az átmenet nem ugrásszerű (lásd 1. ábrát).

24 csillag $(O-C)$-diagramja az (1) formulával állítható elő. Ezek közül 20-ra pozitív β-értéket kaptunk és csak 4-re negatívot.

Azon 15 csillag közül, melyek $(O-C)$-diagramja egy periodikus és egy szekuláris tag szuperpoziciójával állítható elő (pl. lásd a 2. ábrát) csak egyre, SW And-ra kaptunk negatív β értéket. Ez a csillag, mint tudjuk, az I populációhoz tartozik és valószínű, hogy emiatt viselkedik ilyen eltérően a többitől.

Tehát 39 szekuláris periódusváltozást mutató RR Lyrae-csillag közül, amelyekről hosszú és jó megfigyelési anyag áll rendelkezésre, csak 5-re kapunk negatív β-át és 34-re pozitívot. Tehát a szabad RR Lyrae-csillagoknál a pozitív β-értékek igen nagy túlsúlyban vannak.



2. ábra. RW Cnc ($O-C$)-diagramja. Tipikus példa egy hosszú periódusú és egy szekuláris periódusváltozás összetevődésére.

A pozitív β-értékeknek ez az erős túlsúlya igen valószínűvé teszi, hogy az RR Lyrae-csillagok periódusváltozásának egy része fejlődésszerű. Óvatosan így fejezhetjük ki eredményünket: az RR Lyrae-csillagok erős tendenciát mutatnak a periódusnövekedésre.

3. A periódusnövekedések értéke átlagban 2^s évszázadonként. Persze anyagunkban erős kiválasztás érvényesül a nagy periódusváltozások javára. De mivel az állandó periódusú RR Lyrae-csillagok százaléka elég kicsi, eredményünk mégis azt jelenti, hogy egy csillagrendszerben, ahol új RR Lyrae-csillagok már nem keletkeznek, a periódusgyakoriság már néhány 10^5 év alatt lényegesen megváltozik.

Ármost kb. 20 évvel ezelőtt rámutattam arra,* hogy az RR Lyrae-csillagok periódusgyakorisága a különböző gömbhalmazokban igen eltérő. A 3. ábrán legutóbbi megfigyelési adatok alapján bemutatom a szabad és 14 különböző gömbhalmazban lévő RR Lyrae-csillagok periódus--amplitudó relációját. A halmazokat a bennük levő RRc-csillagok arányszáma szerint rendeztük.

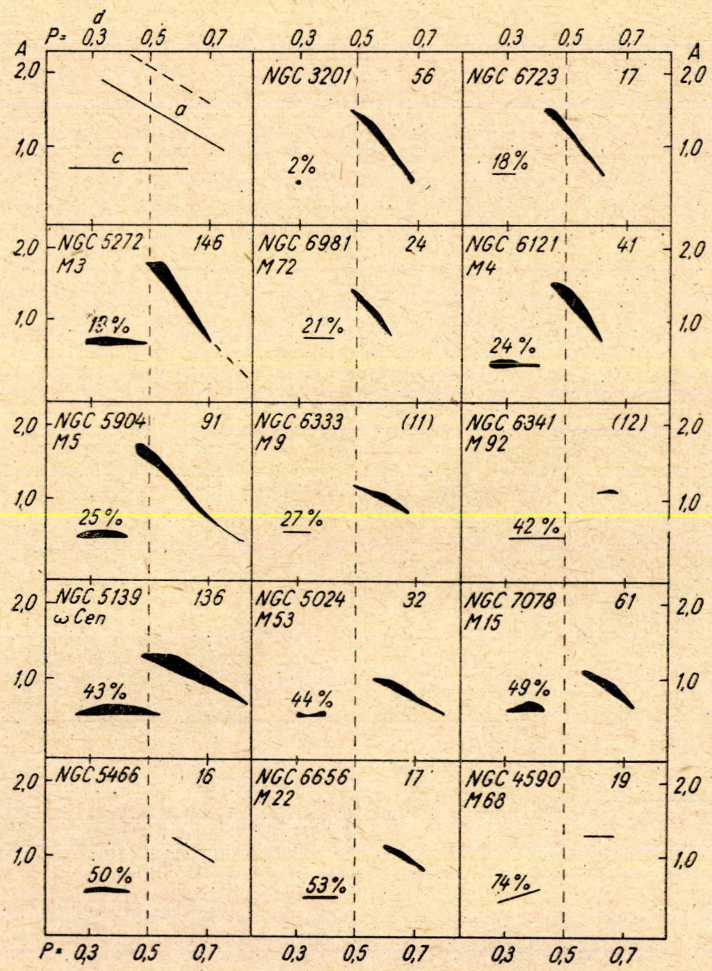
Ha kevés is némelyik halmazban a csillagok száma, a diagramokról a következő megállapításokat tehetjük:

a) A gömbhalmazokban hiányoznak az olyan RRa-csillagok, amelyek periódusa $0\overset{d}{.}31$ és $0\overset{d}{.}44$ közé esik.

* Stella Almanach 1932-re.

b) A *c*-csillagok százalékának növekedésével nő az *a*-csillagok közepes periódusa.

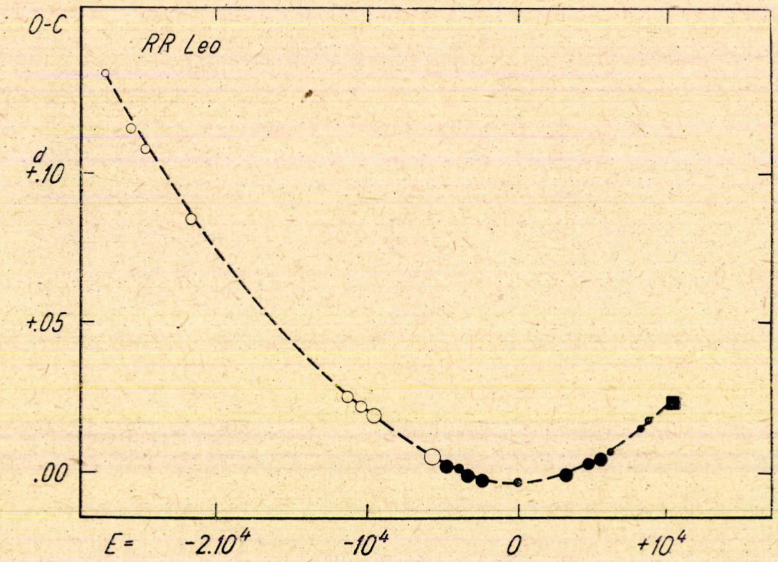
c) A *c*-csillagok százalékának növekedésével csökken az *a*-csillagok ágának meredeksége.



3. ábra. A szabad (fent baloldalt) és a gömbhalmazokban levő RR Lyrae-csillagok sematikus periódus-amplitudó relációja. Minden halmaznál feltüntettük az NGC-számot, a *c*-csillagok százalékszámát és a halmazban levő ismert periódusú változók számát. A vonalszélesség arányos a csillagok gyakoriságával. Az ultrarövid periódusú *a*-csillagok nincsenek feltüntetve.

Ha még hozzávesszük ezekhez a statisztikai sajátságokhoz a mi eredményeinket az RR Lyrae változók periódusnövekedésére vonatkozólag, akkor feltéve, hogy ezeknek a csillagoknak a fejlődése minden halmazban ugyanoly módon megy végbe, a 3. ábrát, mint fejlődési sémát, a következőképpen interpretálhatjuk:

Valamely gömbhalmazban az RR Lyrae csillagok közül először az a-csillagok jelennek meg. A c-csillagok később jelennek meg, amikor az a-csillagok ága már teljesen kifejlődött. Ez megegyezik KUKARKIN eredményével,* amely szerint valamely gömbhalmazban elsőnek a hosszú periódusú RR Lyrae változók lépnek fel. Az az állapot, amelynek folyamán az a-ág a $P = 0^{\rm d}.31$-ig kiterjed, a gömbhalmazokban rövid ideig tart. Tehát a $0^{\rm d}.31 - 0^{\rm d}.44$ periódusintervallumban igen gyorsan, néhány 10^5 év alatt kell végbe mennie az újabb RR Lyrae csillagok kifejlődésének és ebből a periódusintervallumból a periódus növekedése miatti eltűnésüknek. Azok a változók, amelyeknek az amplitudója kisebb és periódusa hosszabb, lényegesen lassabban haladnak jobbra lefelé a diagramban. Az a-ág meredekségének változása annak következtében jöhet létre, hogy a $\Delta A/\Delta P$ hányados a nagyobb amplitudókra nagyobb, mint a kisebbekre.



4. ábra. RR Leonis ($O-C$)-diagramja a fénygörbe felszálló ágának közepére vonatkozólag. A pontok és a négyzetek a budapesti észleléseket, a körök JORDAN, KOOREMAN, LUIZET és OOSTERHOFF észleléseit ábrázolják.

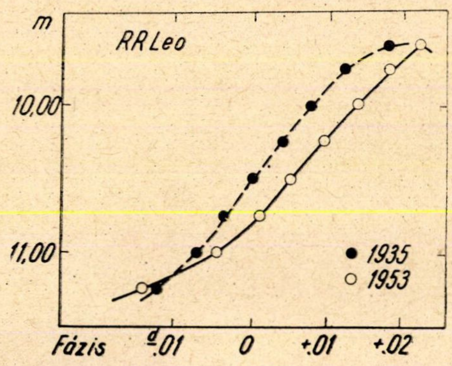
4. Ezen tisztára spekulatív megállapítások után térjünk vissza az észlelelési tényekhez a hosszú periódusú periódusváltozásokra vonatkozólag. Némely hosszú periodusú változásokat mutató RR Lyrae változó esetében észleléseink kiterjednek egy egész periódusra, vagy annak egy igen nagy részére. Ezekből megállapítható, hogy a hosszú periódusú periódusváltozások a fénygörbének periódikus változásaival járnak együtt és így Blazsko-effektust mutatnak.

Ez elsősorban az RR Lyrae-n mutatkozott. Ennek $O-C$-diagramjában 10 éves periodikus változás lép fel, amely maga is egy hosszabbra szuper-

* Előadás az 1954. májusi pulkovói változócsillag-konferencián.

ponálódik. A mi eredményeink szerint a közepes fénygörbe felszálló ágának meredeksége is ezzel a periódussal változik. Közepes fénygörbén értjük azt a fénygörbét, amelyből a rövidebb, 40 és 120 napos Blazsko-effektusokat kiküszöböltük. Így hát az RR Lyraenél legalább 3 Blazsko-effektus lép fel.

Az RR Leonis *O*—*C* diagramja (lásd 4. ábrát) egy parabola és egy igen kis amplitudójú ($0^{\mathrm{d}}003$) sinusgörbe szuperpoziciójaként állítható elő. Az utóbbi periódusára 33,3 év adódott. Ezt az eredményt a felszálló ágak közepeinek időpontjaiból számítottuk. Ha a felszálló ág más pontjaira vonatkozólag is megszerkesztjük az *O*—*C* diagramokat, akkor tapasztalhatjuk, hogy az így nyert *O*—*C* görbék egymással nem párhuzamosak. Ez azt jelenti, hogy a felszálló ág meredeksége változik. Mint az 5. ábrán látható, 1935-ben, észleléseink kezdetekor RR Leonis fénygörbéjének rendkívül meredek felszálló ága volt, amely 1954-ig lényegesen ellaposodott.



5. ábra. RR Leonis fénygörbéjének felszálló ága 1936-ban és 1954-ben (Balázs Júlia eredményei után).

Ezen eredmények jelentősége abban áll, hogy egy látszólag egy irányú periódusváltozás periodikus mivoltát pontos és homogén észlelésekből jóval a periodikus eltérések inflexiós pontjának elérése előtt megállapíthatjuk. Emellett a fénygörbe hosszú periódusú változásai arra mutatnak, hogy az RR Lyrae csillagok hosszú periódusú periódusváltozásait nem lehet értelmezni úgy, mint ahogy értelmezhető a födési változók esetében, vagyis láthatatlan társ körüli keringés következtében mutatkozó fényidő jelenségként.

A *c*-csillagok periódusváltozásai általában csak amiatt látszanak komplikáltnak, mert a változások periódusai rövidek (3—6 év) és emellett az amplitudóik nagyok. Tehát emiatt folytonos észlelésekre van szükség, hogy a törvényszerűségeket megtalálhassuk és az alapfényváltozás csekély amplitudója miatt az észleléseknek igen pontosaknak kell lenniök.

Magyar Tudományos Akadémia
Csillagvizsgáló Intézete.

A CIKLUSÍVEK REKTIFIKÁCIÓJÁRÓL *

SZÁSZ PÁL

Egy előbbi munkámban [1] a párhuzamossági axiómától függetlenül bizonyitottam be, hogy ha C az $\widehat{AB}$ körívnek valamely közbülső pontja, akkor $\widehat{AC}:\widehat{AB} < AC:AB$. A bizonyítás nemcsak a körre, hanem a hiperbolikus geometriában a paraciklusra és a hiperciklusra is érvényes. Ha tehát a kört, a paraciklust és a hiperciklust közös néven *ciklusnak* nevezzük amint szokásos, általánosabban fogalmazva fennáll a következő

I. TÉTEL. *Ha $\sigma > \sigma'$ ugyanazon cikluson fekvő ívek és a megfelelő húrok s és s', akkor*

$$\frac{\sigma'}{\sigma} < \frac{s'}{s}.$$

(A baloldalon ugyanazon ciklus két ívének *viszonya* áll, itt ívhosszúságról még nincsen szó, minthogy ciklusívet ugyanahhoz a ciklushoz tartozó ívvel éppen úgy mérhetünk, mint egyenesdarabot egyenesdarabbal.)

Felvéve a cikluson valamely rögzített α ívet, a I. tételből folyólag $\sigma' < \sigma$ esetén $\frac{\alpha}{\sigma'} s' > \frac{\alpha}{\sigma} s$, vagyis σ csökkentésénél $\frac{\alpha}{\sigma} s$ növekedik. Ha tehát kimutatjuk, hogy $\frac{\alpha}{\sigma} s$ felülről korlátos, akkor ezzel be lesz bizonyítva a

II. TÉTEL. *Ha α a ciklusnak valamely rögzített íve és ugyanezen ciklus σ ívének húrja s, akkor $\frac{\alpha}{\sigma} s$ meghatározott pozitív határértékhez tart, midőn $\sigma \to 0$.*

Az $\frac{\alpha}{\sigma} s$ korlátos voltát így láthatjuk be [2]. Megadva a σ ívet, a rögzített α ív felosztható az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ részekre úgy, hogy mindegyik $\alpha_i < \sigma$. Ha mármost az α_i ív húrját a_i-vel jelöljük, akkor tudvalevőleg

$$\min \frac{\alpha}{\alpha_i} a_i \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha}} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

* Német nyelvű vázlata: Über die Rektifikation des Kreises, des Grenzkreises und der Abstandslinie, Acta Math. Hung. 4 (1953), 251—253.

De mivel $\alpha_i < \sigma$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, a I. tétel alapján

$$\frac{\alpha}{\sigma} s < \min \frac{\alpha}{\alpha_i} a_i,$$

tehát még inkább áll

$$\frac{\alpha}{\sigma} s < a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Itt a jobboldali korlát egy az α ciklusívbe beírt poligon hossza, tehát kisebb valamely rögzített, ez ív köré írt poligon l hosszúságánál, minthogy az ív húrja a beírt poligonnal együtt konvex sokszöget alkot, amelyet a húr és a köréírt poligon alkotta sokszög körülzár. Ennélfogva ez egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\frac{\alpha}{\sigma} s < l.$$

Ez az l korlát független a σ ívtől, tehát ezzel igazoltuk, hogy $\frac{\alpha}{\sigma} s$ felülről korlátos, amivel a mondottak szerint a II. tétel is be van bizonyítva.

Jelöljük a II. tételben szereplő határértéket L-lel. Vagyis legyen

$$L = \lim \frac{\alpha}{\sigma} s \qquad (\sigma \to 0) \tag{1}$$

ahol α a szóban forgó ciklusnak valamely megadott íve és s ugyanezen ciklus σ ívének húrja. (E határérték természetesen függ az s mérésére szolgáló hosszegység választásától.)

Az (1) alatti határérték birtokában tüstént bebizonyíthatjuk a ciklusív rektifikálhatóságát. (Ez különben ismert módon következik abból a már előbb felhasznált tényből, hogy a ciklusívbe beírt poligon hossza korlátos.) Bontsuk ui. az $\widehat{AB}$ ciklusívet a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ívekre, amelyeknek húrjai rendre $s_1, s_2, \ldots, s_n$ legyenek. Tudjuk, hogy

$$\min \frac{\alpha}{\sigma_i} s_i \leqq \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{\frac{\sigma_1}{\alpha} + \frac{\sigma_2}{\alpha} + \cdots + \frac{\sigma_n}{\alpha}} \leqq \max \frac{\alpha}{\sigma_i} s_i. \tag{2}$$

Ha $\max \sigma_i \to 0$, akkor (1) szerint

$$\min \frac{\alpha}{\sigma_i} s_i \to L, \quad \text{valamint} \quad \max \frac{\alpha}{\sigma_i} s_i \to L,$$

tehát (2)-ből $\widehat{AB} = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n$ folytán következik, hogy

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_n \to \frac{\widehat{AB}}{\alpha} L.$$

Eszerint érvényes a

III. TÉTEL. *Az $\widehat{AB}$ ciklusív rektifikálható és ívhosszúsága*

$$p = \frac{\widehat{AB}}{\alpha} L, \tag{3}$$

ahol α az $\widehat{AB}$ ívet tartalmazó ciklusnak valamely megadott íve és $L > 0$ az (1) *alatti határérték.*

Speciális módszeremnek, amellyel itt a ciklusív rektifikálhatóságát bebizonyítottam, előnye, hogy a (3) képletből folyik a következő ismert

TÉTEL. *Ha a ciklus valamely σ ívének ívhossza p és húrja s, akkor*

$$\frac{p}{s} \to 1, \quad \text{midőn} \quad \sigma \to 0. \tag{4}$$

Ugyanis (3) értelmében a p ívhosszúság

$$p = \frac{\sigma}{\alpha} L,$$

tehát ennek az s húrhoz való viszonya

$$\frac{p}{s} = \frac{L}{\frac{\alpha}{\sigma} s},$$

ebből pedig az $L > 0$ határérték (1) alatti definíciójára tekintettel folyik (4).

E tételt BOLYAI JÁNOS [3] a 25. és 27. §-ban burkoltan, a 30. §-ban ellenben nyiltan felhasználta, az első és harmadik helyen a paraciklusra, a második helyen viszont a hiperciklusra vonatkozólag, de nem bizonyította be. Ezt a 30. §-ra nézve már F. SCHUR megjegyezte [4].

Nézetem szerint e (4) tétel képezi a legegyszerűbb alapot a hiperbolikus trigonometriának a paraszféra segítségével való előállításához [5]. Ugyanis az a magasságú paraciklusívet és egyben annak ívhosszát is $p(a)$-val jelölve, a paraszféra euklideszi geometriájából BOLYAI JÁNOS [6] klasszikus okoskodásával következik, hogy a háromszög a, b, c oldalai és ezekkel rendre szemben fekvő λ, μ, ν szögei között fennáll a

$$\sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu = p(a) : p(b) : p(c) \tag{5}$$

összefüggés, (4)-ből folyólag pedig

$$\lim \frac{p(a)}{a} = 1 \qquad (a \to 0), \tag{4*}$$

és e két tétel már elegendő arra, hogy a hiperbolikus trigonometria alapképleteit előállítsuk. Ez RÉTHY MÓR [7] szellemes módszerével történhet, csak a háromszög oldalaival mint sugarakkal leírt körök kerülete helyébe az oldalakkal mint magassságokkal bíró paraciklusívek hosszát kell tennünk. E módszert más helyen [8] már kidolgoztam exakt alakban, azonban az említett körök kerületével operálva, amint maga RÉTHY MÓR is tette. De az ott szereplő $K(a)$ függvény helyébe (5) és (4*) alapján az itteni $p(a)$ is tehető (amely különben egyenlő is vele), s ezáltal a tárgyalás átmegy a hiperbolikus trigonometria alapképleteinek jelzett előállításába. Ennél a módszernél nincs szükség sem az *elpattanási távolság* létezésére, sem pedig a *koncentrikus paraciklusok* megfelelő íveinek viszonyát kifejező képletre, és a felmerülő *függvényegyenlet* megoldása is itt a legegyszerűbb. Azt hiszem, mindez lényeges egyszerűsítést jelent, mind módszertani, mind didaktikai szempontból.

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *Szerzőtől,* Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene, *Acta Scientiarum Mathematicarum* **12** A (1950), 44–52, speciálisan 45—46.

[2] V. ö. *szerzőtől* [1], i. h. 46, vagy A hiperbolikus trigonometria közvetlen előállítása a tér felhasználásával, *MTA Mat. és Fiz. O. Közleményei* **3** (1953), 535—559, speciálisan 549—550, ahol is csak a körről van szó és ív helyett középponti szög szerepel.

[3] J. BOLYAI, Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens etc., Marosvásárhely 1832. Magyarul lásd pl. BOLYAI JÁNOS, Appendix, KÁRTESZI FERENC bevezetésével, megjegyzéseivel és kiegészítéseivel, Akadémiai Kiadó, Budapest 1952, speciálisan 93—94, 95—96, 99—101; v. ö. még ugyanitt 163—164.

[4] Vö. STÄCKEL PÁL, Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai, ford. RADOS IGNÁC, Budapest 1914, II. köt. 292.

[5] Ilyen természetű más előállításokat illetően lásd pl. *szerzőtől,* A hiperbolikus trigonometria különböző elemi előállításai, *MTA Mat. és Fiz. O. Közleményei* **3** (1953), 209—218, különösen 209—213, továbbá A hiperbolikus trigonometria új előállítása a paraszféra felhasználásával, uo. 521—526, valamint Beweis der Hauptformel der hyperbolischen Trigonometrie unabhängig von der Stetigkeit, *Act. Sci. Math.* **15** (1953), 57—60.

[6] J. BOLYAI [3], i. m. 25. §. Magyarul lásd pl. KÁRTESZI FERENC 3, i. m. 93—94.

[7] RÉTHY MÓR, Bolyai János „újj más világának" ismertetése, *Matematikai és Fizikai Lapok* **12** (1903), 1—29 és 303—320, speciálisan 15—18.

[8] *Szerzőtől* [2], második i. h. 4. §, 553—556.

FÉLIGEGYSZERŰ GYŰRŰK, MINT OPERÁTORTARTOMÁNYOK

KERTÉSZ ANDOR

Mesterem, Dr. Szele Tibor professzor emlékének hálával és mély tisztelettel

Tartalomjegyzék

1. §. Bevezetés

Az operátorcsoportok[1] elmélete ma már igen fontos és erős fejlődésben levő fejezete a modern algebrának. Ennek oka elsősorban abban rejlik, hogy az operátorcsoport fogalma igen szerencsés közös általánosítása a két legfontosabb algebrai struktúra, a csoport és a gyűrű fogalmának. Az operátorcsoportokra vonatkozó problémák vizsgálata tehát bizonyos esetekben csoportelméleti, illetve gyűrűelméleti eredményekhez vezet. Az operátorcsoport fogalmát tetszőleges operátortartomány mellett W. KRULL vezette be [12][2] 1925-ben, majd E. NOETHER nagy jelentőségű [15] dolgozatában részletesen kifejtette az operátorcsoportokra vonatkozó alapvető tényeket. NOETHER e dolgozatában találkozunk először az operátormodulus mai értelemben vett fogalmával is, amely az operátorcsoport igen általános fogalmának talán legfontosabb speciális esete. Operátormoduluson nevezetesen olyan additív Abel-féle csoportot értünk, amelynek operátortartománya tetszőleges gyűrű. Minthogy ilyen módon az operátormodulus fogalma magába foglalja egyfelől a közönséges Abel-féle csoportokat, másfelől az összes gyűrűket, érthető, hogy az operátormodulusok

[1] A használt fogalmak és elnevezések magyarázatát lásd a 2. §-ban.

[2] A szegletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén megadott irodalomjegyzékre utalnak.

vizsgálata rendkívül termékenynek bizonyult mind a csoportelmélet, mind a gyűrűelmélet szempontjából.

A jelen dolgozat tárgya annak vizsgálata, hogy a féligegyszerű gyűrűk mint operátortartományok milyen nevezetes tulajdonságokkal rendelkeznek. E kérdéskör tárgyalása két főrészben történik. Az első rész az elemi operátormodulusok és a féligegyszerű gyűrűk kapcsolatát vizsgálja, a második rész pedig a lineáris egyenletrendszerek elméletének általánosításával foglalkozik.

A dolgozat első eredménye a közönséges Abel-féle csoportok egy osztályát leíró struktúratételek általánosítását jelenti operátormodulusok esetére. A közönséges Abel-féle csoportok elméletében fontos szerepet töltenek be az *elemi Abel-féle csoportok.* Egy ilyen G csoport jellemezhető a következő négy ekvivalens tulajdonság bármelyikével. (lásd KERTÉSZ [10]):

α_0) *G prímszám rendű csoportok direkt összege*;

β_0) *G bármely zérustól különböző elemének rendje (véges és) négyzetmentes szám;*

γ_0) *G-ben bármely maximális független elemrendszer bázisa G-nek;*

δ_0) *G bármely részcsoportja direkt összeadandó.*

Mármost felmerül az a kérdés, hogy operátormodulusok esetében megvan-e a természetes általánosítása a fenti négy tulajdonságnak, s ekvivalensek-e ezek? E dolgozat 3. §-ában erre a kérdésre pozitív választ adunk, s így azt nyerjük, hogy az elemi Abel-féle csoport fogalma általánosítható operátormodulusokra, mégpedig igen általános feltétel mellett. A modulus R baloldali operátortartományáról csak azt kell feltételeznünk, hogy egységelemes gyűrű legyen. Bebizonyítjuk, hogy *egy ilyen G operátormodulusra ekvivalensek a következő tulajdonságok:*

α) *G minimális R-modulusok direkt összege;*

β) *G bármely zérustól különböző elemének rendje R véges számú maximális baloldali ideáljának metszete;*

γ) *G-ben bármely maximális független elemrendszer bázisa G-nek;*

δ) *G bármely részmodulusa direkt összeadandó.*

Nyilvánvaló, hogy az utóbbi feltételek abban a speciális esetben, amikor az operátortartomány az egész számok gyűrűje, éppen a közönséges elemi Abel-féle csoportokat jellemző fentebbi (azonos görög betűvel jelzett) feltételekbe mennek át. Indokolt tehát az α), β), γ), δ) tulajdonságok bármelyikével rendelkező R-modulusokat *elemi operátormodulusoknak* neveznünk. Örvendetes, hogy az elemi operátormodulusok kategóriája ennyire általános feltételek mellett jellemezhető. A legtöbb csoportelméleti eredménynek operátormodulusokra való általánosításánál ugyanis az operátortartományra nézve többé-kevésbé súlyos kikötéseket kell tenni (pl., hogy főideálgyűrű, vagy integritástartomány, vagy egységelemes kommutatív gyűrű, stb. legyen). A 7. és 8. § vizsgálatai azt mutatják, hogy még az az egyetlen kikötés, amelyet az elemi operátormodulus értelmezésével kapcsolatban tettünk — ti. az operátortartomány egységelemének egzisztenciája, — sem jelent lényeges megszorítást.

Az elemi operátormodulus fogalmának fontos speciális esete az olyan operátormodulus, amely véges számú minimális részmodulusának direkt öszszegeként állítható elő. Az ilyen operátormodulusokat csoportelméleti és gyűrűelméleti analogonjukra való tekintettel *teljesen redukálható operátormodulusoknak* nevezzük. *A* 4. §-ban bebizonyítjuk, hogy egy operátormodulus akkor és csak akkor teljesen redukálható, ha van véges számú olyan maximális részmodulusa, amelyek metszete 0. E tétel bizonyítása annyira általánosan fogalmazható meg, hogy az Abel-féle csoportokra és a gyűrűkre vonatkozó következményeken kívül hasonló tartalmú állítást foglal magában teljesen redukálható csoportokról és véges számú egyszerű gyűrű direkt összegére bontható gyűrűkről is.

Az operátormodulusok vizsgálatában gyakran fellépő probléma adott tulajdonsághoz meghatározni az összes olyan operátormodulust, amely ezzel a tulajdonsággal rendelkezik. Így jutunk az *operátormodulusoknak* e tulajdonsággal jellemzett osztályához. Minden így felvetett kérdésnek azonban van egy duálisa is, nevezetesen: melyek az összes olyan R gyűrűk, amelyekre érvényes az, hogy bármely R-modulus bír az adott tulajdonsággal? Ily módon a *gyűrűknek* egy bizonyos osztályát jellemezzük. Az elemi operátormodulusok ismeretében tehát természetszerűen merül fel az a kérdés, hogy melyek azok az R gyűrűk, amelyekre bármely R-modulus elemi operátormodulus. Ezt a problémát oldjuk meg az 5. §-ban. Látni fogjuk, hogy ezek a gyűrűk éppen a klasszikus értelemben vett *féligegyszerű gyűrűk.* (Már itt hangsúlyozzuk, hogy a jelen dolgozatban féligegyszerű gyűrűn mindig a *klasszikus értelemben vett* féligegyszerű gyűrűt fogjuk érteni, azaz az olyan gyűrűt, amely nem tartalmaz zérustól különböző nilpotens baloldali ideált, és baloldali ideáljaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget.)

Az irodalomban már eddig is előfordultak olyan vizsgálatok, amelyek a féligegyszerű gyűrűkkel mint operátortartományokkal foglalkoznak. KRULL [13] és KÖTHE [11] eredményeiből könnyen következik, hogy féligegyszerű R gyűrű esetén bármely R-modulus minimális R-modulusok direkt összegére bontható. Ezt az eredményt fejleszti tovább messzemenően O. GOLDMAN [8], aki kimutatja, hogy a féligegyszerű gyűrűkre jellemző az a tulajdonság, hogy bármely R-modulus direkt összege egy R által annullált részmodulusnak és egy minimális részmodulusok direkt összegeként előállitható R-modulusnak. Megemlítjük még R. BAER [2] dolgozatában a „referee" megjegyzését, mely szerint a féligegyszerű gyűrűket az egységelemes gyűrűk között jellemzi az a tulajdonság, hogy bármely R-modulus direkt összeadandója minden olyan R-modulusnak, amelyben részmodulusként van tartalmazva. Ezért a féligegyszerű gyűrűknek az 5. §-ban adott jellemzései közül csak a β) és γ) tulajdonságoknak megfelelő jellemzéseit tekintjük lényegesen újnak. Hangsúlyozzuk azonban, hogy vizsgálataink az ismert jellemzésekre is új, az eddigieknél egyszerűbb bizonyítást adnak, s lehetővé teszik ezeknek a tételeknek egy mélyrehatóbb elmélet egységes keretébe való természetes beillesztését.

A 6. §-ban a féligegyszerű gyűrűknek tisztán gyűrűelméleti jellemzéseit adjuk. Ezek a jellemzések megfelelnek a fenti tulajdonságok gyűrűkre vonatkozó analogonjainak. Például a következő erdményt nyerjük: *egységelemes R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely baloldali ideálja direkt összeadandója a gyűrű additív csoportjának* (mint baloldali R-modulusnak). Ezeken kívül a 4. § eredményeinek alkalmazásával nyerjük a következő tételt, amely az ismert NOETHER-féle tétel duálisának tekinthető: *egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha van egységeleme és van véges számú olyan maximális baloldali ideálja, amelyek metszete* 0.

A dolgozat 7. és 8. §-ában azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy e vizsgálatokban milyen mértékben nélkülözhető még az az egyetlen kikötés is, amelyet az alapul vett R gyűrűre kiróttunk, ti. az egységelem egzisztenciája. Az elemi operátormodulus lehető legmesszebbmenő általánosítása céljából a gyűrűről még az egységelem létezését sem tételezve fel, bizonyos hasonló természetű jellemző tulajdonságok ekvivalens voltát tudjuk kimutatni. Sikerül továbbá a féligegyszerű gyűrűknek, mint operátortartományoknak egy olyan jellemzését adni, amelyben az egységelem létezését sem kell feltételeznünk. Ez az eredmény a következő: *egy R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha R bármely L baloldali ideálja és a tetszőleges G R-modulus bármely g eleme esetén az Lg részmodulus direkt összeadandója G-nek.* Ennek a tételnek alkalmazásával O. GOLDMAN már idézett tételének messzemenő általánosítását nyerjük (8. §).

Az elemi operátormodulusok és féligegyszerű gyűrűk kapcsolatára vonatkozó eredményeink új fényt vetnek a féligegyszerű gyűrűk fontosságára és jelentőségére, s mintegy azt mutatják, hogy a féligegyszerű gyűrűk alkalmazhatóság tekintetében közvetlenül a ferdetestek után következnek. Másszóval, a féligegyszerű gyűrű a ferdetest fogalmának természetesen adódó olyan általánosítása, amelyben a ferdetest legtöbb döntő kihatású tulajdonsága lényegében megmarad. (Pl. a féligegyszerű gyűrűvel, mint operátortartománnyal ellátott modulus a vektortér fogalmának olyan általánosítása, amely megtartja a vektortér legfontosabb tulajdonságait.) A ferdetestek és féligegyszerű gyűrűk rokonságára azonban legjobban az a tény világít rá, hogy a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete a ferdetestek esetéről kiterjeszthető a féligegyszerű gyűrűk esetére. Az erre vonatkozó eredmények tárgyalásával foglalkozik a dolgozat második része.

A lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete szerint bármely kompatibilis lineáris egyenletrendszernek van olyan megoldása, amelynek elemei az egyenletrendszer jobboldalán álló konstansok lineáris kombinációi, és az ösz-

szes megoldás e megoldásból szabadon választható értékű paraméterek lineáris függvényeinek hozzáadásával nyerhető. (A kompatibilitás feltételének teljesülésén azt értjük, hogy az egyenletek baloldalán álló lineáris formák között fennálló bármely függési relációt követik a megfelelő egyenletek jobboldalai is.) Ha R olyan gyűrű, hogy R fölött bármely kompatibilis lineáris egyenletrendszer összes megoldásai a fenti módon nyerhetők, akkor azt mondjuk, hogy *az R gyűrű fölött érvényes a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete.* Ismeretes, hogy ferdetestre érvényes ez az elmélet véges számú egyenletből álló rendszert véve alapul. GACSÁLYI SÁNDORnak és SZELE TIBORnak sikerült általánosítania ezt az eredményt arra az esetre, ha az egyenletek és ismeretlenek számossága tetszőleges ([7], [17]). A dolgozat második részének főeredménye annak megmutatása, hogy *egy R gyűrű fölött akkor és csak akkor érvényes a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete, ha R féligegyszerű gyűrű.* Ez a tétel másszóval azt fejezi ki, hogy a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete általánosítható arra az esetre, amikor az alapul választott gyűrű nem ferdetest, hanem egy tetszőleges féligegyszerű gyűrű, s továbbá, hogy a féligegyszerű gyűrűk egyúttal azt a legtágabb gyűrűkategóriát alkotják, amelyre ez a klasszikus elmélet átvihető (10. §.).

A lineáris egyenletrendszerek elméletével kapcsolatos vizsgálataink alapja a kompatibilis lineáris egyenletrendszer igen jól használható következő „koordinátamentes" definíciója (9. §.): *tetszőleges R gyűrű fölötti kompatibilis lineáris egyenletrendszeren egy szabad R-modulus valamely részmodulusának R-be mint R-modulusba való adott operátorhomomorf leképezését értjük.* Egy ilyen egyenletrendszer megoldhatóságára vonatkozó és dolgozatomban felhasznált igen értékes észrevételéért POLLÁK GYÖRGYnek mondok köszönetet.

2. §. Jelölések és elnevezések

Ebben a paragrafusban előrebocsátjuk a továbbiakban használt alapfogalmakat és jelöléseket. A csoport és a gyűrű fogalmát, továbbá e fogalmakra vonatkozó alapvető fontosságú elemi tényeket ismertnek tételezzük fel. (Erre vonatkozólag lásd pl. RÉDEI [16].)

Legyen G additive írt Abel-féle csoport, és R tetszőleges gyűrű. G elemeit $a, b, c, \ldots, g, h$ betűkkel jelöljük. Az additív írásmódnak megfelelően G-ben a neutrális elem 0, és egy a elem inverze $-a$. Az R gyűrű elemeinek jelölésére az $r, s, t, \ldots, x, y, z$ betűket használjuk. A többi latin kisbetű természetes számokat jelent. Az R gyűrű zéruselemét is 0-val jelöljük, amit a félreértés veszélye nélkül megtehetünk. Ha R egységelemes gyűrű, akkor egységelemének jelölésére az 1 jelet használjuk.

A. G Abel-féle csoportot az R gyűrűvel, mint operátortartománnyal ellátott *operátormodulusnak* nevezzük, ha R bármely r és G bármely a eleméhez egyértelműen hozzá van rendelve G-nek valamely eleme, amelyet ra-val jelölünk, s az r, a elempár szorzatának nevezünk, éspedig olyan módon, hogy teljesülnek az alábbi követelmények:

(1) $$r(a+b)=ra+rb$$

(2) $$(r+s)a=ra+sa$$

(3) $$(rs)a=r(sa)$$

ahol r, s tetszőleges R-beli, a, b pedig tetszőleges G-beli elemek. — Az (1) követelmény azt fejezi ki, hogy az

$$a\to ra \qquad (r\in R,\ a\in G)$$

leképezés bármely rögzített R-beli r elem esetén G-nek endomorfizmusa. Nyilvánvaló, hogy (1) és (2) akárhány (de véges sok) összeadandó esetében is érvényes, továbbá hogy $0\cdot a=0$ és $r\cdot 0=0$. Az így definiált operátormodulus esetében azt szokás mondani, hogy R a G csoport baloldali operátortartománya. Ha az R gyűrű elemeit a G elemei mellé jobbról írjuk szorzótényezőül, s megkívánjuk az ennek megfelelően átírt (1), (2), (3) követelmények teljesülését, akkor olyan operátormodulust kapunk, amelynek R jobboldali operátortartománya. Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban mindig baloldali operátortartománynyal ellátott operátormodulust tekintünk. Eredményeink természetesen átfogalmazhatók jobboldali operátortatományok esetére is. Azt a tényt, hogy G az R gyűrűvel, mint baloldali operátortartománnyal ellátott operátormodulus, a következőkben röviden úgy fejezzük ki, hogy G R-modulus. — Bármely (additíve írt) Abel-féle csoport úgy tekinthető, mint E-modulus, ha E-vel a racionális egész számok gyűrűjét jelöljük. Ebben a fontos speciális esetben azt mondjuk, hogy G a *természetes operátortartománnyal* van ellátva, s a G E-modulusban az $a\in G$ elemnek az n egész számmal való szorzata $n>0$ esetén az n tagú $a+a+\cdots+a$ összeggel, $n<0$ esetén pedig emez összeg negatívjával van értelmezve. Minthogy a természetes operátortartománnyal így bármely Abel-féle csoport ellátható, az ilyen operátormodulusokat nem szokás megkülönböztetni a közönséges modulusoktól (azaz az olyan additív Abel-féle csoportoktól, amelyekhez nincs külön előírással operátortartomány megadva). — Bármely R gyűrű is tekinthető R-modulusnak, ahol a modulus maga az R gyűrű R^+-szal jelölt additív csoportja, az operátortartomány elemeivel való szorzás pedig az R gyűrűben értelmezett szorzással van adva.

A G R-modulus valamely H részhalmazát *részmodulusnak* nevezzük, ha H a G-ben definiált műveletekre nézve maga is R-modulus. A G modulusnak tehát csak olyan H (additív) részcsoportját tekintjük részmodulusnak, amelyre $r\in R$ és $h\in H$ esetén mindig $rh\in H$.[3] E definíció értelmében nyilvánvaló, hogy egy G E-modulus részmodulusai éppen részcsoportjaival, s egy R gyűrű mint R-modulus részmodulusai R baloldali ideáljaival esnek össze.

[3] G ilyen tulajdonságú (additív) részcsoportjait az R operátortartomány szempontjából *megengedett részmodulusnak* is szokás nevezni. Mi azonban a rövidebb „részmodulus" elnevezést használjuk.

— Bármely (egynél több elemű) R-modulusnak van legalább két részmodulusa: maga az egész modulus, és az egyetlen elemből álló 0 részmodulus. Ha a G R-modulusnak csupán ez a két részmodulusa van, akkor azt mondjuk, hogy G *minimális R-modulus.*[4]

Egy G R-modulusnak egy $\bar{G}$ R-modulusra való olyan $g \to \bar{g}$ egyértelmű leképezését, amelyre

$$\overline{g+h} = \bar{g} + \bar{h} \tag{4}$$

és

$$\overline{rg} = r\bar{g} \tag{5}$$

bármely g, $h \in G$ és $r \in R$ elemek esetén teljesül, *homomorfizmusnak* nevezzük. Ha G homomorf módon leképezhető $\bar{G}$-ra, akkor azt mondjuk, hogy a $\bar{G}$ R-modulus a G R-modulusnak homomorf képe, amit így jelölünk: $G \sim \bar{G}$. Ha a homomorfizmus kölcsönösen egyértelmű leképezés, akkor *izomorfizmusnak* nevezzük és a $G \simeq \bar{G}$ jelölést használjuk.[5] Abban az esetben, ha az operátortartomány E, 5) teljesülése következik (4)-ből, tehát közönséges csoportok esetében elegendő (4)-et megkövetelnünk.

Operátormodulusok esetében is érvényes a *homomorfizmus-tétel,* mely szerint ha a G R-modulusnak a $\bar{G}$ R-modulus homomorf képe, akkor G-nek van olyan H részmodulusa (ez éppen az összes olyan $g \in G$ elemek halmaza, amelyek képe a tekintett homomorfizmusnál 0), hogy

$$G/H \simeq \bar{G},$$

azaz a G/H faktormodulus izomorf a $\bar{G}$ modulussal. Egyébként a G tetszőleges H részmodulusa szerint vett G/H faktormodulus ugyanúgy van értelmezve, mint közönséges, Abel-féle csoportok esetén; itt csupán azt kell hangsúlyoznunk, hogy mivel a H részmodulus definíciónk szerint R-modulus, a G/H faktormodulus természetes módon el van látva R-rel, mint operátortartománnyal: a faktormodulus $g+H$ elemének az r elemmel való szorzatán $rg+H$-t értve, nyilvánvaló, hogy R elemeinek és G/H elemeinek szorzata egyértelmű.

A továbbiakban igen fontos szerepet tölt be az operátormodulusok direkt összegre való felbonthatóságának fogalma. Akkor mondjuk, hogy a G *R-modulus felbontható a $H_1, H_2, \ldots, H_\nu, \ldots$ részmodulusok direkt összegére,* (ahol $H_1, H_2, \ldots, H_\nu, \ldots$ a G modulus részmodulusainak tetszőleges halmaza,) ha G bármely g eleme előállítható véges számú $g_{\nu_1}, g_{\nu_2}, \ldots, g_{\nu_k}$ elem összegeként:

$$g = g_{\nu_1} + g_{\nu_2} + \cdots + g_{\nu_k} \qquad (g_{\nu_i} \in H_{\nu_i}, i = 1, \ldots, k), \tag{6}$$

[4] Emellett az irodalomban „irreducibilis R-modulus" vagy „egyszerű R-modulus" elnevezés is használatos.

[5] Az általunk definiált homomorfizmust és izomorfizmust szokás „operátorhomomorfizmusnak" és „operátorizomorfizmusnak" is nevezni, megkülönböztetésül a közönséges értelemben vett homomorfizmus és izomorfizmus fogalmától. Mi azonban a rövidség kedvéért a fenti elnevezést használjuk.

és ez az előállítás egyértelmű. Nyilvánvaló, hogy ennek szükséges és elegendő feltétele a következő: a $H_1, H_2, \dots, H_\nu, \dots$ részmodulusok *generálják* a G modulust, azaz G bármely g eleme (legalább egyféleképpen) előállítható legyen (6) alakban, és

$$g_{\nu_1} + g_{\nu_2} + \cdots + g_{\nu_k} = 0 \tag{7}$$

csak $g_{\nu_1} = g_{\nu_2} = \cdots = g_{\nu_k} = 0$ esetén álljon. (Ez utóbbi követelmény, amely úgy is fogalmazható, hogy bármely H_ν-nek az összes többi által generált részmodulussal való közös része csak a zéruselem legyen, biztosítja a (6) alatti előállítás egyértelműségét.) Azt, hogy G a $H_1, H_2, \dots, H_\nu, \dots$ részmodulusok direkt összege, így jelöljük:

$$G = H_1 + H_2 + \cdots + H_\nu + \cdots = \sum_\nu H_\nu.$$

Ha H a G R-modulusnak olyan részmodulusa, amelyhez található G-nek olyan K részmodulusa, hogy

$$G = H + K$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy H a G operátormodulus *direkt összeadandója*. Ekkor természetesen K is direkt összeadandója G-nek, és közöttük a következő kapcsolat áll fenn:

$$H \simeq G/K, \quad K \simeq G/H.$$

Ha a G operátormodulus R operátortartománya egységelemes gyűrű, akkor általában ebből még nem következik, hogy $1 \in R$ identikus operátor. Előfordulhat ugyanis, hogy van G-nek olyan g eleme, amelyre $1 \cdot g \neq g$. Ez a helyzet például abban a triviális esetben, amikor $rg = 0$ bármely $r \in R$ és $g \in G$ esetén. Ha R egységelemes gyűrű és G olyan R-modulus, hogy G bármely g elemére fennáll az

$$1 \cdot g = g$$

egyenlőség, akkor a G operátormodulust (BOURBAKI szerint [3]) *unitér R-modulusnak* nevezzük. Ha R egységelemes gyűrű és G R-modulus, akkor G felbomlik egy R által annullált részmodulus és egy unitér R-modulus direkt összegére. Ezt mutatja az ún. Peirce-féle felbontás:

$$g = (g - 1 \cdot g) + 1 \cdot g.$$

Könnyű belátni ugyanis, hogy G az összes $g - 1 \cdot g$ alakú elemek által alkotott G_0, továbbá az $1 \cdot g$ alakú elemek által alkotott G_1 részmodulus direkt összege. Mármost a G_0 részmodulust az 1 elem (s így R is) annullálja, míg G_1-et (elemenként) reprodukálja. Minthogy a G_0 modulus az R operátortartomány szempontjából „triviálisan" viselkedik, általában nem jelent lényeges megszorítást az, ha egységelemes R gyűrű esetén unitér R-modulusokra szorítkozunk.

Legyen G tetszőleges R-modulus, és tekintsük azon R-beli r elemek I halmazát, amelyek a G modulus a elemét annullálják, azaz amelyekre $ra = 0$.

Nyilvánvaló, hogy I az R gyűrű baloldali ideálja s ezt a baloldali ideált nevezzük *az a elem rendjének.* Tetszőleges g elem rendjének jelölésére az $O(g)$ jelet fogjuk használni. Az elem rendjének így definiált fogalma természetes általánosítása a közönséges rendfogalomnak. Közönséges Abel-féle csoportok, azaz unitér E-modulusok esetében ugyanis (minthogy E bármely ideálja főideál) a rendideál helyett az azt generáló nem-negatív számot szokás az elem rendjének nevezni.

Ha $g \in G$, akkor az Rg elemhalmaz, azaz az összes rg $(r \in R)$ elemek halmaza G-nek részmodulusa, s azt mondjuk, hogy *Rg a g elemmel kifeszített monogén R modulus.* Ennek jelölésére az Rg jelet használjuk. Ha G unitér R-modulus, akkor $g \in Rg$. Ebben az esetben az Rg monogén modulus egybeesik a g elemet tartalmazó legszűkebb részmodulussal, amelyet *a g elem által generált (ciklikus) R-modulusnak* nevezünk és $\{g\}$-vel jelölünk. Könnyű belátni, hogy tetszőleges R-modulus esetén a g elemmel kifeszített monogén R-modulus izomorf az $R/O(g)$ faktormodulussal. Speciálisan, ha $O(g)$ az R gyűrű kétoldali ideálja, akkor az Rg modulus (operátor-) izomorf az $R/O(g)$ maradékosztálygyűrű additív csoportjával.

Legyen

$$S: a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$$

a G R-modulus tetszőleges elemrendszere. Az összes (véges tagszámú és)

$$r_1 a_{\nu_1} + \cdots + r_k a_{\nu_k} \qquad (a_{\nu_i} \in S,\ r_i \in R)$$

alakú összegek H halmaza G-nek részmodulusa s ezt a részmodulust *az S elemrendszer által kifeszített részmodulusnak* nevezzük. Ettől élesen meg kell különböztetnünk *az S elemrendszer által generált*

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots\} = \{S\}$$

részmodulust, amelyen G-nek S összes elemét tartalmazó legszűkebb részmodulusát értjük.[6] Ha azonban G unitér R-modulus, akkor H megegyezik $\{S\}$-sel.

Az olyan elemrendszert, amely az egész G operátormodulust kifeszíti, *a G modulus kifeszítő rendszerének* hívjuk. *A G modulus* valamely *generáló rendszerének* pedig az olyan S elemrendszert nevezzük, amelyre $\{S\} = G$. Nyilvánvaló, hogy G egy kifeszítő rendszere egyszersmind generáló rendszere is G-nek, de ennek megfordítottja nem mindig igaz.

A kifeszítő és a generáló rendszer fogalmának legfontosabb közös speciális esete a bázis fogalma. Ennek értelmezéséhez azonban szükségünk van a függetlenség definíciójára is. Egy R-modulus véges számú zérustól különböző $b_1, b_2, \ldots, b_n$ elemét *függetlennek* nevezzük, ha egy

$$(8) \qquad r_1 b_1 + r_2 b_2 + \cdots + r_n b_n = 0 \qquad (r_i \in R, i = 1, \ldots, n)$$

[6] Az S elemrendszerrel kifeszített részmodulus mindig része az S által generált részmodulusnak. Speciálisan, ha G triviális R-modulus — azaz, ha bármely $r \in R$ és $g \in G$ elemek esetén mindig $rg = 0$ — akkor bármely elemrendszerrel kifeszített részmodulus 0.

alakú reláció fennállása esetén szükségképpen

$$r_1 b_1 = r_2 b_2 = \cdots = r_n b_n = 0.$$

A modulus elemeiből álló tetszőleges számosságú elemrendszert pedig akkor nevezzük függetlennek, ha bármely véges részrendszere független. Az így definiált függetlenség tehát véges jellegű tulajdonság, s ezért ZORN lemmája, (vagy az azzal ekvivalens TUKEY-féle lemma) szerint egy G operátormodulus bármely U részhalmaza tartalmaz egy S maximális független elemrendszert. Az $U = G$ esetben azt mondjuk, hogy S maximális független elemrendszere G-nek.

A G operátormodulus bármely független kifeszítő rendszerét a G modulus *bázisának* nevezzük. Ha egy elemrendszer a G modulusnak bázisa, akkor G direkt összege a bázis elemei által kifeszített monogén modulusoknak.[7]

Ha A tetszőleges részmodulusa G-nek, akkor az összes lehetséges ra ($r \in R$, $a \in A$) alakú szorzatokból megalkotható véges tagszámú összegek halmazát RA-val jelöljük. RA részmodulusa G-nek és mindig része A-nak. Ha G unitér modulus, akkor természetesen mindig $RA = A$.

I. ELEMI OPERÁTORMODULUSOK ÉS FÉLIGEGYSZERŰ GYŰRŰK

3. §. Az elemi operátormodulusok struktúrája

E paragrafus tárgya az elemi Abel-féle csoportok fogalmának unitér modulusok esetére való általánosítása. Meghatározzuk mindazon unitér modulusokat, amelyekre teljesülnek a közönséges elemi Abel-féle csoportokat jellemző tulajdonságok operátormodulusokra értelmezett megfelelői. Látni fogjuk, hogy az így meghatározott operátormodulusok abban a speciális esetben, amikor az operátortartomány az egész számok gyűrűje, éppen a közönséges elemi Abel-féle csoportokkal egyeznek meg.

Ebben és a következő paragrafusokban igen fontos szerepet tölt be a *minimális operátormodulus* fogalma. Amint már az előző §-ban is definiáltuk, egy A R-modulust minimálisnak nevezünk, ha csupán két részmodulusa van: 0 és maga A. — Legyen A minimális R-modulus. Ha $RA = 0$, azaz ha az R gyűrű az A moduluson „triviálisan" operál, akkor nyilvánvaló, hogy A prímszám rendű (ciklikus) csoport. Ha viszont $RA \neq 0$, akkor $RA \subseteq A$ miatt

[7] A bázis általunk ilyen módon definiált fogalma, amely finomabb fogalom a G modulus független generáló rendszerénél, céljainknak megfelelőbb. Lehetséges, hogy egy R-modulusnak van független generáló rendszere, de nincsen bázisa. Megjegyezzük továbbá, hogy a bázis mindig maximális független elemrendszer G-ben, de G egy maximális független elemrendszere nem mindig kifeszítő rendszer, azaz bázis. Például egy legalább két elemű triviális R-modulusnak nincsen bázisa, noha bármely elemrendszere független.

$RA=A$, sőt bármely $0 \neq a \in A$ elemre $Ra=A$; azok az $a \in A$ elemek ugyanis, amelyekre $Ra=0$, A-nak részmodulusát alkotják, amely $RA \neq 0$ miatt csupán a 0 részmodulus lehet. Az $r \to ra$ leképezés R^+-nak A-ra való homomorf leképezése. Ha M-mel jelöljük e homomorfizmus magját (azaz a 0-ra leképezett elemek halmazát), akkor

$$R/M \simeq A. \tag{9}$$

Az M baloldali ideál pontosan azon $r \in R$ elemekből áll, amelyekre $ra=0$, úgyhogy M éppen az a elem rendje. Továbbá $M=O(a)$ *maximális baloldali ideál* R-ben; ha ugyanis J olyan baloldali ideálja R-nek, amelyre $M \subseteq J \subseteq R$, akkor J/M az A-val izomorf R/M modulus részmodulusa, s így vagy $J=M$ vagy $J=R$. Egy *nem triviális minimális R-modulus* tehát *mindig izomorf egy R/M faktormodulussal, ahol M alkalmas maximális baloldali ideál R-ben.* Minthogy a tetszőleges eleme volt A-nak, bármely más $0 \neq b \in A$ elemre is azt kapjuk, hogy $A \simeq R/O(b)$. Ha R kommutatív gyűrű, akkor $O(a)=O(b)$, minthogy $b=r'a$, $a=r''b$ $(r', r'' \in R)$ és R kommutatív volta miatt nyilvánvaló, hogy az a elemet pontosan azok az R-beli elemek annullálják, mint a b elemet. Ha viszont R nem kommutatív, akkor általában $O(a) \neq O(b)$, s csak azt állíthatjuk, hogy A bármely 0-tól különböző a és b elemeire

$$R/O(a) \simeq R/O(b).$$

Megfordítva: világos, hogy *R/M az R gyűrű bármely M maximális baloldali ideálja esetén minimális R-modulus.* Ez lehet triviális is, éspedig akkor és csak akkor, ha $R^2 \subseteq M$. (R^2 definíciójára vonatkozólag lásd a 2. § utolsó bekezdését, alkalmazva ezt arra az esetre, amikor a $G=A$ modulus az R gyűrű additív csoportja.)

E paragrafus hátralevő részében feltételezzük, hogy *R tetszőleges egységelemes gyűrű*, s a szereplő modulusok mindig *unitér R-modulusok.*

Bebizonyítjuk a következő tételt:

1. tétel. *Egy G unitér R-modulusra nézve ekvivalensek a következő állítások:*

α) G minimális R-modulusok direkt összege;

β) G bármely zérustól különböző elemének rendje R véges számú maximális baloldali ideáljának metszete;

γ) G bármely maximális független elemrendszere bázis;

δ) G bármely részmodulusa direkt összeadandó.

BIZONYÍTÁS.

α)-ból következik β). Tegyük fel ugyanis, hogy a G unitér R-modulus az A_ν minimális R-modulusok direkt összege:

$$G=\sum_\nu A_\nu. \tag{10}$$

Megmutatjuk, hogy *G bármely zérustól különböző g elemének rendje véges számú maximális baloldali ideál metszete.* Legyen ugyanis g előállítása a (10) felbontás szerint

$$g = a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + \cdots + a_{\nu_n} \qquad (0 \neq a_{\nu_i} \in A_{\nu_i}).$$

Ekkor minthogy $O(a_{\nu_i}) = M_i$ maximális baloldali ideál R-ben, és a g elemet pontosan azok az $r \in R$ elemek annullálják, amelyek az a_{ν_i} komponensek mindegyikét annullálják, nyilvánvaló, hogy

$$(11) \qquad O(g) = M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n = D,$$

és éppen ezt akartuk igazolni.

β)-ból következik γ). Megmutatjuk, hogy *ha a G unitér R-modulusban bármely zérustól különböző g elem rendje* (11) *alakú* (ahol M_i maximális baloldali ideál R-ben, $i = 1, \ldots, n$), *akkor G bármely maximális független elemrendszere G-nek bázisa.* Legyen ugyanis $b_1, b_2, \ldots$ maximális független elemrendszer G-ben. Kimutatjuk, hogy ekkor tetszőleges $g \in G$ elemre:

$$(12) \qquad g \in \sum_\nu \{b_\nu\}.$$

Ehhez nyilván elegendő azt belátnunk, hogy g benne van G-nek ogy olyan H részmodulusában, amelyet bizonyos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ minimális R-modulusok generálnak. Ugyanis a $b_1, b_2, \ldots$ független elemrendszer maximális volta miatt $B_j \cap \sum_\nu \{b_\nu\} = B_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, és így $H \subseteq \sum_\nu \{b_\nu\}$. Ennélfogva $g \in H$ esetén (12) valóban igaz.

Mármost $g \in H$ igazolása céljából tegyük fel, hogy a g elem rendjének (maximális baloldali ideálok metszeteként való) (11) alatti előállításában egyik M_i sem törölhető. Ekkor vannak olyan $u_1, \ldots, u_n$ gyűrűelemek, amelyekre

$$(13) \qquad \begin{cases} u_i \in M_1 \cap \cdots \cap M_{i-1} \cap M_{i+1} \cap \cdots \cap M_n; \\ u_i \notin M_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Ezekhez a továbbiakban rögzítettnek vett $u_1, \ldots, u_n$ gyűrűelemekhez egymásután meghatározhatók (az M_i baloldali ideálok maximális volta és (13) alapján) olyan $v_1 \in M_1, v_2 \in M_2, \ldots, v_n \in M_n$ gyűrűelemek, amelyekre

$$(14) \qquad \begin{cases} 1 (= v_0) = v_1 + z_1 u_1 \\ v_1 = v_2 + z_2 u_2 \\ v_2 = v_3 + z_3 u_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} = v_n + z_n u_n \end{cases}$$

teljesül. E szukcesszíve nyert relációkból (13) figyelembevételével következik, hogy

$$(15) \qquad \begin{cases} v_i \in M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_i \\ v_i \notin M_{i+1}, \ldots, v_i \notin M_n \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Mármost a (14) relációk alapján azt nyerjük, hogy

$$1 = z_1u_1 + z_2u_2 + \cdots + z_nu_n + v_n$$

és így

(16) $$g = z_1u_1g + z_2u_2g + \cdots + z_nu_ng$$

((11) és (15) szerint ugyanis $v_ng = 0$). Megmutatjuk, hogy *a* $\{z_iu_ig\}$ *ciklikus modulusok* ($i = 1, \ldots, n$) *valamennyien minimális R-modulusok,* ami (16) figyelembevételével fentebb bizonyításra kitűzött állításunk igazolását jelenti.

Az, hogy $\{z_iu_ig\}$ minimális R-modulus, következik abból a rögtön igazolható tényből, hogy

(17) $$O(z_iu_ig) = M_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

és hogy M_i maximális baloldali ideál R-ben. Mivel pedig $x \in O(z_iu_ig)$ egyértelmű azzal, hogy $xz_iu_ig = 0$, azaz $xz_iu_i \in O(g) = D$ (lásd (11)), (17) bizonyítása céljából azt kell megmutatnunk, hogy $xz_iu_i \in D$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in M_i$.

Tegyük fel, hogy az $x \in R$ elemre $xz_iu_i \in D$. Ekkor $xz_iu_i \in M_i$, és így a (14) alatti egyenletek mindegyikét balról x-szel megszorozva az i-edik egyenletből (15) és (13) figyelembevételével azt nyerjük, hogy $xv_{i-1} \in M_i$. Továbbhaladva felfelé, egyenleteink rendre azt mutatják, hogy

$$xv_{i-2} \in M_i, \ldots, xv_0 = x \in M_i.$$

Megfordítva: tegyük fel, hogy $x \in M_i$. Ekkor az említett egyenletekből (ezúttal felülről lefelé haladva) (15) és (13) alapján rendre az nyerjük, hogy

$$xv_1 \in M_i, xv_2 \in M_i, \ldots, xv_{i-1} \in M_i,$$

s ennélfogva az i-edik egyenlet szerint ($v_i \in M_i$ figyelembevételével)

$$xv_{i-1} - xv_i = xz_iu_i \in M_i.$$

De ez (13)-mal együtt azt jelenti, hogy $xz_iu_i \in D$, s így legutóbbi állításunk bizonyítását befejeztük.

γ)-ból következik δ). Megmutatjuk, hogy *ha a G unitér R-modulusban bármely maximális független elemrendszer bázis, akkor G bármely részmodulusa direkt összeadandó.* Legyen ugyanis H a G modulusnak tetszőleges részmodulusa. Tekintsünk most H-ban egy $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ maximális független elemrendszert, s egészítsük ki ezt a rendszert $b_1, b_2, \ldots, b_\mu, \ldots$ elemekkel G-nek egy maximális független S elemrendszerévé. Feltevésünk szerint az S rendszer G-nek bázisa, azaz

(18) $$G = \sum_\nu \{a_\nu\} + \sum_\mu \{b_\mu\}.$$

Megmutatjuk, hogy ebből

$$H = \sum_\nu \{a_\nu\}$$

következik, ami állításunk igazolását jelenti.

Azt kell megmutatnunk, hogy bármely $h \in H$ elem benne van $\sum_{\nu}\{a_\nu\}$-ben. Vegyük tekintetbe e célból h (18) szerinti előállítását. Ebben a $\sum_{\mu}\{b_\mu\}$-modulusbeli komponensnek 0-nak kell lennie, mert ellenkező esetben ez a komponens olyan H-beli elem volna, amellyel az $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ elemrendszert kiegészítve ismét csak független elemrendszert kapnánk. Ez azonban lehetetlen, mivel az $a_1, a_2, \ldots$ rendszert *maximális* független elemrendszernek választottuk H-ban.

δ)-ból következik α). Bebizonyítjuk ugyanis, hogy *ha a G unitér R-modulus bármely részmodulusa direkt összeadandó, akkor G minimális R-modulusok direkt összege.* Először is megmutatjuk, hogy ennek az állításnak bizonyítása redukálható annak igazolására, hogy egy δ) *tulajdonságú R-modulus bármely ciklikus részmodulusa tartalmaz minimális R-modulust.* ZORN lemmája szerint ugyanis bármely R-modulusban található minimális részmodulusoknak olyan maximális „független" rendszere, azaz olyan T rendszere, hogy e T rendszerhez tartozó minimális R-modulusok direkt összeget alkotnak. Jelöljük ezt a direkt összeget H-val. Ha mármost G δ) tulajdonságú R-modulus, akkor alkalmas K részmodulusára $G = H + K$, s minthogy K-nak van ciklikus részmodulusa, tudva azt, hogy e ciklikus részmodulus tartalmaz minimális R-modulust, T maximális voltából adódik, hogy $K = 0$, tehát $G = H$.

Azt fogjuk tehát igazolni, hogy *bármely δ) tulajdonságú G R-modulus bármely ciklikus részmodulusa tartalmaz minimális R-modulust.* Ez utóbbi állítás bizonyításához mindenekelőtt megjegyezzük, hogy δ) *tulajdonságú G modulus bármely B részmodulusa is δ) tulajdonságú.* Ha ugyanis B_1 tetszőleges részmodulusa B-nek, akkor B_1, mint G részmodulusa G-nek direkt összeadandója:

$$G = B_1 + B_2. \tag{19}$$

Ha tehát B tetszőleges b elemének (19) szerinti előállítása $b = b_1 + b_2$ ($b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$), akkor $b_1 \in B$ miatt $b_2 \in B$, s így B direkt összege a B_1 és B_2' részmodulusoknak, ahol a B_2' részmodulus B elemeinek a (19) felbontásban fellépő B_2-beli komponenseiből áll.

Legyen mármost g tetszőleges eleme a G δ) tulajdonságú R-modulusnak. Ekkor az $Rg = H$ ciklikus részmodulus is δ) tulajdonságú. Ha H maga még nem minimális, akkor van zérustól különböző valódi H_1 részmodulusa, így a δ) tulajdonság alapján $H = H_1 + K_1$. Most a K_1 direkt összeadandót vizsgáljuk. Ha K_1 sem minimális R-modulus, akkor hasonlóan leválasztunk belőle egy H_2 nem triviális direkt összeadandót: $K_1 = H_2 + K_2$. Ezt az eljárást folytatva véges számú lépésben H-beli minimális R-modulushoz kell jutnunk. Ellenkező esetben ugyanis H-nak volna olyan H^* részmodulusa, amely végtelen sok részmodulus direkt összege. A δ) tulajdonság alapján azonban H^* a H modulusnak direkt összeadandója, így maga H is végtelen sok részmodulus direkt összege. Ez viszont lehetetlen, mert $H=Rg$, és mivel H végtelen sok tagú előbbi direkt felbontásában a g elemnek csak véges számú komponense lehet zérustól különböző, g nem generálhatja végtelen sok modulus direkt összegét. — Ezzel az 1. tételt teljesen bebizonyítottuk.

Egy unitér R-modulust *elemi operátormodulusnak* nevezünk, ha eleget tesz az α), β), γ), δ) tulajdonságok valamelyikének. Egyúttal kiemeljük, hogy az 1. tétel az unitér elemi operátormodulusok szerkezetét teljesen leírja, sőt adott R egységelemes gyűrű esetén áttekintést ad az összes lehetséges unitér elemi R-modulusokról. A tételből és a jelen paragrafus elején tett megjegyzéseinkből következik ugyanis, hogy bármely ilyen R-modulus izomorf bizonyos R/M_ν modulusok direkt összegével, ahol az M_ν-k tetszőleges maximális baloldali ideálok az R-gyűrűben.

Az „elemi operátormodulus" elnevezést az indokolja, hogy ha R speciálisan a racionális egész számok gyűrűje, akkor az 1. tételből következik az elemi Abel-féle csoportokra vonatkozó következő tétel (KERTÉSZ [10]):

2. tétel. *Egy G Abel-féle csoportra vonatkozólag ekvivalensek a következő tulajdonságok:*

α_0) *G prímszám rendű csoportok direkt összege;*

β_0) *G bármely zérustól különböző elemének rendje (véges és) négyzetmentes szám;*

γ_0) *G bármely maximális független elemrendszere bázisa G-nek;*

δ_0) *G bármely részcsoportja direkt összeadandó.*

Nyilvánvaló ugyanis, hogy Abel-féle csoportok esetében pontosan a prímszám rendű (ciklikus) csoportok a minimálisak; továbbá, minthogy az egész számok gyűrűjében a maximális ideálok éppen a prímszámok által generált főideálok, az, hogy egy csoportelem rendje véges számú maximális ideál metszete, valóban azt jelenti, hogy ennek az elemnek a rendje (a közönséges értelemben) négyzetmentes szám.

Az 1. tétel azt mutatja, hogy az elemi Abel-féle csoportokra jellemző tulajdonságoknak operátormodulusokra is megvan a természetes megfelelője, s ezek a tulajdonságok tetszőleges unitér modulusok esetében ekvivalensek.

4. §. Teljesen redukálható operátormodulusok

A csoportelméletben *teljesen redukálhatónak* szokás nevezni az olyan csoportot, amely véges számú egyszerű csoport direkt szorzataként áll elő ([14], 388. o.). A gyűrűelméletben viszont az olyan gyűrűket nevezik *teljesen redukálható gyűrűknek*, amelyek véges számú minimális baloldali ideáljuk direkt összegére bonthatók. Mindkét esetben arról van szó tehát, hogy a teljesen redukálható struktúra véges számú olyan részstruktúra direkt szorzataként (illetve összegeként) van definiálva, amelyek az adott esetben előírt operátortartományra nézve minimálisak. Ennek megfelelően *teljesen redukálhatónak* az olyan operátormodulust fogjuk nevezni, amely véges számú minimális részmodulus direkt összege. Ha egy teljesen redukálható operátormodulus unitér, akkor az elemi operátormodulusoknak egy fontos speciális esetéhez jutunk.

Ebben a paragrafusban operátormodulusok teljes redukálhatóságára adunk meg egy olyan kritériumot, amelyben az operátortartományról még azt sem tételezzük fel, hogy egységelemes gyűrű legyen, s amelynek a továbbiakban számos alkalmazásával fogunk találkozni. Ez az eredményünk a következő:

3. tétel. *Egy tetszőleges G operátormodulus akkor és csak akkor teljesen redukálható, azaz véges számú minimális részmodulus direkt összege, ha G-ben van véges számú olyan maximális részmodulus, amelyek metszete* 0.

BIZONYÍTÁS. Ha G előállítható az $A_1, \dots, A_n$ minimális részmodulusok direkt összegeként, akkor az

$$A_2 + \cdots + A_n, A_1 + A_3 + \cdots + A_n, \dots, A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1}$$

maximális részmodulusok metszete 0. — Megfordítva, tegyük fel, hogy $M_1, \dots, M_n$ olyan maximális részmodulusok a tetszőleges G operátormodulusban, hogy

$$M_1 \cap \cdots \cap M_n = 0 \tag{20}$$

és itt egyetlen M_i sem törölhető. Megmutatjuk, hogy ekkor G előállítható az n számú

$$A_i = M_1 \cap \cdots \cap M_{i-1} \cap M_{i+1} \cap \cdots \cap M_n \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{21}$$

minimális részmodulusok direkt összegeként. Először is bebizonyítjuk, hogy A_i minimális részmodulus $(i = 1, \dots, n)$. Mivel ugyanis feltevésünk szerint (20)-ban egyetlen M_i sem törölhető, $A_1 \neq 0$; továbbá ugyancsak (20) szerint A_1 és M_1 direkt összeget generál. Végül minthogy $M_1 \subset A_1 + M_1 \subseteq G$, M_1 maximális volta miatt:

$$\left\{\begin{array}{l} G = A_1 + M_1 \\ G = A_2 + M_2 \\ \quad \vdots \\ G = A_n + M_n, \end{array}\right. \tag{22}$$

ahol a többi egyenlőség is az elsőhöz hasonlóan adódik. Következik ezekből, hogy $A_i \cong G/M_i$ minimális részmodulusa G-nek.

Mármost a (22) alatti második egyenlőséget speciálisan M_1 elemeire alkalmazva azt nyerjük, hogy

$$M_1 = A_2 + M_1 \cap M_2. \tag{23}$$

Az említett egyenlőség M_1 valamely elemének előállítására való alkalmazásakor ugyanis a jobboldali első komponens is M_1-beli elem (lásd (21)), s így a második komponens $M_1 \cap M_2$-be tartozó elem. Ennélfogva (23) baloldala része a jobboldalnak, de a megfordított tartalmazás is nyilvánvaló. — Hasonlóan alkalmazva a (22) alatti harmadik egyenlőséget $M_1 \cap M_2$ elemeire, a negyediket $M_1 \cap M_2 \cap M_3$ elemeire, s. i. t., rendre nyerjük, hogy

$$M_1 \cap M_2 = A_3 + M_1 \cap M_2 \cap M_3$$
$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 = A_4 + M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4$$
$$\vdots$$
$$M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_{n-1} = A_n + M_1 \cap M_2 \cap \cdots M_n = A_n .$$

Ha most $G = A_1 + M_1$-be (23) alapján, majd az így kapott egyenlőségbe rendre a legutóbbi összefüggések alapján helyettesítünk, akkor végül

$$G = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

adódik, s éppen ezt kellett bebizonyítanunk.

A 3. tételből speciális esetként következik a

4. tétel. *Egy közönséges Abel-féle csoport akkor és csak akkor véges elemi csoport, ha van véges számú olyan maximális részcsoportja, amelyek metszete egyelemű.*

Ugyancsak a 3. tétel speciális esete az

5. tétel. *Egy tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor teljesen redukálható (azaz véges számú minimális baloldali ideál direkt összege), ha van véges számú olyan maximális baloldali ideálja, amelyek metszete* 0.

Megemlítjük még e helyen a fenti tételek két analogonját, bár ezek a dolgozat tárgyával nem függenek szorosan össze. Pontosan a 3. tétel bizonyítását követve igazolható a következő két tétel:

6. tétel. *Egy tetszőleges csoport akkor és csak akkor teljesen redukálható, ha van véges számú olyan maximális normálosztója, amelyek metszete egyelemű.*

7. tétel. *Egy tetszőleges gyűrű akkor és csak akkor véges számú egyszerű gyűrű (kétoldali ideál) direkt összege, ha van véges számú olyan maximális kétoldali ideálja, amelyek metszete* 0.

5. §. Féligegyszerű operátortartományok

A 3. §-ban az elemi operátormodulusok jellemzését adtuk. Most az összes olyan egységelemes R gyűrűt fogjuk meghatározni, amelyekre bármely unitér R-modulus elemi operátormodulus. Látni fogjuk, hogy az ezzel a tulajdonsággal jellemzett gyűrűosztály éppen a klasszikus értelemben vett féligegyszerű gyűrűk osztályával esik egybe.

Mindenekelőtt röviden összefoglaljuk a féligegyszerű gyűrűkre vonatkozó legfontosabb ismereteket.

Féligegyszerű gyűrűnek nevezünk egy olyan R gyűrűt, amely baloldali ideáljaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget, s amely nem tartalmaz zérustól különböző nilpotens baloldali ideált.[8] A minimumkövetelmény teljesülése azt jelenti, hogy R baloldali ideáljainak bármely

$$L_1 \supset L_2 \supset \dots$$

fogyó lánca véges. Továbbá egy L baloldali ideált akkor nevezünk nilpotensnek, ha valamely hatványa 0-sal egyenlő. (Az R gyűrű valamely L baloldali ideáljának n-edik hatványa a 2. § utolsó bekezdése szerinti értelemben van definiálva: ha L^{n-1}-et már megalkottuk, akkor $L^n = L^{n-1} \cdot L$, ahol L additív csoportját az L^{n-1} gyűrű fölötti operátormodulusnak tekintjük.) — A féligegyszerű gyűrűk elméletében legfontosabb az a *Wedderburn—Artin-féle* struktúratétel ([1], [20], 18]), amely a féligegyszerű gyűrűk osztályának explicit leírását tartalmazza. E tétel szerint *egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha olyan kétoldali ideálok direkt összege, amelyek mindegyike izomorf egy véges dimenziójú vektortér lineáris transzformációinak teljes gyűrűjével.*[9] Ebből a jellemzésből nyilvánvaló, hogy egy féligegyszerű gyűrű mindig egységelemes gyűrű, s továbbá hogy a féligegyszerű gyűrűk kategóriája felöleli az összes ferdetestet is. A féligegyszerű gyűrűknek egy másik igen fontos jellemzése E. NOETHER-től származik [15]. Eszerint *egy tetszőleges gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha van egységeleme, és minimális baloldali ideálok direkt összegére bontható.* — Természetesen véges számú baloldali ideál direkt összegére bontható,[10] mert egységelemes gyűrű nem lehet végtelen sok additív részcsoportjának direkt összege.

A féligegyszerű gyűrűk egész elmélete s a jelen dolgozat több eredménye is azt mutatja, hogy a féligegyszerű gyűrűk a ferdetestek legtermészetesebb és legközvetlenebb általánosítását alkotják, amelyben a ferdetestek

[8] A legújabb irodalomban [4], [5], [9] a féligegyszerű gyűrű fogalmát általánosabban szokás definiálni. Nevezetesen így nevezik az összes olyan gyűrűket, amelyeknek (valamelyik értelemben vett) radikálja 0. Ezért kellett utalnunk arra, hogy mi a „féligegyszerű" elnevezést a klasszikus értelemben fogjuk használni. Hangsúlyoznunk kell azonban, hogyha a legújabban elterjedt szóhasználat miatt elvesztik a klasszikus értelemben vett féligegyszerű gyűrűk ezt az elnevezést, akkor is be kell majd vezetni számukra valamilyen egyértelmű elnevezést, hiszen a vizsgálatok azt mutatják, hogy a gyűrűk eme kategóriája fontosság és nevezetes tulajdonságok tekintetében közvetlenül a ferdetestek után következik, s már csupán ezért is feltétlenül megérdemel önálló elnevezést.

[9] *Vektortérnek* az olyan unitér operátormodulust szokás nevezni, amelynek operátortartománya ferdetest.

[10] Más szóval: *az R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha mint baloldali R-modulus teljesen redukálható unitér modulus.* A direkt összegnek e moduluselméleti értelmezésétől élesen meg kell különböztetnünk a *gyűrűelméleti direkt összeget,* amelynek direkt komponensei nemcsak additív értelemben vett direkt összegként állítják elő a gyűrűt hanem kölcsönösen annullálják is egymást (ami pontosan annyit jelent, hogy a direkt komponensek kétoldali ideálok). Ennélfogva ha tudjuk, hogy az R gyűrű gyűrűelméleti direkt összege az $A, B, \dots$ gyűrűknek, akkor az R gyűrű struktúrája teljesen meg van határozva az $A, B, \dots$ gyűrűk struktúrájával. Gyűrűelméleti direkt összegről van szó például a fentebb idézett *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételben.

számos jellemző és az alkalmazások szempontjából fontos tulajdonsága megmarad. Másrészt a vektortereknek ugyanilyen értelemben vett legtermészetesebb és legközvetlenebb általánosítását szolgáltatják az unitér elemi operátormodulusok. Ez nyilvánvaló az 1. tételből, amelyet ebből a szempontból olyan eredménynek tekinthetünk, amely a vektorterek legfontosabb tulajdonságait terjeszti ki algebrai struktúrák tágabb osztályára.

Legújabban FUCHS LÁSZLÓ és SZELE TIBOR bebizonyították, hogy *egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely baloldali ideáljának van jobboldali egységeleme* [6].[11] A jelen dolgozatban a féligegyszerű gyűrűk fentebbi jellemzései közül csupán erre a legutóbbira fogunk támaszkodni. Viszont a következő paragrafusban eredményeink alkalmazásaként E. NOETHER fenti tételét be is bizonyítjuk.

A féligegyszerű gyűrűk további jellemzéseit tartalmazza a következő

8. tétel. *Egy egységelemes R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely unitér R-modulus elemi operátormodulus.*

Minthogy az elemi operátormodulust az előző paragrafusban négy ekvivalens tulajdonsággal jellemeztük, e tételből a féligegyszerű gyűrűknek négy jellemzését nyerjük. E jellemzések közül csak a β) és γ) tulajdonságokon alapulót tekintjük újnak. Ezek szerint *az R egységelemes gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely unitér R-modulus tetszőleges zérustól különböző elemének rendje R véges számú maximális baloldali ideáljának metszete;* illetve, *ha bármely unitér R-modulus minden maximális független elemrendszere bázis.* — KRULL [13], KÖTHE [11] és GOLDMAN [8] eredményeiből következik, hogy egy R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely unitér R-modulus minimális R-modulusok direkt összege (lásd az α) tulajdonságot). Továbbá BAER [2] dolgozatában a „referee“ kimutatja, hogy az egységelemes gyűrűk között a féligegyszerű gyűrűkre jellemző az a tulajdonság, hogy bármely R-modulus bármely részmodulusa direkt összeadandó (δ) tulajdonság). A jelen dolgozat azonban egyszerűbb bizonyítást tartalmaz a féligegyszerű gyűrűk e két utóbbi jellemzését kimondó tételekre is.

A 8. tétel helyessége az 1. tétel alkalmazásával következik az alábbi két állításból:

(I) *Ha R féligegyszerű gyűrű, akkor bármely unitér R-modulus γ) tulajdonságú;*

(II) *ha R olyan egységelemes gyűrű, hogy bármely unitér R-modulus δ) tulajdonságú, akkor R féligegyszerű gyűrű.*

(I) *bizonyítása.* Legyen R féligegyszerű, azaz olyan gyűrű, amelyben bármely baloldali ideálnak van jobboldali egységeleme; legyen továbbá G

[11] Itt jegyezzük meg, hogy a féligegyszerű gyűrűk elméletében teljes szimmetria áll fenn a baloldali és jobboldali fogalmak között: bármely helyes tétel ismét helyes tételbe megy át, ha ezek szerepét következetesen felcseréljük.

tetszőleges unitér R-modulus. Megmutatjuk, hogy G-ben bármely maximális független elemrendszer G-nek bázisa. Legyen ugyanis az $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ elemek S halmaza tetszőleges maximális független elemrendszer G-ben, és jelöljük H-val az e rendszer által generált részmodulust:

$$H = \{a_1\} + \{a_2\} + \cdots + \{a_\nu\} + \cdots.$$

Ha g tetszőleges eleme G-nek, akkor azok az $r \in R$ elemek, amelyekre $rg \in H$, egy L baloldali ideált alkotnak R-ben. L-nek feltevésünk szerint van jobboldali egységeleme. Jelöljük ezt e-vel. Ekkor tehát $eg \in H$. Mármost a

$$g' = g - eg$$

elemre $r \in L$ esetén $rg' = rg - (re)g = rg - rg = 0$; ha viszont $r \notin L$, akkor $rg' \notin H$. Ezért $Rg' \cap H = 0$, s ez azt jelenti, hogy g' az S rendszertől független elem. S maximális voltából azonban következik, hogy $g' = 0$, azaz

$$g = eg \in H.$$

Mivel pedig g tetszőleges eleme G-nek, azt kaptuk, hogy $G = H$, azaz S valóban bázisa G-nek.

(II) *bizonyítása.* Legyen R olyan egységelemes gyűrű, hogy bármely unitér R-modulus bármely részmodulusa direkt összeadandó. Ekkor speciálisan R^+ mint R-modulus is olyan, hogy bármely részmodulusa (azaz R-nek bármely baloldali ideálja) direkt összeadandó. Ezen az alapon megmutatjuk, hogy R bármely baloldali ideáljának van jobboldali egységeleme, azaz R féligegyszerű gyűrű a FUCHS—SZELE-féle tétel értelmében. Legyen L tetszőleges baloldali ideálja R-nek. Ekkor minthogy L az R^+ modulus részmodulusa, R^+-nak van olyan K részmodulusa (amely tehát R-nek baloldali ideálja), hogy

$$R^+ = L + K. \tag{24}$$

Az R gyűrű egységelemének a (24) felbontás szerinti előállítása legyen

$$1 = e_1 + e_2 \qquad (e_1 \in L,\ e_2 \in K)$$

Ha g tetszőleges eleme L-nek, akkor

$$g = g \cdot 1 = g(e_1 + e_2) = ge_1 + ge_2 = ge_1,$$

ami azt mutatja, hogy e_1 az L baloldali ideál jobboldali egységeleme. Ezzel a 8. tétel bizonyítását befejeztük.

6. §. A féligegyszerű gyűrűk gyűrűelméleti jellemzései

Az 1. és a 8. tételből könnyen nyerjük a következőt:

9. tétel. *Egy egységelemes R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha rendelkezik az alábbi négy ekvivalens tulajdonság valamelyikével:*

α_1) *R minimális baloldali ideálok direkt összege;*

β_1) *R bármely zérustól különböző elemének baloldali annihilátora R véges számú maximális baloldali ideáljának metszete:*

γ_1) *R^+ bármely R fölött független elemekből álló maximális elemrendszere (R fölötti) bázisa R^+-nak;*

δ_1) *R bármely L baloldali ideáljához van R-nek olyan K baloldali ideálja, amelyre $R = L + K$.*

BIZONYÍTÁS. Az α_1), β_1), γ_1), δ_1) tulajdonságok ekvivalens volta következik az 1. tételből $G = R^+$ esetén. Hogy bármely R féligegyszerű gyűrű α_1 tulajdonságú, az (E. NOETHER tételére való hivatkozás nélkül) következik a 8. tételből. Végül, ha egy R egységelemes gyűrű δ_1) tulajdonságú, akkor mint az előző paragrafus utolsó bekezdésében láttuk, bármely baloldali ideálja tartalmaz jobboldali egységelemet, így R a FUCHS—SZELE-féle tétel értelmében féligegyszerű gyűrű. Ezzel a 9. tétel bizonyítását befejeztük.

A 9. tételből FUCHS és SZELE tételének újabb alkalmazásával könnyen nyerjük NOETHER következő tételét:

10. tétel. *Egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha van egységeleme, és véges számú minimális baloldali ideál direkt összege.*

BIZONYÍTÁS. Ha egy R gyűrűnek van egységeleme, és R minimális baloldali ideálok direkt összege,[12] akkor a 9. tétel szerint R féligegyszerű. Legyen a továbbiakban R tetszőleges féligegyszerű gyűrű. Ekkor a FUCHS—SZELE-féle tétel értelmében R-nek van jobboldali egységeleme: e. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy e baloldali egységelem is. Tekintsük ebből a célból az összes $x - ex$ alakú ($x \in R$) elemek L halmazát. Mivel tetszőleges $r \in R$ elemre $r(x - ex) = rx - (re)x = 0$, nyilvánvaló, hogy L baloldali ideálja R-nek, és L bármely két elemének szorzata 0. Másfelől azonban a FUCHS—SZELE-féle tétel szerint L-ben van jobboldali egységelem, úgyhogy $L = 0$. Ennélfogva $x - ex = 0$ az R gyűrű bármely x elemére, azaz e valóban kétoldali egységeleme R-nek. Ekkor pedig a 9. tételből következik, hogy R véges számú minimális baloldali ideál direkt összege.

A féligegyszerű gyűrűknek egy további új jellemzése nyerhető NOETHER most bizonyított tételének, továbbá a 4. § 5. tételének felhasználásával, amelyet egyébként a NOETHER-féle tétel duálisának is tekinthetünk:

11. tétel. *Egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha van egységeleme, és van véges számú 0 metszetű maximális baloldali ideálja.*

Nem nehéz belátni, hogy e tételben a „van egységeleme" feltétel helyettesíthető azzal a gyengébb kikötéssel, hogy „nincsen 0-tól különböző baloldali annihilátora". (Egy gyűrű baloldali annihilátorán olyan elemet értünk, amely balról annullálja a gyűrű összes elemét.)

Ezt a paragrafust egy olyan megjegyzéssel zárjuk, amelynek a dolgozat második részében lesz fontos alkalmazása. Legyen R féligegyszerű gyűrű, és

[12] Abból, hogy a gyűrűnek van egységeleme, következik, hogy a direkt összeadandók száma véges.

tekintsük R-nek

(25) $$R = L_1 + \cdots + L_m$$

felbontását minimális baloldali ideálok direkt összegére. Az R gyűrű egységelemére ennek megfelelően az

(26) $$1 = e_1 + \cdots + e_m$$

előállítást nyerjük. Minthogy $L_1, \ldots, L_m$ baloldali ideáljai R-nek, (25) és (26) alapján azt nyerjük, hogy

$$e_i = e_i(e_1 + \cdots + e_m) = e_i e_1 + \cdots + e_i e_m,$$

azaz

(27) $$e_i^2 = e_i, \quad e_i e_k = 0 \qquad (\text{ha } i \neq k).$$

Az L_i baloldali ideál minimális volta miatt $Re_i = L_i$, úgyhogy (27) szerint e_i jobboldali egységelem L_i-ben.

7. §. Egységelem nélküli operátortartományok

Ebben a paragrafusban általánosítjuk az elemi operátormodulus fogalmát arra az esetre, ha az operátortartomány nem tartalmaz szükségképpen egységelemet. Minthogy ebben a legáltalánosabb esetben az 1. tételben megfogalmazott α), β), γ), δ) követelmények nem ekvivalensek, látni fogjuk, hogy az általánosításnak két fokozata lehetséges: *a legáltalánosabb értelemben vett* és *az unitér elemi operátormodulusok* fogalma közé a *perfekt elemi operátormodulus* fogalma ékelődik.

Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy bármely R-modulusra érvényes a következő

12. tétel. *Legyen R tetszőleges gyűrű, G pedig tetszőleges R-modulus G-re nézve ekvivalensek az alábbi tulajdonságok:*

α) G minimális R-modulusok direkt összege;

δ) G bármely részmodulusa direkt összeadandó.

Az olyan R-modulust, amelyre az α), δ) tulajdonságok valamelyike teljesül, *legáltalánosabb értelemben vett operátormodulusnak* nevezzük.

Bizonyítás.

α)-ból következik δ). Legyen H tetszőleges részmodulusa a

(28) $$G = \sum_{\nu} A_\nu$$

R-modulusnak, ahol valamennyi A_ν minimális R-modulus. Legyen továbbá K maximális olyan részmodulus G-ben, amelyre $H \cap K = 0$. Ekkor bármely A_ν nyilván része a $H + K$ direkt összegnek, mert az ellenkező esetben $A_\nu \cap (H + K) = 0$ volna, s ez ellentmondást jelentene K feltételezett maximalitásával. Így (28) szerint $G = H + K$.

δ)-ból következik α). Ennek bizonyítása ugyanúgy végezhető, mint az 1. tétel hasonló állításának a 162. oldalon kezdődő bizonyítása. Az egyetlen módosítást a bizonyításnak abban a részletében kell eszközölnünk, hogy egy δ) tulajdonságú R-modulus bármely ciklikus részmodulusa tartalmaz minimális R-modulust. Tekintsük ugyanis G tetszőleges $H=\{g\}\neq 0$ ciklikus részmodulusát, azaz G legszűkebb olyan részmodulusát, amely a g elemet tartalmazza. (Ezt a H részmodulust a 162. oldalon a G modulus unitér volta miatt Rg alakban vehettük fel.) Ha $\{g\}$ nem tartalmazna minimális R-modulust, akkor direkt összeadandóinak ismételt leválasztásával azt nyernénk, hogy $\{g\}$ végtelen sok részmodulus direkt összegeként állítható elő. Ez azonban lehetetlen, mert egy ilyen modulus nem lehet végesen generált.

A legáltalánosabb értelemben vett elemi operátormodulusok fontos tulajdonságát fejezi ki a

13. tétel. *Egy legáltalánosabb értelemben vett elemi operátormodulus bármely részmodulusa, illetve homomorf képe is ilyen operátormodulus. — Bármely R gyűrűre igaz tehát, hogy minimális R-modulusok direkt öszszegének tetszőleges részmodulusa is, homomorf képe is minimális R-modulusok direkt összege.*

Ez részmodulusra abból következik, hogy δ) tulajdonságú (lásd 163. old.), homomorf képre pedig abból, hogy α) tulajdonságú operátormodulus bármely homomorf képe is (minimális részmodulusok által generált, azaz) α) tulajdonságú modulus.

A továbbiakban szükségünk lesz még néhány fogalomra. Az R operátortartománnyal ellátott G operátormodulust *perfektnek* nevezzük, ha $RG=G$, azaz ha az összes rg alakú elemek ($r\in R$, $g\in G$) halmaza G-t generálja. *Triviálisnak* az olyan H R-modulust nevezzük, amelyre $RH=0$. Világos, hogy minimális R-modulus vagy perfekt, vagy triviális. Az is nyilvánvaló, hogy direkt összegként előállított R-modulus akkor és csak akkor perfekt, ha bármely direkt összeadandója perfekt. A tetszőleges G operátormodulus *triviális részmodulusát* G mindazon elemei alkotják, amelyeket az R operátortartomány összes elemei annullálnak. Unitér modulus mindig perfekt modulus, és triviális részmodulusa 0.

Az 1. tétel általánosítását jelenti a

14. tétel. *Legyen R tetszőleges gyűrű, G pedig tetszőleges R-modulus. G-re nézve ekvivalensek az alábbi tulajdonságok:*

α') G nem-triviális minimális R-modulusok direkt összege;

β') G perfekt és bármely zérustól különböző elemének rendje R véges számú maximális baloldali ideáljának metszete;

γ') G bármely maximális független elemrendszere bázis;

δ') G perfekt és bármely részmodulusa direkt összeadandó.

Egy olyan operátormodulust, amely az α'), β'), γ'), δ') tulajdonságok valamelyikével rendelkezik, *perfekt elemi operátormodulusnak* nevezünk.

Megjegyzés. A legáltalánosabb értelemben vett elemi operátormodulusok nyilván nem szükségképpen perfekt modulusok, hiszen triviális modulus is eleget tesz a 12. tétel α) ill. δ) követelményének, ha prímszám rendű részmodulusok direkt összege. Ezért a fenti α') ill. δ') követelményben elengedhetetlen a perfektség feltétele. A γ') követelményben viszont nem kell kikötnünk külön azt, hogy G perfekt legyen, mivel G mindig tartalmaz maximális független rendszert; ha tehát G γ') tulajdonságú, akkor van bázisa, és így G perfekt. Nyílt probléma, hogy a β') követelményből nem törölhető-e a perfektség feltétele.

A 14. tétel bizonyítása.

α')-ből következik β'). Ez ugyanúgy bizonyítható, mint az 1. tétel megfelelő állítása a 159. oldalon, csupán azt kell még hangsúlyoznunk, hogy a

$$G=\sum_{\nu} A_{\nu} \tag{29}$$

előállításban bármely A_{ν}-beli $a_{\nu} \neq 0$ elem rendje R-nek maximális baloldali ideálja, mivel A_{ν} nem-triviális minimális R-modulus.

β')-ből következik γ'). Legyen ugyanis S tetszőleges maximális független elemrendszer G-ben és H az S rendszer által kifeszített részmodulus. Minthogy ekkor S maximális voltánál fogva G bármely minimális részmodulusa H-nak része, elegendő azt megmutatnunk, hogy G bármely $g \neq 0$ elemére Rg benne van G-nek egy olyan részmodulusában, amelyet (véges számú) minimális részmodulus generál. Ez ugyanis azt jelenti, hogy az összes Rg részmodulussal együtt RG is része volt H-nak, s mivel G perfekt, azaz $RG=G$, S valóban bázisa G-nek.

Bebizonyítjuk tehát, hogy ha $0 \neq g \in G$, akkor Rg véges számú minimális R-modulus direkt összege. Legyen

$$O(g)=M_1 \cap \cdots \cap M_n = D, \tag{30}$$

ahol $M_1, \ldots, M_n$ maximális baloldali ideálok R-ben. (30)-ból következik, hogy

$$Rg \cong R/D,$$

továbbá, hogy

$$M_1/D \cap \cdots \cap M_n/D = 0.$$

Másfelől minthogy az R/D modulusban az M_i/D részmodulusok maximálisak, a 3. tétel felhasználásával azt nyerjük, hogy az R/D modulussal izomorf Rg modulus véges számú minimális R-modulus direkt összege. Ezzel állításunk bizonyítását befejeztük.[13]

[13] Az olvasó bizonyára észreveszi, hogy ily módon egy másik bizonyítást nyertünk az 1. tétel hasonló tartalmú állítására. Célszerűnek látszott ebben a dolgozatban mindkét bizonyítási módot bemutatni.

γ')-ből következik δ'). Ez az állítás ugyanúgy bizonyítható, mint az 1. tétel megfelelő állítása a 161. oldalon, megjegyezve azt, hogy G perfekt volta nyilván következik γ')-ből.

δ')-ből következik α'). Ezzel kapcsolatban a 12. tétel megfelelő állítására utalunk, hangsúlyozva azt, hogy G feltételezett perfektségéből következik, hogy G (28) alatti előállításában bármely A_ν direkt összeadandó nem-triviális R-modulus.

Ezzel a 14. tétel bizonyítását befejeztük.

8. §. O. Goldman tételének általánosítása

Az (unitér) elemi operátormodulusok vizsgálata után az 5. §-ban meghatároztuk az összes olyan egységelemes R gyűrűt, amelyre bármely unitér R-modulus elemi operátormodulus. Az előző paragrafusban az elemi operátormodulus fogalmát általánosítottuk arra az esetre, amikor az operátortartomány nem feltétlenül egységelemes gyűrű. Indokolt tehát a gyűrűknek mint bizonyos tulajdonságokkal bíró operátortartományoknak a vizsgálatát az egységelemes gyűrűk esetéről teljesen tetszőleges gyűrűk esetére kiterjeszteni. E paragrafus eredményei azt mutatják, hogy a féligegyszerű gyűrűk, mint operátortartományok, ebben a legáltalánosabb esetben is nevezetes tulajdonságokkal rendelkeznek. Egy ilyen vonatkozású korábbi eredmény O. Goldman következő tétele [8]: *Egy tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely R-modulus előállítható triviális részmodulusának és minimális részmodulusoknak direkt összegeként.*

A jelen paragrafus főeredménye a féligegyszerű gyűrűket mint operátortartományokat jellemző 8. tétel olyan értelemben vett általánosítása, mint amilyen értelemben a 14. tétel általánosítja az 1. tételt. Ezt az eredményt a következő tétel fejezi ki:

15. tétel. *A tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely R-modulus egy triviális R-modulus és egy perfekt elemi R-modulus direkt összege.*

Ebből a tételből a 14. tétel alapján a féligegyszerű gyűrűknek mint operátortartományoknak — egységelem feltételezése nélkül — négy jellemzését nyerjük, amelyek közül az első éppen Goldman tétele. Ennélfogva a 14. és 15. tétel együttvéve Goldman tételének általánosítását jelenti, s az alábbiakban így Goldman tételére új, az eredetinél lényegesen egyszerűbb bizonyítást kapunk.

A 15. tétel bizonyítása könnyen adódik az alábbi tételből, amely a féligegyszerű gyűrűknek egy további, önmagában is érdekes jellemzését szolgáltatja:

16. tétel. *Egy R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha R bármely L baloldali ideálja és a G tetszőleges R-modulus bármely g eleme esetén az Lg részmodulus direkt összeadandója G-nek.*

A 16. tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy az R gyűrű bármely L baloldali ideáljára és bármely R-modulus bármely g elemére teljesül az, hogy Lg direkt összeadandója a tekintett R-modulusnak. Megmutatjuk, hogy ekkor az L baloldali ideálnak van jobboldali egységeleme, amiből a FUCHS—SZELE-féle kritérium alapján következik, hogy R féligegyszerű gyűrű. Legyen G az összes (a, n) párok halmaza, ahol $a \in R$, n tetszőleges racionális egész szám. Ezt a G halmazt komponensenkénti egyenlőség- és összeadásdefinícióval, továbbá az

$$r(a, n) = (ra + nr, 0)$$

előírással R-modulussá tesszük. Ha most L tetszőleges baloldali ideálja R-nek, akkor a G modulus $g = (0, 1)$ eleme esetén Lg az összes $(l, 0)$ párok halmaza, ahol $l \in L$. Feltevésünk szerint Lg direkt összeadandója G-nek, azaz

$$G = Lg + H.$$

E direkt előállítás alapján legyen

$$(0, 1) = (e, 0) + (-e, 1) \qquad (e \in L).$$

Ekkor L bármely l elemére a $(-e, 1)$ elemmel együtt H-ba eső

$$l(-e, 1) = (-le + l, 0)$$

elem egyszersmind Lg-nek is eleme, tehát zérus (G tekintett direkt felbontása alapján). Ennélfogva $-le + l = 0$, azaz $le = l$, és így e jobboldali egységelem L-ben.

Megfordítva: tegyük fel, hogy R féligegyszerű gyűrű, azaz bármely baloldali ideáljának van jobboldali egységeleme. Megmutatjuk, hogy R bármely L baloldali ideáljára és bármely G R-modulus tetszőleges g elemére Lg direkt összeadandója G-nek. Legyen e jobboldali egységeleme az R gyűrűnek. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy e baloldali egységelem is R-ben. Az összes $r - er$ $(r \in R)$ elemekből álló J baloldali ideálban ugyanis

$$s(r - er) = sr - sr = 0$$

miatt csak a zérus lehet jobboldali egységelem, azaz $J = 0$, és így e valóban kétoldali egységelem R-ben.

Legyen mármost G tetszőleges R-modulus. Ez a szokásos Peirce-féle felbontás szerint előállítható egy R által annullált G_0 részmodulus és egy G_1 unitér R-modulus direkt összegeként:

$$G = G_0 + G_1.$$

Ha most L tetszőleges baloldali ideál R-ben, g pedig tetszőleges eleme G-nek, amely a tekintett felbontás alapján

$$g = g_0 + g_1 \qquad (g_0 \in G_0)$$

alakban írható, akkor $Lg = Lg_1$. Elegendő tehát azt megmutatnunk, hogy a G_1 unitér R-modulusnak bármely M részmodulusa (s így Lg_1 is) direkt összeadandója. Ezt így láthatjuk be. Legyen K maximális olyan részmodulusa G-nek, amelynek M-mel közös eleme csupán a 0. Ha megmutatjuk, hogy az $M+K$ direkt összeg tartalmazza G_1 bármely h elemét, akkor a tétel bizonyítása befejeződik. Az R gyűrű mindamaz r elemei, amelyekre $rh \in M+K$, egy J baloldali ideált alkotnak R-ben. Legyen e^* jobboldali egységelem J-ben. Ekkor a $h-e^*h$ elemmel generált $R(h-e^*h)$ ciklikus részmodulusnak nincs zérustól különböző közös eleme $M+K$-val, minthogy az $r(h-e^*h)$ elem $r \in J$ esetén zérus, $r \notin J$ esetén viszont J definíciója szerint nem eleme az $M+K$ modulusnak. Ennélfogva K maximális tulajdonsága alapján $R(h-e^*h) = 0$, s így, mivel G_1 unitér R-modulus, $h-e^*h = 0$, azaz $h = e^*h \in M+K$ (tekintettel arra, hogy $e^* \in J$). Ezzel a 16. tétel bizonyítását befejeztük.[14]

Mármost a 15. *tétel bizonyítása* céljából tegyük fel először, hogy az R gyűrű olyan tulajdonságú, hogy a tetszőleges G R-modulus

$$G = G_0 + G_1$$

alakú, ahol G_0 a G modulus triviális részmodulusa, G_1 pedig minimális R-modulusok direkt összege. Elég megmutatnunk, hogy G bármely g eleme és R tetszőleges L baloldali ideálja esetén Lg direkt összeadandója G-nek, mert ekkor a 16. tétel alapján R féligegyszerű gyűrű. Legyen a g elem előállítása G fenti direkt felbontása alapján

$$g = g_0 + g_1 \qquad (g_0 \in G_0, g_1 \in G_1).$$

Ekkor $Lg = Lg_1 \subset G_1$, s minthogy G_1 minimális R-modulusok direkt összege, a 12. tétel szerint Lg direkt összeadandója G_1-nek.

Másfelől legyen R féligegyszerű gyűrű. Ekkor a Peirce-féle felbontás alapján bármely R-modulus triviális részmodulusának és egy unitér R-modulusnak a direkt összegeként áll elő, ahol az unitér direkt összeadandó a 8. tétel alapján elemi operátormodulus. Ezzel a 15. tétel bizonyítását befejeztük.

[14] Megjegyezzük, hogy a tétel bizonyításának második felében felhasználhattuk volna dolgozatunk korábbi eredményeit, helyesnek láttuk azonban erre a tételre egy önmagában is teljes bizonyítást adni.

II. A LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK ÁLTALÁNOSÍTOTT ELMÉLETE

A dolgozat első részében megmutattuk, hogy a féligegyszerű gyűrűvel mint operátortartománnyal ellátott operátormodulus a vektortér fogalmának olyan általánosítása, amelyben még érvényesek a vektorterek leglényegesebb tulajdonságai. Továbbmenve, a dolgozat második részének célja annak kimutatása, hogy erre az általánosabb esetre átvihető a vektorterek elméletének igen fontos fejezete, a lineáris egyenletrendszerek elmélete is. Be fogjuk bizonyítani, hogy a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának feltétele és az összes megoldás előállítására szolgáló klasszikus módszer érvényes arra az esetre is, ha az alapul vett együtthatótartomány féligegyszerű gyűrű. Ugyanakkor azt is nyerjük, hogy a féligegyszerű gyűrűk alkotják azt a legtágabb gyűrűkategóriát, amelyre az említett tényeket magában foglaló klasszikus elmélet kiterjeszthető. Ilyen módon egy olyan új jellemző tulajdonságát kapjuk a féligegyszerű gyűrűknek, amely algebrai vonatkozásban talán a legmélyebbnek tekinthető. Egyúttal útmutatást jelent ez az eredmény abban az irányban is, hogy célszerűnek látszik az egész lineáris algebrának olyan általánosítása, amelyben ferdetest helyett mindenütt féligegyszerű gyűrűt vennénk alapul.

9. §. A lineáris egyenletrendszer definíciója tetszőleges gyűrű fölött

A jelen paragrafus főcélja a legáltalánosabb értelemben vett lineáris egyenletrendszer értelmezése tetszőleges R gyűrű fölött. Látni fogjuk, hogy bármely kompatibilis lineáris egyenletrendszert megadni egyértelmű egy olyan operátorhomomorfizmus előírásával, amely egy szabad R-modulus valamely részmodulusát képezi le R^+-ba, mint R-modulusba. A lineáris egyenletrendszer ily módon nyert „koordinátamentes" definíciója igen általános és az algebrai vizsgálatokban jól használható fogalomalkotás, s emellett mindig közvetlenül át lehet térni róla a gyakorlati céloknak inkább megfelelő „koordinátás" alakra, amelyben ti. az ismeretlenek és az egyenletek konkrét formában szerepelnek.

Legyen R tetszőleges gyűrű, amelynek elemeivel, mint együtthatókkal lineáris formákat készítünk az x_α $(\alpha \in A)$ határozatlanokból, ahol A tetszőleges számosságú indexhalmaz. Az

$$f_\beta = a_{\beta 1} x_{\alpha_1} + \cdots + a_{\beta k} x_{\alpha_k} \qquad (a_{\beta i} \in R) \tag{31}$$

lineáris formák mindegyike csak véges sok x_α-t tartalmaz. Tekintsük ilyen f_β $(\beta \in B)$ lineáris formák valamely rendszerét, ahol B egy másik tetszőleges indexhalmaz, rendejünk hozzá az f_β formák mindegyikéhez egy jól meghatározott $b_\beta \in R$ elemet:

$$f_\beta \to b_\beta \qquad (\beta \in B). \tag{32}$$

Az eme hozzárendelés alapján felírt

(33) $$f_\beta = b_\beta \qquad (\beta \in B)$$

egyenletrendszert *R fölötti lineáris egyenletrendszernek nevezzük.* Az x_α határozatlanok az egyenletrendszer ismeretlenei. Ennek az egyenletrendszernek keressük az összes R-beli megoldását, azaz az összes olyan

(34) $$x_\alpha = r_\alpha \in R \qquad (\alpha \in A)$$

elemrendszert, amely a (33) alatti egyenletek mindegyikét kielégíti.

Nyilvánvaló, hogy egy ilyen lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának szükséges feltétele a következő: véges számú f_β lineáris forma között fennálló bármely olyan reláció, amely ismételt összeadás, és R-beli elemekkel balról való szorzás útján keletkezik, helyes marad akkor is, ha a relációban szereplő f_β lineáris formákat az egyenletrendszer jobboldalán álló megfelelő b_β konstansokkal helyettesítjük; más szóval, bármely

$$s_1 f_{\beta_1} + \cdots + s_i f_{\beta_i} + n_1 f_{\beta_1} + \cdots + n_i f_{\beta_i} = 0$$

alakú azonos relációból következik, hogy

$$s_1 b_{\beta_1} + \cdots + s_i b_{\beta_i} + n_1 b_{\beta_1} + \cdots + n_i b_{\beta_i} = 0.$$[15]

Ezt a feltételt a *kompatibilitás feltételének,* s az olyan lineáris egyenletrendszert, amelyre ez a feltétel teljesül, *kompatibilis lineáris egyenletrendszernek* nevezzük. A továbbiakban csak kompatibilis lineáris egyenletrendszereket tekintünk, minthogy a nem kompatibilis rendszerek a jelen vizsgálatok szempontjából érdektelenek.

Az ugyanazokra az ismeretlenekre felírt $f'_{\beta'} = b'_{\beta'}$ $(\beta' \in B')$ egyenletrendszert a (33) rendszerrel *ekvivalensnek* nevezzük, ha mindegyik $f'_{\beta'} = b'_{\beta'}$ egyenlet (33) alatti bizonyos egyenletek alkalmas lineáris kombinációja (R elemeivel és racionális egész számokkal való baloldali szorzások útján) és megfordítva. Nyilvánvaló, hogy ekvivalens egyenletrendszerek megoldásai ugyanazok.

Adott R gyűrű és x_α $(\alpha \in A)$ határozatlanok esetén könnyű áttekintést szereznünk az R gyűrű fölötti kompatibilis lineáris egyenletrendszerek összes ekvivalens osztályairól. Megmutatjuk ugyanis, hogy minden ilyen osztály kanonikusan jellemezhető egy szabad R-modulus valamely részmodulusának adott operátorhomomorf leképezésével R^+-ba. További vizsgálataink szempontjából célszerűnek bizonyul kompatibilis egyenletrendszerek egy ekvivalens osztályát mindig a kanonikusan hozzárendelt homomorfizmussal adni meg.

Legyen

(35) $$R(\mathfrak{m}) = \sum_{\alpha \in A} R x_\alpha,$$

[15] Itt $s_1, \ldots, s_i$-vel R-beli elemeket, $n_1, \ldots, n_i$-vel pedig racionális egész számokat jelöltünk. Ez utóbbiakra nincs szükségünk abban az esetben, ha R egységelemes gyűrű.

az $\ldots, x_\alpha, \ldots$ $(\alpha \in A)$ elemek, mint határozatlanok által kifeszített R-modulus.[16] Ekkor $R(\mathfrak{m})$ az összes Rx_α $(\alpha \in A)$ szabad monogén R-modulusok direkt összege, ahol a „szabad" jelző azt juttatja kifejezésre, hogy rögzített α esetén $r \rightarrow rx_\alpha$ $(r \in R)$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, azaz $rx_\alpha = 0$ csak $r = 0$ esetén teljesül. Az $R(\mathfrak{m})$ modulus elemei az $\ldots, x_\alpha, \ldots$ határozatlanok R fölötti összes lineáris formái. Mármost bármely adott (33) *kompatibilis* lineáris egyenletrendszer esetében a megfelelő (32) leképezés jól meghatározott olyan φ operátorhomomorfizmust indukál, amely az $R(\mathfrak{m})$ modulusnak az összes f_β $(\beta \in B)$ lineáris forma által generált M részmodulusát R^+-ba, mint R-modulusba képezi le. A (33) egyenletrendszer kompatibilitása biztosítja, hogy a (32) által indukált

$$(s_1 f_{\beta_1} + \cdots + s_k f_{\beta_k} + n_1 f_{\beta_1} + \cdots + n_k f_{\beta_k}) \rightarrow$$
$$\rightarrow (s_1 f_{\beta_1} + \cdots + s_k f_{\beta_k} + n_1 f_{\beta_1} + \cdots + n_k f_{\beta_k})^\varphi =$$
$$= s_1 b_{\beta_1} + \cdots + s_k b_{\beta_k} + n_1 b_{\beta_1} + \cdots + n_k b_{\beta_k}$$

φ leképezés *egyértelmű* leképezés legyen. — Megfordítva, legyen megadva $R(\mathfrak{m})$ valamely M részmodulusának R^+-ba való valamely φ operátorhomomorf leképezése. Ez mindig egy R fölötti kompatibilis lineáris egyenletrendszert szolgáltat: egy ilyen (33) egyenletrendszer baloldalán az M modulus valamely generátor rendszerét alkotó f_β lineáris formák állnak, a megfelelő jobboldali konstansok pedig az $(f_\beta)^\varphi = b_\beta$ elemekkel vannak adva. Nyilvánvaló, hogy két kompatibilis lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor ekvivalens egymással, ha a leírt módon kanonikusan hozzájuk rendelt homomorfizmusok az $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus ugyanazon M részmodulusának megegyező leképezései. Így tehát az R gyűrű fölötti kompatibilis lineáris egyenletrendszer következő definícióját nyertük:

1. definíció. *Egy tetszőleges R gyűrű fölötti $[M, \varphi]$ kompatibilis lineáris egyenletrendszeren egy $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus valamely M részmodulusának adott φ operátorhomomorf leképezését értjük R^+-ba, mint R-modulusba. Az $[M, \varphi]$ egyenletrendszert homogénnek nevezzük, ha $M^\varphi = 0$, ahol M^φ-vel az M modulus képét jelöltük a φ homomorfizmus mellett.*

Ha az x_α határozatlanok mindegyikéhez hozzárendelünk egy $r_\alpha \in R$ elemet, akkor az $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus összes $c_1 x_{\alpha_1} + \cdots + c_j x_{\alpha_j}$ elemeire vonatkozó

$$c_1 x_{\alpha_1} + \cdots + c_j x_{\alpha_j} \rightarrow c_1 r_{\alpha_1} + \cdots + c_j r_{\alpha_j}$$

előírással nyilván $R(\mathfrak{m})$ egy meghatározott operátorhomomorfizmusát adtuk meg R-be. Ezt az $x_\alpha = r_\alpha$ helyettesítéssel indukált operátorhomomorfizmusnak nevezzük. Világos, hogy az 1. definícióval értelmezett $[M, \varphi]$ *kompatibilis*

[16] $\mathfrak{m}$-mel az A indexhalmaz számosságát, azaz az $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus rangját jelöljük. Az $R(\mathfrak{m})$ jelöléssel azt akarjuk kihangsúlyozni, hogy ezt a szabad modulust lényegében egyértelműen meghatározza az R-gyűrű és az $\mathfrak{m}$ számosság.

lineáris egyenletrendszernek (34) *akkor és csak akkor megoldása, ha* $R(\mathfrak{m})$-*nek a* (34) *helyettesítéssel indukált R-be való operátorhomomorf leképezése az M részmoduluson megegyezik* φ-*vel.* — Ha tehát az $[M, \varphi]$ egyenletrendszer megoldható, akkor az M részmodulus φ homomorfizmusa biztosan kiterjeszthető az egész $R(\mathfrak{m})$ modulus egy $\overline{\varphi}$ homomorfizmusává (R-be), és bármely megoldásnak megfelel egy ilyen kiterjesztés. Ezt a fontos észrevételt POLLÁK GYÖRGYnek köszönhetem. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ez megfordítható, ha az R gyűrűnek van jobboldali egységeleme.

Legyen e jobboldali egységeleme az R gyűrűnek, és tekintsünk egy R fölötti $[M, \varphi]$ kompatibilis lineáris egyenletrendszert. Tegyük fel továbbá, hogy a φ homomorfizmus kiterjeszthető az egész $R(\mathfrak{m})$ modulus R-be való valamely $\overline{\varphi}$ operátorhomomorf leképezésévé. Speciálisan legyen $(ex_\alpha)^{\overline{\varphi}} = r_\alpha$ $(\alpha \in A)$. Ekkor, minthogy

$$f_{\beta 1} = a_{\beta 1} x_{\alpha_1} + \cdots + a_{\beta k} x_{\alpha_k} = a_{\beta_1}(ex_{\alpha_1}) + \cdots + a_{\beta k}(ex_{\alpha_k}),$$

azt kapjuk, hogy

$$(f_\beta)^{\overline{\varphi}} = a_{\beta 1} r_{\alpha_1} + \cdots + a_{\beta k} r_{\alpha_k}.$$

Másrészt mivel $\overline{\varphi}$ megegyezik M-en φ-vel, φ definíciója szerint

$$(f_\beta)^{\overline{\varphi}} = (f_\beta)^{\varphi} = b_\beta.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $x_\alpha = r_\alpha$ $(\alpha \in A)$ megoldása az $[M, \varphi]$ egyenletrendszernek.

Hogy az utóbbi bizonyításban a jobboldali egységelem egzisztenciája lényeges kikötés, mutatja a következő ellenpélda: legyen R a páros egész számok gyűrűje, s tekintsük e gyűrű fölött a

$$2x_1 = 2$$

egyetlen egyenletből álló egyenletrendszert. Legyen továbbá $R(\mathfrak{m})$ elsőrangú szabad R-modulus: $R(\mathfrak{m}) = Rx_1$. Ekkor a tekintett egyenletrendszer „koordinátamentes" formáját meghatározó M-re és φ-re nyilván

$$M = R(\mathfrak{m}) = Rx_1, \quad (rx_1)^{\varphi} = r \qquad (r \in R).$$

Ez a φ leképezés máris az egész $R(\mathfrak{m})$ modulus operátorhomomorf leképezése az R gyűrűbe, tehát $\varphi = \overline{\varphi}$, de a tekintett $2x_1 = 2$ egyenletnek nincs megoldása R-ben. Ezzel kapcsolatban bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy *ha R olyan gyűrű, hogy bármely R fölötti* $[M, \varphi]$ *kompatibilis lineáris egyenletrendszer R-ben megoldható, akkor R-nek van jobboldali egységeleme.*

Az $[M, \varphi]$ egyenletrendszer megoldhatóságára vonatkozó meggondolásaink eredményét így foglalhatjuk össze:

17. tétel. *Ha az 1. definícióval értelmezett* $[M, \varphi]$ *kompatibilis lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor az M részmodulus* φ *operátorhomomorfizmusa kiterjeszthető az egész* $R(\mathfrak{m})$ *szabad R-modulus egy* $\overline{\varphi}$ *operátorhomomorfizmusává R-be. — Megfordítva: ha R jobboldali egységelemet tartalmazó* *gyűrű, és ha az $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus M részmodulusának R-be való valamely φ operátorhomomorf leképezése kiterjeszthető az egész $R(\mathfrak{m})$ modulusnak egy $\overline{\varphi}$ operátorhomomorfizmusává, akkor az R fölötti $[M, \varphi]$ kompatibilis lineáris egyenletrendszer megoldható, s az összes megoldásai kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban vannak φ összes kiterjesztéseivel.*

A lineáris egyenletrendszer fogalmának egy másik, igen általános definíciója BOURBAKI-tól származik ([3], 51. old.). BOURBAKI felfogásában a (33) egyenletek baloldali végtelen sok zérustól különböző együtthatójú tagot is tartalmazhatnak, a (34) megoldásokban azonban véges számú α kivételével az összes r_α-nak zérusnak kell lennie. Ebből a felfogásból speciálisan következik, hogy az alábbi igen egyszerű végtelen lineáris egyenletrendszer is „megoldhatatlan“:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, \ldots.$$

Éppen ezért a lineáris egyenletrendszerek általuk adott definíciója bizonyos szempontból célszerűbbnek látszik.

10. §. Lineáris egyenletrendszerek féligegyszerű gyűrűk fölött

A véges lineáris egyenletrendszerek elméletét az eddigi irodalomban tetszőleges F ferdetest alapul vételével építették fel (lásd erre vonatkozólag pl. [19] 106. o., [16] 349—350. o.). E jólismert klasszikus elmélet szerint egy

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \qquad (a_{ik}, b_i \in F)$$

kompatibilis lineáris egyenletrendszer összes megoldásai oly módon nyerhetők, hogy a (36) alatti egyenletek alkalmas lineáris kombinációiként kapott

$$(37)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \left(\sum_{i=1}^{m} u_{1i}b_i\right) + d_{11}t_1 + \cdots + d_{1p}t_p \\ \quad \vdots \\ x_n = \left(\sum_{i=1}^{m} u_{ni}b_i\right) + d_{n1}t_1 + \cdots + d_{np}t_p \end{array}\right.$$

megoldási képletekben (ahol u_{ji} és d_{kl} az F ferdetest meghatározott elemei) a szabadon választható értékű $t_1, \ldots, t_p$ paraméterek helyébe rendre a tetszőleges $v_1, \ldots, v_p$ F-beli elemrendszert helyettesítjük.[17] Minthogy ez a tetszőlegesen választható elemrendszer speciálisan a $0, \ldots, 0$ elemrendszer is lehet, a (37) éplet alapján nyilvánvaló, *hogy egy kompatibilis lineáris egyenletrendszernek*

[17] Megjegyezzük, hogy a $t_1, \ldots, t_p$ szabad paraméterek száma akkor lesz p, ha a (36) egyenletrendszer rangja $n-p$. Ez esetben a (37) alatti relációk közül (az ismeretlenek alkalmas számozása mellett) az utolsó p számú reláció: $x_{n-p+1} = t_1, \ldots. x_n = t_p$.

mindig van olyan megoldása, amely az egyenletrendszer jobboldalán álló konstansok baloldali lineáris kombinációjaként áll elő. Legújabban GACSÁLYI SÁNDOR és SZELE TIBOR megmutatta, hogy a lineáris egyenletrendszerek fentebb vázolt klasszikus elmélete kiterjeszthető tetszőleges számosságú egyenlet, illetve ismeretlen esetére is, az alapul vett együtthatótartományt továbbra is ferdetestnek választva [7], [17].

Ennek a klasszikus elméletnek további, tetszőleges gyűrű alapulvétele mellett történő általánosítása céljából mindenek előtt szükségünk van arra, hogy e klasszikus elmélet leglényegesebb tulajdonságait kifejező alapvető tényeit egy definícióban rögzítsük.

2. definíció. *Legyen R tetszőleges gyűrű. Akkor mondjuk, hogy az R gyűrű fölött érvényes a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete, ha teljesül a következő két követelmény:*

1) *Bármely R fölötti $[M, \varphi]$ kompatibilis lineáris egyenletrendszernek van olyan megoldása, amelyre $x_\alpha = r_\alpha \in M^\varphi$ $(\alpha \in A)$.*

2) *Egy R fölötti tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszer összes R-beli megoldása egy paraméterhalmaz R fölötti baloldali lineáris kombinációinak rendszerével nyerhető, ahol a paraméterek értékeit R-ből szabadon választhatjuk. Részletesebben: megadható t_δ $(\delta \in D)$ paramétereknek olyan halmaza, hogy bármely x_α $(\alpha \in A)$ ismeretlenhez hozzárendelhető egy*

$$g_\alpha(\ldots, t_\delta, \ldots) = \sum_{\delta \in D} d_{\alpha\delta} t_\delta \qquad (d_{\alpha\delta} \in R)$$

lineáris forma (ahol bármely rögzített α esetén véges számú δ kivételével $d_{\alpha\delta} = 0$) úgy, hogy bármely $t_\delta \in R$ értékrendszerre $x_\alpha = g_\alpha(\ldots, t_\delta, \ldots)$ $(\alpha \in A)$ a tekintett egyenletrendszernek egy megoldása, és az egyenletrendszer bármely megoldása ily módon nyerhető egy alkalmasan választott $t_\delta \in R$ értékrendszer segítségével.

Nyilvánvaló, hogy ez a definíció ekvivalens azzal, hogy bármely R fölötti (33) kompatibilis lineáris egyenletrendszer összes megoldása

$$x_\alpha = c_\alpha + \sum_{\delta \in D} d_{\alpha\delta} t_\delta \qquad (c_\alpha, d_{\alpha\delta} \in R, \ \alpha \in A)$$

alakú „klasszikus" megoldási képletrendszer segítségével nyerhető, ahol a t_δ-k szabadon választható R-beli értékű paraméterek, a c_α konstansok pedig a (33) egyenletrendszer jobboldalán szereplő b_β-kból gyűrűbeli elemekkel való baloldali szorzások, továbbá ismételt összeadások és kivonások útján keletkeznek.[18]

Dolgozatunk második részének főeredménye azt mondja ki, hogy *egy tetszőleges R gyűrűre akkor és csak akkor érvényes a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete, ha R féligegyszerű gyűrű.* Ezt az eredményt foglalja magában a következő két tétel:

[18] Ha R egységelemes gyűrű, akkor az ismételt összeadások, illetve kivonások természetesen feleslegesek: a c_α konstansok ekkor egyszerűen R fölötti baloldali lineáris kombinációi a b_β elemeknek.

18. tétel. *Egy R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely R fölötti $[M, \varphi]$ kompatibilis lineáris egyenletrendszernek van olyan $x_\alpha = r_\alpha$ megoldása, hogy $r_\alpha \in M^\varphi$ $(\alpha \in A)$.*

19. tétel. *Ha R féligegyszerű gyűrű, akkor R-re érvényes a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy R olyan gyűrű, hogy bármely R fölötti $[M, \varphi]$ kompatibilis lineáris egyenletrendszernek van $x_\alpha = r_\alpha \in M^\varphi$ $(\alpha \in A)$ megoldása. Megmutatjuk, hogy ekkor R tetszőleges L baloldali ideáljának van jobboldali egységeleme, azaz R a Fuchs—Szele-féle kritérium értelmében féligegyszerű gyűrű. Legyen ugyanis L tetszőleges baloldali ideál R-ben, és tekintsük az alábbi $[M, \varphi]$ lineáris egyenletrendszert: $R(\mathfrak{m})$-nek az Rx_1 elsőrangú szabad R-modulust vesszük (azaz $\mathfrak{m} = 1$), legyen továbbá $M = Lx_1, (lx_1)^\varphi = l$ $(l \in L)$. Más szóval tekintsük az összes

$$lx_1 = l$$

alakú egyenletből álló rendszert, ahol l befutja L összes elemét. Minthogy ez a lineáris egyenletrendszer kompatibilis, feltevésünk szerint van olyan megoldása, amelyre $x_1 = e \in M^\varphi = L$. Ez éppen azt jelenti, hogy e az L baloldali ideálban jobboldali egységelem. Az R gyűrű tehát a Fuchs—Szele-féle kritérium alapján valóban féligegyszerű gyűrű.

A 18. tétel bizonyításának befejezéséhez és a 19. tétel bizonyításához felhasználjuk az alábbi segédtételt:

Segédtétel. *Ha R féligegyszerű gyűrű, akkor az x_α $(\alpha \in A)$ határozatlanokkal kifeszített $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus bármely M részmodulusához megadható $R(\mathfrak{m})$-nek olyan*

$$R(\mathfrak{m}) = M + N \tag{38}$$

direkt felbontása, amelyben N

$$N = \sum_{\delta \in D} \{s_\delta x_\delta\} \qquad (s_\delta \in R) \tag{39}$$

alakú részmodulus, és D az A indexhalmaz valamely részhalmaza.[19]

Segédtételünk bizonyítása céljából tekintsünk egy R féligegyszerű gyűrűt, amelynek egységeleme (26) szerint

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_m \tag{40}$$

alakban állítható elő, és itt az e_i elemek páronként ortogonális idempotens elemei az R gyűrűnek, továbbá Re_i minimális baloldali ideál R-ben $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Minthogy R egységelemes gyűrű, feltehetjük, hogy az összes x_α határozatlanok szerepelnek az $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus elemei között. $R(\mathfrak{m})$-ben ugyanis benne

[19] Dolgozatunk első részében már alkalmazott jelöléssel élve $\{s_\delta x_\delta\}$ az $s_\delta x_\delta$ elem által generált részmodulust jelöli. Mivel R a jelen esetben egységelemes gyűrű, $\{s_\delta x_\delta\} = R(s_\delta x_\delta)$.

vannak az $1 \cdot x_\alpha$ elemek, s $R(\mathfrak{m})$ bármely eleme változatlan marad, ha x_α-t $1 \cdot x_\alpha$-val cseréljük ki.

Az 1 elem (40) felbontása és az ebben szereplő e_i elemek említett tulajdonságai alapján nyilvánvaló, hogy

$$\{x_\alpha\} = \{e_1 x_\alpha\} + \{e_2 x_\alpha\} + \cdots + \{e_m x_\alpha\},$$

azaz

$$R(\mathfrak{m}) = \sum_{\alpha \in A} \{x_\alpha\} = \sum_{\alpha \in A} (\{e_1 x_\alpha\} + \{e_2 x_\alpha\} + \cdots + \{e_m x_\alpha\}). \tag{41}$$

Legyen mármost X maximális olyan részhalmaza az összes

$$e_i x_\alpha \qquad (\alpha \in A, i = 1, \ldots, m)$$

elemek halmazának, amely által generált

$$\{X\} = \cdots + \{e_i x_\alpha\} + \cdots \tag{42}$$

részmodulus közös része M-mel 0. Megmutatjuk, hogy (38) és (39) teljesül $R(\mathfrak{m})$-nek $N = \{X\}$ részmodulusára. E célból nyilván elegendő azt bebizonyítani, hogy $e_j x_\lambda$ eleme az

$$M + \{X\}$$

direktösszegnek *bármely* $\lambda \in A$ és $j = 1, \ldots, m$ esetén, hiszen ekkor (40) szerint $x_\lambda \in M + \{X\}$ $(\lambda \in A)$. Ez azonban nyilvánvaló, mert az X halmaz maximális volta miatt

$$\{e_j x_\lambda\} \cap (M + \{X\}) \neq 0,$$

és így, minthogy $\{e_j x_\lambda\}$ minimális részmodulus $R(\mathfrak{m})$-ben,

$$\{e_j x_\lambda\} \subseteq M + \{X\},$$

azaz $e_j x_\lambda \in M + \{X\}$. Ezzel megmutattuk, hogy (38) érvényes a $N = \{X\}$ részmodulusra; N (39) alatti előállítása pedig egyszerűen úgy adódik (42)-ből, hogy az azonos x_α határozatlanoknak megfelelő $\{e_i x_\alpha\}$ direkt összeadandókat

$$\{e_1 x_\alpha\} + \{e_2 x_\alpha\} = \{(e_1 + e_2) x_\alpha\}$$

mintára összevonjuk.

Az ily módon igazolt segédtétel alapján befejezzük a 18. tétel bizonyítását. Legyen $[M, \varphi]$ az R féligegyszerű gyűrű fölötti tetszőleges kompatibilis lineáris egyenletrendszer. Azt kell megmutatnunk, hogy e rendszernek van olyan (34) alatti megoldása, amelyre $x_\alpha = r_\alpha \in M^\varphi$ $(\alpha \in A)$. Ez azonban a 17. tétel szerint ekvivalens azzal, hogy a φ leképezés kiterjeszthető az egész $R(\mathfrak{m})$ modulus M^φ-be való valamely $\bar{\varphi}$ operátorhomomorfizmusává. Mármost (38) alapján φ-nek egy ilyen kiterjesztését közvetlenül megadhatjuk. Ha ugyanis g tetszőleges eleme $R(\mathfrak{m})$-nek, ekkor felhasználva a (38) szerinti

$$g = g' + g'' \qquad (g' \in M,\ g'' \in N)$$

egyértelmű előállítást, a $\bar{\varphi}$ kiterjesztett leképezést a

$$g^{\bar{\varphi}} = (g')^\varphi \in M^\varphi$$

előírással definiáljuk.

Most rátérünk a 19. tétel bizonyítására. Mivel a 18. tételt már igazoltuk, csak azt kell megmutatnunk, hogy a 2. definíció (2) követelménye teljesül a tetszőleges R féligegyszerű gyűrűre. Legyen $[M, \varphi]$ tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszer R fölött, amelyre tehát

$$(43) \qquad M^{\varphi} = 0.$$

Minthogy a 17. tétel szerint a tekintett egyenletrendszer összes megoldásai kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban vannak a φ leképezés összes lehetséges $\overline{\varphi}$ kiterjesztéseivel, csupán azt kell figyelembe vennünk, hogy (38) és (39) alapján az $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus összes olyan $\overline{\varphi}$ operátorhomomorf leképezései R-be, amelyekre

$$(44) \qquad M^{\overline{\varphi}} = 0$$

egyértelműen jellemezhetők a (39) alatt szereplő $s_\delta x_\delta$ báziselemek

$$(45) \qquad (s_\delta x_\delta)^{\overline{\varphi}} = t_\delta \in R \qquad (\delta \in D)$$

képeivel; és másfelől: tetszőleges $t_\delta \in R$ $(\delta \in D)$ elemrendszert előírva (45), (39) és (38) alapján mindig $R(\mathfrak{m})$-nek egy kívánt tulajdonságú $\overline{\varphi}$ operátorhomomorfizmusát nyerjük. Továbbá, mivel a tekintett homogén egyenletrendszer (34) alatti az a megoldása, amely egy bizonyos $\overline{\varphi}$ homomorfizmusnak felel meg, az $r_\alpha = (x_\alpha)^{\overline{\varphi}}$ előírással van megadva és a (38), (39) összefüggésekből az $R(\mathfrak{m})$-beli x_α elemek egyértelműen meghatározott

$$(46) \qquad x_\alpha = x'_\alpha + \sum_{\delta \in D}{}' d_{\alpha\delta}(s_\delta x_\delta) \qquad (x'_\alpha \in M)$$

előállítása következik, azt találtuk, hogy a tekintett homogén egyenletrendszer összes megoldásai a (46), (45), (44) alapján felírt

$$r_\alpha = (x_\alpha)^{\overline{\varphi}} = \sum_{\delta \in D}{}' d_{\alpha\delta} t_\delta \qquad (\alpha \in A)$$

képletek szerint nyerhetők, ahol a t_δ paraméterek értékeit tetszőlegesen választhatjuk meg az R gyűrű elemei közül. Ilyen módon éppen a 2. definíció 2) bekezdésében előírt megoldási képleteket nyertük, s ezzel a 19. tétel bizonyítását befejeztük.

11. §. Záró megjegyzések

Még néhány megjegyzést teszünk a féligegyszerű gyűrűk fölötti lineáris egyenletrendszerek előző paragrafusban kifejtett elméletével kapcsolatban. A ferdetest fölötti kompatibilis lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete szerint az ismeretlenek számossága megegyezik az egyenletrendszer rangjának és a klasszikus megoldási képletekben fellépő szabadon választható értékű paraméterek számosságának összegével [17]. Az egyenletrendszer rangján a benne szereplő egyenletek egy maximális független rendszerének számosságát értjük. Ez a szabály is teljes élességgel kiterjeszthető féligegyszerű gyűrű fölötti egyenletrendszer esetére, éspedig a fontos (38) előállítás alapján. Hogy ezt az általánosítást megfogalmazhassuk, be kell vezetnünk az R féligegyszerű gyűrű fölötti $R(\mathfrak{m})$ szabad R modulus valamely részmodulusának *abszolút rangját*. Abból, hogy R féligegyszerű gyűrű, következik, hogy M felbontható minimális R-modulusok direkt összegére, s e felbontásban szereplő direkt összeadandók számossága invariáns: ezt a számosságot nevezzük M abszolút rangjának. Speciálisan $R(\mathfrak{m})$ abszolút rangja, mint a (41) felbontásban szereplő direkt összeadandók számossága, az $m\mathfrak{m}$ számossággal van adva, ahol $\mathfrak{m}$ az $R(\mathfrak{m})$ szabad modulus közönséges rangja. Ha például magát az R gyűrűt tekintjük, mint olyan szabad R-modulust, amelynek közönséges rangja 1, akkor R abszolút rangja m, megfelelően annak a ténynek, hogy R m számú minimális baloldali ideál direkt összege. Mármost az R gyűrű fölötti $[M, \varphi]$ *kompatibilis lineáris egyenletrendszer rangját* az M részmodulus abszolút rangjával definiáljuk. Ekkor (38) és (39) alapján közvetlenül beláthatjuk a fentebb említett klasszikus törvényszerűség következő általánosítását:

Ha $[M, \varphi]$ tetszőleges, $\mathfrak{m}$ számosságú ismeretlent tartalmazó kompatibilis lineáris egyenletrendszer az R féligegyszerű gyűrű fölött, és az R gyűrű m számú minimális baloldali ideál direkt összegére bontható, akkor az egyenletrendszer rangjának és az egyenletrendszer klasszikus megoldási képletrendszerében fellépő szabadon választható értékű paraméterek számosságának összege $m\mathfrak{m}$.

Végül megemlítjük a fenti tételek néhány közvetlen következményét:

20. tétel. *A tetszőleges R féligegyszerű gyűrű fölötti $[M, \varphi]$ kompatibilis lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van pontosan egy megoldása R-ben, ha $M = R(\mathfrak{m})$, azaz az egyenletrendszer baloldalán álló f_β lineáris formák az összes ismeretlenekkel, mint határozatlanokkal kifeszített teljes $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulust generálják.*

Megjegyezzük, hogy ez az egyetlen megoldás természetesen mindig az R gyűrűnek az egyenletek jobboldalai által generált baloldali ideáljába esik.

Minthogy a kompatibilitás véges jellegű tulajdonság, eredményeinkből TUKEY lemmájának felhasználásával következik az alábbi két tétel.

21. tétel. *Az R féligegyszerű gyűrű fölötti tetszőleges (nem szükségképpen kompatibilis) lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg R-ben, ha R-ben megoldható bármely véges számú egyenletből álló részrendszere.*

22. tétel. *Tetszőleges féligegyszerű gyűrű fölötti bármely lineáris egyenletrendszer mindig tartalmaz maximális megoldható részrendszert.*

Kossuth Lajos Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] ARTIN, E., Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen. *Abh. Hamburg* **5** (1927) 251—260.
[2] BAER, R., Abelian groups that are direct summand of every containing abelian group. *Bull. Amer. Math. Soc.* **46** (1940), 161—186.
[3] BOURBAKI, N., Éléments de mathématique, I. Partie, Livre II: Algèbre.
[4] BROWN, B.—MCCOY, N. H., Radicals and subdirect sums. *Amer. J. Math.* **69** (1947) 46—58.
[5] FUCHS, L., A radikálnak egy új definíciója. *Az Első Magyar Mat. Kongr. Közl., Budapest* (1950), 435—443.
[6] FUCHS, L.—SZELE, T., Contribution to theory of semisimple rings. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952), 235—239.
[7] GACSÁLYI, S., On algebraically closed abelian groups. *Publ. Math. Debrecen* **2** (1952), 292—296.
[8] GOLDMAN, O., A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition. *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 1021—1027.
[9] JACOBSON, N., The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. *Amer. J. Math.* **67** (1945), 300—320.
[10] KERTÉSZ, A., On groups every subgroup of which is a direct summand. *Publ. Math. Debrecen* **2** (1951), 74—75.
[11] KÖTHE, G., Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring. *Math. Z.* **39** (1935), 31—44.
[12] KRULL, W., Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen. *Math. Z.* **23** (1925), 161—186.
[13] KRULL, W., Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe. *Math. Ann.* **99** (1928), 51—70.
[14] Курош, А. Г., Теория групп, 2-е изд. Москва, 1953.
[15] NOETHER, E., Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. *Math. Z.* **30** (1929), 641—692.
[16] RÉDEI, L., Algebra I., *Budapest,* 1954.
[17] SZELE, T., On arbitrary systems of linear equations. *Publ. Math. Debrecen* **2** (1952), 297—299.
[18] SZELE, T., Két gyűrűelméleti struktúratétel geometriai bizonyítása. *Az MTA Mat. és Fiz. Osztályának Közleményei* **4** (1954), 49—85.
[19] VAN DER WAERDEN, B. L., Moderne Algebra II., *Berlin,* 1940.
[20] WEDDERBURN J. H. M., On hyperkomplex numbers. *Proc. London Math. Soc.* (2) **6** (1908), 77—118.

REKURRENS FOLYAMATOK ÁLTAL SZÁRMAZTATOTT MÁSODLAGOS SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOKRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1954. december 17-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Tekintsük a $0<t$ időpontokra értelmezett

(1) $$\eta(t)=\sum_{0<t_n\leqq t} f(t-t_n, \chi_n)$$

valószínűségi függvényt, ahol a $\{t_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ időpontok valamilyen véletlen törvénynek alávetett valószínűségi változók és a $\{\chi_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ paraméterek egymástól és a t_n-ektől is független, egyforma eloszlású valószínűségi változók. A χ_n változók közös eloszlásfüggvényét jelölje

$$P(\chi_n\leqq x)=H(x) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Legyen továbbá $f(u,x)$ egy előre megadott kétváltozós függvény.

A fenti típusú sztochasztikus folyamatokkal már korábbi [1] és [2] dolgozatunkban is foglalkoztunk. Az [1] dolgozatban azt a speciális esetet vizsgáltuk, midőn a $\{t_n\}$ időpontok Poisson-folyamatban előforduló események időpontjaival egyeznek meg. A [2] dolgozatban pedig ezt a folyamatot abban az esetben tettük vizsgálat tárgyává, midőn a $\{t_n\}$ időpontok ún. *rekurrens sztochasztikus folyamatot* alkotnak. Ez alatt azt értjük, hogy a $\{t_n\}$ sorozatban a $\xi_n=t_n-t_{n-1}$ $(n=1,2,\ldots; t_0=0)$ időkülönbségek egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók. A [2] dolgozatban azonban csupán arra a speciális esetre szorítkoztunk, midőn

(2) $$f(u,x)=\begin{cases} 0 & \text{ha } u<0 \text{ vagy } x<0, \\ xe^{-\alpha u} & \text{ha } u\geqq 0 \text{ és } x\geqq 0, \end{cases}$$

és α pozitív állandó.

Jelenlegi dolgozatunk a [2] dolgozat továbbfejlesztése arra az esetre, midőn az $f(u,x)$ függvény tetszőleges alakú. Dolgozatunkban mindvégig fel fogjuk tenni, hogy $f(u,x)=0$, ha $u<0$, bár ez nem jelent lényeges megszorítást. Továbbá [2]-höz hasonlóan most is feltesszük, hogy a $\{t_n\}$ időpontsorozat *rekurrens sztochasztikus folyamatot* alkot, azaz a $\xi_n=t_n-t_{n-1}$ $(n=1,2,\ldots; t_0=0)$ időkülönbségek egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók. A $\{\xi_n\}$ változók közös eloszlásfüggvényét jelölje

$$P(\xi_n\leqq x)=G(x) \qquad (n=1,2.\ldots).$$

A $\{\xi_n\}$ változók pozitivitásából következik, hogy $G(0)=0$.

Az említett folyamatok különösen fontos szerepet játszanak a részecskeszámlálók elméletében, elektroncsövek anódáramingadozásának tárgyalásánál, híradástechnikában fellépő átviteli kérdéseknél és egyéb fizikai problémáknál. A gyakorlati alkalmazásoknál főleg a stacionárius eset bír fontossággal, azaz végtelen hosszú ideje tartó folyamat esetén kialakult egyensúlyi állapot. Ezért bevezetjük a következő valószínűségi függvényt is:

$$\eta^*(t) = \sum_{-\infty < t_n \leqq t} f(t-t_n, \chi_n), \tag{3}$$

ahol most az összegezés mindazon t_n időpontokra ki van terjesztve, amelyek t időpont előtt fordultak elő. Most azt tesszük fel, hogy a $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) időkülönbségek egymástól független, egyforma eloszlású pozitív valószínűségi változók, közös $G(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ki fogjuk mutatni, hogy az $\eta^*(t)$ folyamat általános feltételek mellett létezik.

Könnyen belátható, hogy ha az $\eta(t)$ folyamat $t \to \infty$ esetén meghatározott sztochasztikus viselkedést mutat, úgy ilyen esetekben az $\eta^*(t)$ folyamat minden véges t időpontban ugyanazt a sztochasztikus viselkedést mutatja.

A következőkben először $\eta(t)$ eloszlásának és momentumainak meghatározásával foglalkozunk. Feltételeket adunk arra vonatkozólag, hogy a momentumok határértékei $t \to \infty$ esetén mikor léteznek és megadjuk a határértékeket. Ezután az $\eta^*(t)$ folyamat létezésének kérdésével foglalkozunk és megadjuk az $\eta^*(t)$ folyamat korrelációs függvényét, amelynek ismeretében A. JA. HINCSIN [3] munkája alapján könnyen elvégezhető az $\eta^*(t)$ folyamat harmonikus analízise. Megjegyezzük, hogy [2] dolgozatunkban a (2) alatti függvényre sem tudtuk elvégezni a megfelelő $\eta^*(t)$ folyamat harmonikus analízisét, ugyanis ehhez szükséges lett volna az $\eta^*(t)$ folyamat viselkedését (2)-nél általánosabb jelek esetén is ismerni. Most ezt pótlólag elvégezzük.

Bevezetjük a következő jelöléseket: Az $\eta(t)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét jelölje

$$P(\eta(t) \leqq x) = F(t, x). \tag{4}$$

Ha létezik $\lim_{t \to \infty} F(t, x) = F^*(x)$ határeloszlásfüggvény, úgy $\eta^*(t)$-nek minden t-re létezik eloszlásfüggvénye, éspedig fennáll, hogy

$$P(\eta^*(t) \leqq x) = F^*(x). \tag{5}$$

Legyen továbbá $\eta(t)$ változó karakterisztikus függvénye

$$\Phi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \, d_x F(t, x) \tag{6}$$

és amennyiben $F^*(x)$ határeloszlás létezik,

$$\Phi^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \, dF^*(x). \tag{7}$$

Jelölje továbbá az $\eta(t)$ változó k-adik momentumát $M_k(t)$, azaz legyen

$$M_k(t) = M\{(\eta(t))^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d_x F(t, x). \tag{8}$$

Speciálisan, az $\eta(t)$ változó várható értékét $M(t)$-vel és szórásnégyzetét $D^2(t)$-vel fogjuk jelölni, azaz $M(t) = M_1(t)$ és $D^2(t) = M_2(t) - [M_1(t)]^2$. Legyen továbbá $M_k = \lim_{t\to\infty} M_k(t)$ és speciálisan $M = \lim_{t\to\infty} M(t)$ és $D^2 = \lim_{t\to\infty} D^2(t)$.

1. §. Az $\eta(t)$ folyamat vizsgálata

1. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy majdnem minden t-re létezik*

$$\varphi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega f(t,x)} \, d\, H(x) \tag{9}$$

integrál. Ekkor $\Phi(t, \omega)$ meghatározására a következő integrálegyenlet szolgál:

$$\Phi(t, \omega) = \int_0^t \Phi(t-x, \omega)\, \varphi(t-x, \omega)\, d\, G(x) + 1 - G(t). \tag{10}$$

BIZONYÍTÁS: A (9) integrál mindenesetre létezik, ha $f(t, x)$, x-ben Borel-mérhető. A (10) integrálegyenlet fennállása úgy látható be, hogy $\eta(t)$ (1) kifejezésében különválasztjuk a t_1 időpontnak megfelelő tagot. Ekkor azon feltétel mellett, hogy $t_1 = x$ fennáll:

$$\eta(t \mid t_1 = x) = \begin{cases} f(t-x, \chi_1) + \overline{\eta}(t-x) & \text{ha } x \leq t \\ 0 & \text{ha } x > t. \end{cases} \tag{11}$$

Itt $\overline{\eta}(t-x)$ valószínűségi változó független $f(t-x, \chi_1)$-től és eloszlása megegyezik $\eta(t-x)$ eloszlásával. Ennek figyelembevételével $\eta(t \mid t_1 = x)$ karakterisztikus függvénye:

$$\begin{cases} \Phi(t-x, \omega)\, \varphi(t-x, \omega) & \text{ha } x \leq t \\ 1 & \text{ha } x > t \end{cases} \tag{12}$$

és a feltétel nélküli $\eta(t)$ karakterisztikus függvényét $\Phi(t, \omega)$-t úgy nyerjük, hogy ezt $d\,G(x)$ szerint integráljuk $0 \leq x < \infty$ értékekre.

Megjegyezzük, hogy ha $\lim_{t\to\infty} \Phi(t, \omega) = \Phi^*(\omega)$ határérték létezik és $\Phi^*(\omega)$ az $\omega = 0$ helyen folytonos, úgy $\lim_{t\to\infty} F(t, x) = F^*(x)$ határeloszlás is létezik és $F^*(x)$ karakterisztikus függvénye $\Phi^*(\omega)$, melynek ismeretében $F^*(x)$ egyértelműen meghatározható (P. LÉVY és H. CRAMÉR tétele).

A (10) integrálegyenlet megoldására sokszor célszerű $\Psi(t, \omega) = \Phi(t, \omega)\, \varphi(t, \omega)$ függvényt bevezetni. Erre vonatkozóan a következő integrálegyenlet lesz érvényes:

$$(13)\qquad \Psi(t,\omega)=\varphi(t,\omega)\left[\int_0^t \Psi(t-x,\omega)\,dG(x)+1-G(t)\right].$$

A (10) illetve (13) egyenlet sajnos általános esetben nem oldható meg és így minden speciális eset külön tárgyalást igényel.

Mivel $F(t,x)$ általános meghatározása nem vihető véghez, ezért egyelőre beérjük $\eta(t)$ várható értékének, szórásnégyzetének és momentumainak meghatározásával.

Bevezetjük a következő jelöléseket. Legyen a $(0,t)$ időintervallumban előforduló $\{t_n\}$ események várható száma $m(t)$, azaz

$$(14)\qquad m(t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t),$$

ahol $G_n(t)$ jelöli a $G(t)$ eloszlásfüggvény önmagával való n-szeres konvolucióját. Legyenek továbbá

$$(15)\qquad \lambda_j(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[f(t,x)]^j\,dH(x),\qquad (j=0,1,2,\ldots),$$

amennyiben ezek léteznek.

Most a következő tételeket bizonyítjuk be:

2. TÉTEL: *Az* $M\{\eta(t)\}=M(t)$ *várható értékre fennáll, hogy*

$$(16)\qquad M(t)=\int_0^t \lambda_1(t-x)\,dm(x).$$

Továbbá, ha $G(x)$ *nem rácsos eloszlásfüggvény, átlaga*

$$(17)\qquad \vartheta=\int_0^{\infty} x\,dG(x)$$

véges és $\lim_{t\to\infty} t\lambda_1(t)=0$, *úgy fennáll*

$$(18)\qquad \lim_{t\to\infty} M(t)=\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\infty}\lambda_1(t)\,dt,$$

feltéve, hogy a jobboldal létezik.

BIZONYÍTÁS: Mint ismeretes, valószínűségi változók összegének a várható értéke egyenlő az egyes tagok várható értékeinek összegével, így tehát

$$(19)\qquad M\{\eta(t)\}=\sum_{n=1}^{\infty} M\{f(t-t_n,\chi_n)\}$$

és itt

$$(20)\qquad M\{f(t-t_n,\chi_n)\}=\int_0^t \lambda_1(t-x)\,dG_n(x).$$

A (16) kifejezés innen (14) tekintetbevételével adódik.

A tétel második felének bizonyítására hivatkozunk D. BLACKWELL [4] és J. L. DOOB [5] dolgozataira, amelyben kimutatták, hogy ha $G(x)$ nem rácsos eloszlás, úgy tetszőleges $h>0$-ra fennáll a következő határérték:

$$\lim_{t\to\infty}[m(t+h)-m(t)]=\frac{h}{\vartheta}. \tag{21}$$

Ha $M(t)$-t a következő alakban írjuk fel:

$$M(t)=\int_0^{t/2}\lambda_1(t-x)\,dm(x)+\int_{t/2}^{t}\lambda_1(t-x)\,dm(x), \tag{22}$$

úgy a (21) felhasználásával kimutatható, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t/2}^{t}\lambda_1(t-x)\,dm(x)=\frac{1}{\vartheta}\int_0^\infty\lambda_1(x)\,dx, \tag{23}$$

továbbá feltételünk következtében tetszőleges kicsiny $\varepsilon>0$ mellett elegendő nagy t-re fennáll, hogy $|t\lambda_1(t)|<\varepsilon$, úgy, hogy t elegendő nagyra választásával elérhető, hogy

$$\left|\int_0^{t/2}\lambda_1(t-x)\,dm(x)\right|\leqq\varepsilon\frac{m(t/2)}{t/2}. \tag{24}$$

Mivel $\lim\limits_{t\to\infty}m(t)/t=1/\vartheta$, következőleg (22) jobboldalán az első kifejezés zérushoz tart, ha $t\to\infty$. Így ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy kiindulhattunk volna az $M(t)$-re könnyen beláthatóan fennálló

$$M(t)=\int_0^t[\lambda_1(t-x)+M(t-x)]\,dG(x) \tag{25}$$

integrálegyenletből is, amikor is természetesen ugyanazon eredményre jutottunk volna.

3. TÉTEL: *A $D^2\{\eta(t)\}=D^2(t)$ szórásnégyzetre fennáll, hogy*

$$D^2(t)=\int_0^t[\lambda_2(t-x)+2\lambda_1(t-x)M(t-x)]\,dm(x)-[M(t)]^2. \tag{26}$$

Továbbá, ha $G(x)$ nem rácsos eloszlásfüggvény, átlaga $\vartheta<\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}t\lambda_1(t)=0$ és $\lim\limits_{t\to\infty}t\lambda_2(t)=0$, úgy fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty}D^2(t)=\frac{1}{\vartheta}\int_0^\infty[\lambda_2(t)+2\lambda_1(t)M(t)]\,dt-\left(\frac{1}{\vartheta}\int_0^\infty\lambda_1(t)\,dt\right)^2, \tag{27}$$

amennyiben a szóban forgó integrálok léteznek.

BIZONYÍTÁS: A feltételes szórásnégyzetre vonatkozó ismert tétel szerint könnyen belátható, hogy $D^2(t)$-re fennáll a következő összefüggés:

$$D^2(t)=\int_0^t D^2(t-x)\,dG(x)+ \tag{28}$$
$$+\int_0^t [(M(t-x))^2+2\lambda_1(t-x)M(t-x)+\lambda_2(t-x)]\,dG(x)-[M(t)]^2.$$

Ez $D^2(t)$-re nézve jól ismert Volterra-típusú integrálegyenlet. Célszerűbb most $D^2(t)+[M(t)]^2$ függvényt tekinteni ismeretlennek. Az erre vonatkozó megoldás, mint ismeretes:

$$D^2(t)+[M(t)]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t [\lambda_2(t-x)+2\lambda_1(t-x)M(t-x)]\,dG_n(x). \tag{29}$$

(29)-ből $m(t)$ (14) alatti kifejezésének figyelembevételével adódik a bizonyítandó (26) képlet.

A (27) határérték bizonyítása pontosan úgy történik, mint (18) bizonyítása.

4. TÉTEL: *Az $M\{(\eta(t))^k\}=M_k(t)$, k-adik momentumra fennáll, hogy*

$$M_k(t)=\int_0^t \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j} M_j(t-x)\lambda_{k-j}(t-x)\,dm(x). \tag{30}$$

Továbbá, ha $G(x)$ nem rácsos eloszlásfüggvény, átlaga $\vartheta<\infty$ és fennáll $\lim_{t\to\infty} t\lambda_j(t)=0$ $(j=1,2,\ldots,k$-ra), úgy

$$\lim_{t\to\infty} M_k(t)=\frac{1}{\vartheta}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\int_0^{\infty} M_j(t)\lambda_{k-j}(t)\,dt, \tag{31}$$

feltéve, hogy a jobboldalon álló integrálok léteznek.

BIZONYÍTÁS: Képezzük (10) mindkét oldalának k-adik deriváltját ω szerint és tegyünk $\omega=0$-t, vagy a feltételes momentumokra vonatkozó ismert formulák szerint felírhatjuk, hogy

$$M_k(t)=\int_0^t \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} M_j(t-x)\lambda_{k-j}(t-x)\,dG(x). \tag{32}$$

Ha már $M_1(t), M_2(t),\ldots, M_{k-1}(t)$ ismeretes, úgy (32) $M_k(t)$ számára ismert típusú Volterra-féle integrálegyenlet, amelynek megoldása a (30) explicit alakban írható fel. A (31) határérték létezése (21) alapján mutatható ki.

2. §. Az $\eta^*(t)$ folyamat vizsgálata

Mindenekelőtt azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy milyen feltételek mellett létezik $\eta^*(t)$ sztochasztikus folyamat. Erre vonatkozóan a következő tételt bizonyítjuk be:

5. TÉTEL: *Ha $G(x)$ nem rácsos eloszlás és átlaga ϑ véges, továbbá*

$$\int_0^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty |f(t,x)|\, dH(x) \right| dt < \infty, \tag{33}$$

úgy az $\eta^*(t)$ folyamat 1 *valószínűséggel létezik.*

BIZONYÍTÁS: t időponttól visszafelé haladva, az időtengelyt osszuk be h hosszúságú szakaszokra. Ekkor $\eta^*(t)$ úgy tekinthető, mint az egyes

$$(t-nh, t-(n-1)h) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

időszakaszokban bekövetkező események által létrehozott jelek t időpontban mért amplitudóinak összege. Jelölje az egyes szakaszok által szolgáltatott adalékokat rendre η_n $(n=1,2,\ldots)$ valószínűségi változó, úgy $\eta^*(t)=\eta_1+\eta_2+\cdots$ $\cdots+\eta_n+\cdots$. Arra nézve, hogy ez a sor 1 valószínűséggel konvergáljon, szükséges és elegendő a következő feltétel teljesülése:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} P\{|\eta_n+\cdots+\eta_{n+\nu}|<\varepsilon;\ \nu=1,2,\ldots,p\}=1. \tag{34}$$

Most bebizonyítjuk, hogy a tett feltevések mellett (34) fennáll és így $\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n$ sor 1 valószínűséggel konvergens. Nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$\begin{aligned} P\{|\eta_n+\cdots+\eta_{n+\nu}|<\varepsilon;\ \nu=1,2,\ldots,p\} &\geqq \\ P\{|\eta_n|+|\eta_{n+1}|+\cdots+|\eta_{n+p}|<\varepsilon\}. \end{aligned} \tag{35}$$

A jobboldalra MARKOV, pozitív valószínűségi változókra vonatkozó, ismert tételét alkalmazva, a következő becslést nyerjük:

$$P\{|\eta_n|+|\eta_{n+1}|+\cdots+|\eta_{n+p}|<\varepsilon\}\geqq 1-\frac{M\{|\eta_n|+|\eta_{n+1}|+\cdots+|\eta_{n+p}|\}}{\varepsilon}. \tag{36}$$

Most továbbá felírhatjuk, hogy

$$M\{|\eta_n|\}\leqq\frac{1}{\vartheta}\int_{(n-1)h}^{nh}\left|\int_{-\infty}^{\infty}|f(u,x)|\,dH(x)\right|du. \tag{37}$$

Ez a következőképpen látható be: Először is a $(t-nh, t-(n-1)h)$ intervallumban kezdődő jelek t időpontban felvett értékei összegének abszolút értékét nem csökkentjük, ha a tagok abszolút értékeinek összegét vesszük, azaz $|f(u,x)|$ időbeli lefolyású jelekkel számolunk. Másodszor a mondott feltételek mellett D. BLACKWELL [4] és J. L. DOOB [5] tétele szerint fennáll, hogy tetszőleges u hosszúságú intervallumban előforduló események várható száma u/ϑ. Most, (35), (36) és (37) szerint felírható, hogy

$$P\{|\eta_n+\eta_{n+1}+\cdots+\eta_{n+\nu}|<\varepsilon\,;\,\nu=1,2,\ldots,p\}\geqq \geqq 1-\frac{1}{\varepsilon\vartheta}\int_{(n-1)h}^{(n+p)h}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(u,x)|\,dH(x)\right]du. \tag{38}$$

Most ha $p\to\infty$, $n\to\infty$ és $\varepsilon\to 0$, úgy (38) jobboldala (33) véges voltára való tekintettel 1-hez tart és definíció szerint (38) baloldala: $P\{\ldots\}\leqq 1$, azaz (34) fennáll, amit bizonyítani kívántunk.

Ha az $\eta^*(t)$ folyamat létezik, úgy $P(\eta^*(t)\leqq x)=F^*(x)$ eloszlásfüggvény is létezik és erre nyilvánvalóan fennáll, hogy $F^*(x)=\lim\limits_{t\to\infty}F(t,x)$. Hasonlóan kaphatók meg $\eta^*(t)$ momentumai is $F(t,x)$ momentumainak határértékeként. Így kimondhatjuk, hogy olyan feltételek mellett, amelyekre (18) és (27) határérték fennáll, $\eta^*(t)$-nek létezik várható értéke és szórásnégyzete, éspedig

$$M=M\{\eta^*(t)\}=\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\infty}\lambda_1(t)\,dt, \tag{39}$$

$$D^2=D^2\{\eta^*(t)\}=\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\infty}[\lambda_2(t)+2\lambda_1(t)M(t)]\,dt-\left(\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\infty}\lambda_1(t)\,dt\right)^2, \tag{40}$$

továbbá, ha (31) létezik, úgy fennáll

$$M_k=M\{(\eta^*(t))^k\}=\frac{1}{\vartheta}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\int_0^{\infty}M_j(t)\lambda_{k-j}(t)\,dt. \tag{41}$$

Ezen formulák a fizikai irodalomban jól ismert N. CAMPBELL-féle formulák messzemenő általánosításai. N. CAMPBELL [6] és [7] munkáiban csupán az átlagot és a szórást adta meg speciális esetben. Eredményeit E. N. ROWLAND [8], A. JA. HINCSIN [9], S. O. RICE [10] és mások általánosították Poisson-folyamat által származtatott speciális folyamatokra. A mostani (41) formula ezen képleteket tovább általánosítja rekurrens folyamatok által származtatott másodlagos folyamatokra.

Ha (18) és (27) határértékek léteznek, úgy azt mondjuk, hogy az $\eta(t)$ folyamat $t\to\infty$ esetén egyensúlyi állapothoz közeledik és a határfolyamat, $\eta^*(t)$, tágabb értelemben stacionárius.

Most az $\eta^*(t)$ folyamat korrelációs függvényét kívánjuk meghatározni. Ezt a következőképpen definiáljuk:

$$R(\tau)=\frac{M\{\eta^*(t)\eta^*(t-\tau)\}-M^2}{D^2}. \tag{42}$$

6. TÉTEL: *Ha az* $\eta^*(t)$ *folyamat* D^2 *szórásnégyzete létezik, úgy minden* τ*-ra létezik az* $R(\tau)$ *korrelációs függvény, amelyre fennáll, hogy*

$$R(\tau)=\frac{1}{\vartheta D^2}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(t,x)f(t-\tau,x)\,dH(x)\right]dt+ \tag{43}$$

$$+\frac{1}{\vartheta D^2}\int_0^\infty[\lambda_1(t)M(t-\tau)+\lambda_1(t-\tau)M(t)]\,dt-\frac{M^2}{D^2}.$$

BIZONYÍTÁS: Vezessünk be egy új folyamatot a következőképpen: $\theta^*(t)=\eta^*(t)+\eta^*(t-\tau)$. Ez a folyamat csupán abban különbözik az $\eta^*(t)$ folyamattól, hogy egy jel időbeli lefolyását nem $f(u,x)$, hanem $g(u,x)=f(u,x)+f(u-\tau,x)$ írja le. Itt feltesszük, hogy $\tau>0$, bár meggondolásaink valamennyi τ értékre érvényesek, ugyanis $R(\tau)$ páros függvény. Most a valószínűségi változók összegére vonatkozó szórásnégyzet alapján felírhatjuk, hogy

$$D^2\{\theta^*(t)\}=D^2\{\eta^*(t)\}+D^2\{\eta^*(t-\tau)\}+2D\{\eta^*(t)\}D\{\eta^*(t-\tau)\}R(\tau), \tag{44}$$

azaz

$$D^2\{\theta^*(t)\}=2D^2[1+R(\tau)]. \tag{45}$$

Viszont $D^2\{\theta^*(t)\}$ a (40) formula alapján meghatározható, ha azt $f(u,x)$ helyett $g(u,x)=f(u,x)+f(u-\tau,x)$ alakú jelekre alkalmazzuk. Így végül (45) segítségével kiszámítható $R(\tau)$, amelyet (43) képlet állít elő.

MEGJEGYZÉS: Ha bevezetjük a következő függvényt:

$$\lambda_{11}(\tau)=\int_0^\infty\lambda_1(t)\lambda_1(t+\tau)\,dt, \tag{46}$$

amely τ-nak páros függvénye, úgy D^2 kiszámításánál sokszor célszerű a következő helyettesítést elvégezni:

$$\int_0^\infty\lambda_1(t)M(t)\,dt=\int_0^\infty\lambda_{11}(t)\,dm(t) \tag{47}$$

és $R(\tau)$ kiszámításánál pedig

$$\int_0^\infty[\lambda_1(t)M(t-\tau)+\lambda_1(t-\tau)M(t)]\,dt=\int_0^\infty[\lambda_{11}(t+\tau)+\lambda_{11}(t-\tau)]\,dm(t) \tag{48}$$

helyettesítéssel élni.

Megjegyezzük továbbá, hogy az $m(t)$ átlagfüggvény a következő Volterra-típusú integrálegyenlet segítségével is meghatározható:

$$m(t)=G(t)+\int_0^t m(t-x)\,dG(x), \tag{49}$$

amely például Laplace—Stieltjes transzformáció segítségével könnyen megoldható, ugyanis $\Re(s) > 0$-ra

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dm(t) = \frac{\varphi(s)}{1-\varphi(s)}, \tag{50}$$

ahol

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dG(x). \tag{51}$$

PÉLDA: Legyen

$$f(u,x) = \begin{cases} xe^{-\alpha u} & \text{ha } u \geqq 0, x \geqq 0 \\ 0 & \text{ha } u < 0 \text{ vagy } x < 0, \end{cases} \tag{52}$$

és $M\{\chi_n\} = \mu$, $D^2\{\chi_n\} = \sigma^2$, továbbá vezessük be a következő jelölést:

$$\beta = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dG(x), \tag{53}$$

úgy $\lambda_1(t) = \mu e^{-\alpha t}$, $\lambda_2(t) = (\sigma^2 + \mu^2) e^{-2\alpha t}$ és $\lambda_{11}(\tau) = \frac{\mu^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$. Ekkor

$$\int_0^\infty \lambda_{11}(t)\, dm(t) = \frac{\mu^2}{2\alpha} \frac{\beta}{1-\beta} \tag{54}$$

és (40) szerint

$$D^2 = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\alpha\vartheta} + \frac{\mu^2}{\alpha\vartheta}\frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\mu^2}{\alpha^2\vartheta^2}. \tag{55}$$

$R(\tau)$-ra pedig (43) alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} + \frac{\mu^2}{2\alpha\vartheta D^2}\Bigg[& e^{-\alpha|\tau|} \int_0^{|\tau|} e^{\alpha x}\, dm(x) + \\ & + e^{\alpha|\tau|} \int_{|\tau|}^\infty e^{-\alpha x}\, dm(x) - \frac{\beta e^{-\alpha|\tau|}}{1-\beta} - \frac{1-e^{-\alpha|\tau|}}{\alpha\vartheta}\Bigg]. \end{aligned} \tag{56}$$

Itt most $R(\tau)$ függ $m(t)$ speciális alakjától. Ha az alapul vett folyamat Poisson-féle, azaz $m(t) = t/\vartheta$, úgy

$$R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \tag{57}$$

függetlenül a $H(x)$ eloszlásfüggvény speciális alakjától.

Ha az $\eta^*(t)$ folyamat $R(\tau)$ korrelációs függvénye ismeretes, úgy az $F(\omega)$ spektrális eloszlásfüggvénye is meghatározható A. JA. HINCSIN [3] tétele alapján, amely szerint fennáll:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^\infty \cos\omega\tau\, dF(\omega). \tag{58}$$

Ha speciálisan $R(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$, úgy

$$F'(\omega)=\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}. \tag{59}$$

Az $F(\omega)$ spektrális eloszlásfüggvény fizikai jelentéséről még szólnunk kell néhány szót. Ezt legjobban a következő példán szemléltethetjük. Ha $\eta^*(t)$-t áramnak tekintjük és egységnyi ellenálláson vezetjük keresztül, úgy a leadott átlagteljesítmény

$$\lim_{T\to\infty} M\left\{\frac{1}{T}\int_0^T(\eta^*(t))^2\,dt\right\}=M^2+D^2 \tag{60}$$

és ennek a $(0,\omega)$ frekvenciasávra eső része $M^2+D^2[F(\omega)-F(-\omega)]$. (Itt ω körfrekvenciát jelent, azaz $\omega=2\pi f$, ahol f a közönséges frekvenciát jelöli.)

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] TAKÁCS L., Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásairól. *MTA III. Oszt. Közl.*, 4 (1954), 473—504.

[2] TAKÁCS L., Bizonyos fizikai regisztráló berendezésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról. *MTA III. Oszt. Közl.*, **4** (1954), 571—587.

[3] A. KHINTCHINE, Korrelationstheorie der stationär stochastischen Prozesse. *Math. Annalen* **109** (1934), 604—610.

[4] D. BLACKWELL, A renewall theorem. *Duke Math. Journ.* **15** (1948), 145—151.

[5] J. L. DOOB, Renewal theory from the point of view of the theory of probability. *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948), 422—438.

[6] N. CAMPBELL, The study of discontinuous phenomena. *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.* **15** (1909), 117—137.

[7] N. CAMPBELL, Discontinuities in light emission. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **15** (1909), 310—328.

[8] E. N. ROWLAND, The theory of the mean square variation of a function formed by adding known functions with random phases, and applications to the theories of the shot effect and of light. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **32** (1936), 580—597.

[9] A. KHINTCHINE, Theorie des abklingenden Spontaneffektes. *Bull. Acad. Sci. URSS Ser. Math.* 3 (1938), 312—323; *Zentralblatt für Math.*, **19** (1939), 224.

[10] S. O. RICE, Mathematical Analysis of Random Noise. *Bell. System Technical Journal*, **23** (1944), 282—332; 24 (1945), 45—156.

VIZSGÁLATOK A $_5B(\alpha, n)_7N$ ATOMMAGÁTALAKULÁSOK GERJESZTÉSI FÜGGVÉNYÉRE VONATKOZÓAN

NAGY JÁNOS

Bemutatta Szalay Sándor lev. tag az 1954. november 26-án tartott felolvasó ülésen

A bór elem — mint ismeretes — két izotóp keveréke (B^{10} 19,8%) (B^{11} 80,2%) így a Po α-sugarai hatására kétféle olyan magátalakulás következhet be rajta, amely neutron emisszióhoz vezet.

$$\text{I.}\quad {}_5B^{10} + {}_2He^4 = {}_7N^{13} + n^1 \quad \text{és} \quad Q \approx +1{,}2\,\text{MeV}$$

$$\text{II.}\quad {}_5B^{11} + {}_2He^4 = {}_7N^{14} + n^1 \quad \text{illetve} \quad Q \approx +0{,}28\,\text{MeV}.$$

A fenti magátalakulások exotermek, létrejöttük kísérletileg is igazolt. A I. magátalakulás instabil izotóphoz vezet. A keletkező N^{13} atommag pozitron sugárzással (11 min. felezési idővel) szénatommá alakul. Az N^{14} a természetben fellelhető stabil izotóp. Fenti magátalakulásokat, valamint a

$$\text{III.}\quad {}_5B^{10} + {}_2He^4 = {}_6C^{13} + p \quad \text{és}$$

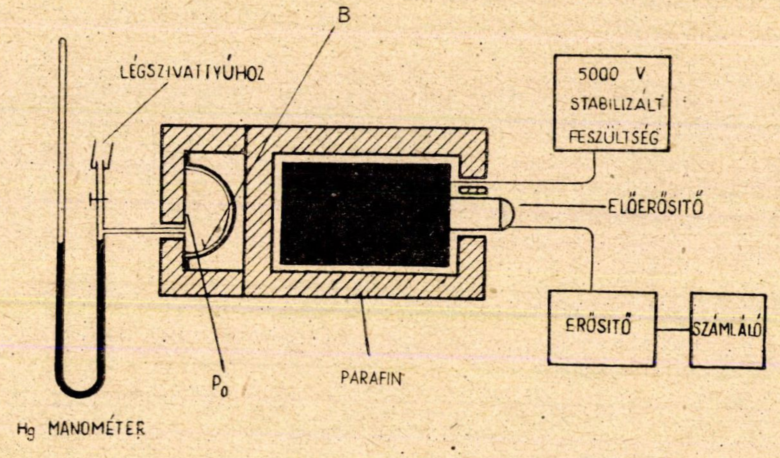
$$\text{IV.}\quad {}_5B^{11} + {}_2He^4 = {}_6C^{14} + p$$

energetikailag szintén lehetséges magfolyamatokat γ-sugárzás is kíséri. A debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében történtek vizsgálatok a fenti magátalakulásokat kísérő γ-sugárzás [1], [2], valamint az N^{13} atommagok pozitron gerjesztési görbéjének felvételével a I.-re vonatkozóan [3], [4]. (A IV. szerint keletkező C^{14} mesterséges radioaktív izotóp β-sugárzással bomlik, azonban felezési ideje 10^3 év nagyságrendű lévén utóbbi mérést nem zavarja.) Fenti mérések kiegészítésére indokoltnak látszott a I. és II. szerinti magfolyamatok α-neutron gerjesztési függvényének felvétele.

Mérőberendezés

Az α-sugár forrásul felhasznált Po készítmény 3 mm átmérőjű platina-irridium korongon volt. Erőssége a mérési idő közepére számítva 3,2 mC volt. Ez a már megelőzőkben közölt, gerjesztési függvényekre vonatkozó méréseknek megfelelően [5], [6] egy 50 mm sugarú vörösréz félgömb centrumában foglalt helyet. A légmentesen záró besugárzó edény belső falát amorf bór porral (Merck gyártmányú) a lehetőség szerint egyenletesen vontuk be kis mennyiségű kötőanyag felhasználásával. A felvitt réteg közepesen számítva háromszor vastagabb volt, mint amennyi a Po teljes energiájú α-részeinek a bórban mért hatótávolsága. (A bevonáshoz 2,6 gr bórt használva fel.)

Az 1. ábra szerinti mérőberendezéssel lehetséges volt az α-sugarak energiáját a félgömbbe engedett N_2 gáz nyomásával szabályozni. Erre a célra a nitrogén gáz felel meg a legjobban, mert közismerten alacsony az (α, n) magátalakulási hatásfoka, másrészt sem a Po-mal, sem a bórral nem lép kémiai reakcióba. A I. és II. magfolyamatoknak megfelelően kilépő neutro-



1. ábra. A neutronszámláló és besugárzó edény.

nokat egy a félgömb középpontjától 13 cm-re levő és már megelőzőkben leközölt 310 mm Hg nyomású BCl_3 gőzzel töltött lassú neutron számláló mérte a csatlakozó RC-erősítő, illetve thyratronos számláló fokozat segítségével.

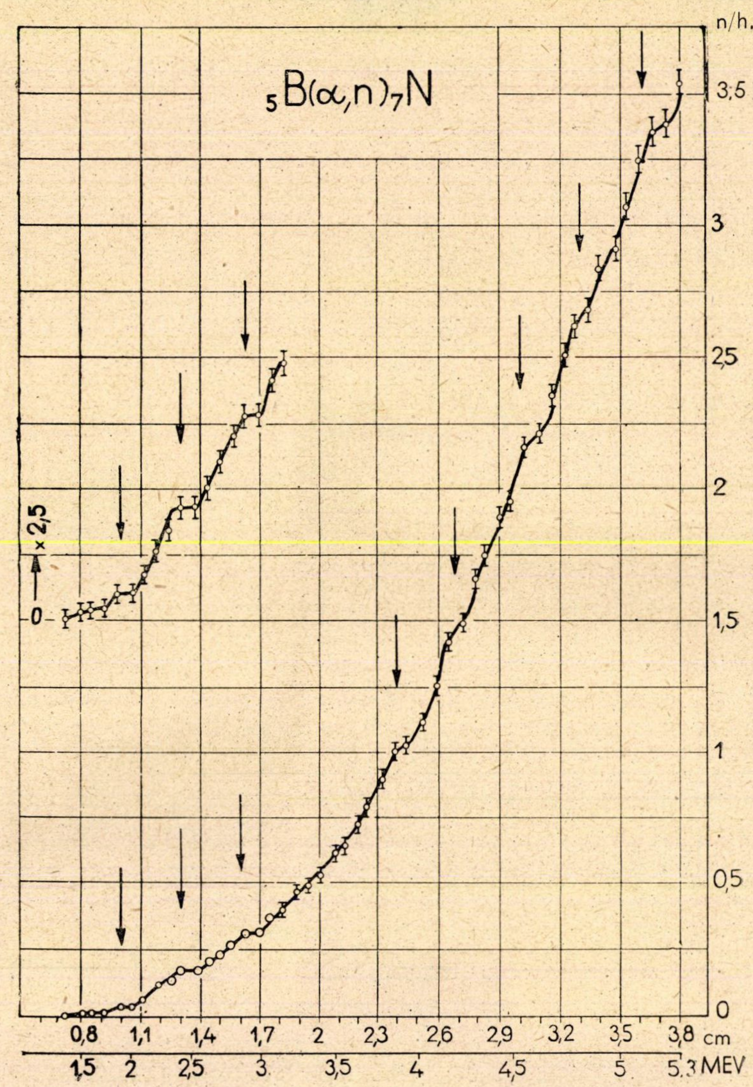
Mérési eredmények

A készülék természetes effektusa több órás mérésből 148 $\pm$ 3-rész/óra volt a neutronok lelassítását szolgáló paraffin hengerben. Ez az effektus részben a henger falába zárt radioaktív szennyezéstől, másrészt a kozmikus sugárzás által keltett neutronoktól származik.

A kapott integrális gerjesztési görbét (vastag bór rétegen történt a mérés) a 2. ábra mutatja. Ezen a függőleges tengelyen az óránként a természetes effektus felett mért neutronok száma (10^3 egységekben), a vízszintesen a bombázó α-részek energiája MeV-okban, illetve a maradék hatótávolsága 15°C-ú 760 hg mm nyomású levegőre vonatkoztatva van feltüntetve, a nitrogén gáz fékezőképességét a levegő 0,99-szorosának számítva.

A méréspontok egyenként átlag 5 órás mérési eredmények középértékei. Összesen közel 5×10^5 neutront számolt le a készülék a gerjesztési görbe felvételéhez. Az egyes méréspontok a nitrogén gáz nyomásának 10 Hg mm értékű változtatása mellett kb. 0,6 mm hatótávolság változtatást tettek lehetővé a bombázó α-sugarakra nézve.

A gerjesztési görbéből látható, hogy a neutron sugárzás 0,8 cm α-hatótávolságnál ($\sim$ 1,5 MeV) indul és a kezdetét illetően jó megegyezésben van az alábbiakban idézett szerzők adataival, valamint hogy a mérési tartományban többé-kevésbé határozottan kiugró rezonancia helyeket mutat. Kifeje-



2. ábra. A mért atommagátalakulások gerjesztési függvénye. (Első szakaszát 2,5-szeresen nagyítva is feltüntettük.)

zettebb rezonancia helyek 1,32 cm, 1,64 cm és 3,04, 3,3, 3,6 cm α-hatótávolságnál vannak, de elég jól kiértékelhető rezonancia helyek 1 cm, 2,4 cm és 2,67 cm-nél is láthatók. Egyébként maximális α-energiáknál értve a mérendő effektus és a természetes effektus viszonya közel 25-szörös volt, ami a gerjesztési görbe viszonylag pontos felvételét tette lehetővé, külön kiemelve a gyakorlatilag pontszerűnek tekinthető, kis méretű Po-preparátum alkalmazásával járó előnyös geometriai viszonyokat.

A mérés tárgyát képező gerjesztési függvényt már több szerző megelőzőkben mérte. W. MAURER [7], valamint E. FÜNFER [8] által BCl_3 ionizációs kamrával felvett gerjesztési görbék is több rezonancia helyet mutatnak. Az általuk talált rezonancia helyekre vonatkozó mérési adatokat tüntettük fel az alábbi táblázatban jelen méréssel való összehasonlítás céljából. Az 1, 2, valamint 3 pontok alatt idézett mérések α-hatótávolság adatait M. G. HOLLOWAY és M. S. LIVINGSTON [13] újabb mérési eredményei alapján korrigáltuk MeV-ra. Annak ellenére, hogy említett szerzők viszonylag nagyobb méretű Po-forrást (8 mm átmérőjű) használtak egy nagyságrenddel nagyobb kezdeti erősség mellett, a gerjesztési görbe kezdetét illetően és a legtöbb rezonancia helyre nézve jó egyezés állapítható meg jelen mérés adataival. W. MAURER annak eldöntésére, hogy a közbülső (N^{14}), illetve (N^{15}) atommagok közül melyikhez tartoznak a talált rezonancia helyek, felhasználta E. WILHELMY [9] által mért a II.-hez fordított magátalakulást: ${}_7N^{14} + {}_0n^1 = ({}_7N^{15}) \rightarrow {}_2He^4 + {}_5B^{11}$; itt és a II. szerinti magátalakulásban a közbenső atommag azonos. Mellékelt táblázatban megjelöltük, hogy szerinte melyik rezonancia hely tartozik a B^{10}, illetve B^{11}-en végbement magfolyamathoz. A táblázatban feltüntettük SZALAY S. már idézett dolgozatából [3], [4] a

$${}_5B^{10}(\alpha, n)\,{}_7N^{13}$$

szerinti magátalakulásához tartozó rezonancia helyeket (amit a pozitron sugarak gerjesztési görbéjének felvételével mért). A két mérés adataiból SZALAY S. idézett dolgozatában egyértelműen eldöntötte, hogy a W. MAURER által talált 3,03 cm α-hatótávolságnál mutatkozó magrezonancia valóban a B^{10}-en történő magátalakuláshoz tartozik. Jelen mérésben ezt a rezonancia helyet 3,04 cm α-hatótávolságnál találtuk. Az is eldönthető volt, hogy az 1,82 cm α-hatótávolságnál W. MAURER által talált rezonancia hely a ${}_5B^{11}(\alpha, n)\,{}_7N^{11}$ magfolyamathoz tartozhat. Jelen mérés ezen a helyen nem mutat rezonanciát. SZALAY S. azt is megállapította, hogy a fent említett esetben az egyetlen B^{10}-hez tartozó rezonancia hely kivételével az összes észlelt rezonancia hely a II. szerinti magfolyamathoz tartozhat. Ezek a megállapítások jelen mérésben talált és megfelelő rezonancia helyekre is vonatkoznak. (Így a B^{10}-en létrejött magfolyamathoz tartoznak az 1,64, 2,4 és 3,04 cm α-hatótávolságnál talált rezonancia helyek.)

Ugyancsak SZALAY S. [1], [2] vizsgálatai szerint a bór elemen a Po α-sugarai hatására létrejövő magátalakulásokat kisérő γ-sugárzás részben I.-II.-höz, de nagyrésze valószínűleg a III. szerinti magfolyamathoz tartozik, bár a γ-gerjesztési függvény jelen méréssel jól megegyező helyeken is mutat, rezonanciákat (pl. 3,3 cm, 3 cm α-hatótávolságnál) és a megadott hatásfok

($4 \cdot 10^{-6}$ γ pro α-rész) nagyságrendi egyezést mutat a neutron sugárzás jelen mérésben talált hatásfokával, viszont H. MILLER, W. E. DUNCANSON és A. N. MAY [14] a proton gerjesztési függvényre vonatkozó vékony rétegen végzett vizsgálatai egyetlen rezonancia helyet mutatnak 2,8 cm α-hatótávolságnál (4,3 MeV). Fentiekből következtetjük, hogy a γ-sugárzásban feltétlenül része van a neutron sugárzáshoz vezető magátalakulásoknak.

A táblázat 4-ik oszlopában tüntettük fel R. L. WALKER [10] mérési adatait a fenti I.-II. magátalakuláshoz tartozó rezonancia helyeket illetően. Utóbbi szerző igen erős Po (1,55 C) felhasználásával felpárologtatott vékony bór rétegen mért. Ilyen módon differenciális gerjesztési görbét tudott felvenni egy grafit oszlopban elhelyezett BF_3 töltésű proporcionális neutron-számlálóval. Meghatározta a táblázatban megadott rezonancia helyeken kívül a I.-II. magátalakulások abszolút hatásfokát is, amely 19 neutron/10^6 α-résznek adódott. Viszont J. H. ROBERTS [11], E. SEGRE és C. WIEGAND [12] mérései szerint a fenti adat 22, illetve 19 neutron/10^6 α-résznek adódott.

Jelen mérés talált rezonancia helyei viszonylag jól megfelelnek R. L. WALKER adatainak. (Kivételt képez 2,4 cm α-hatótávolságnál talált és a mérési értékek közül nem különösen szignifikánsan kiugró rezonancia hely.) Utóbbi szerző a nitrogén fékezőképességét jelen méréssel megegyezően a levegő 0,99-szeresének vette.

A mérőberendezés számolási hatásfokának (0,62%) ismeretében [5], [6] lehetővé vált a mért magátalakulás abszolút hatásfokának meghatározása is. Ez a mérőberendezés feloldó idejének tekintetbe vételével $2{,}9 \times 10^{-6}$ neutron/α-rész abszolút hatásfokot eredményez a mért magfolyamatra teljes α-energiákat értve. Az idézett irodalomból ismert érték [10], [11] ennek közel 6,5-szerese. Ezt az eltérést a következő tényezők okozhatták:

a) A méréshez 1 évnél idősebb Polónium állt rendelkezésre.

b) A Po erősségének meghatározása a korábbi mérési adatokból számítással történt.

c) A mérőberendezés mérési hatásfokának meghatározásakor és a jelenlegi mérésben fellépő neutronok energiakülönbsége.

d) A bór réteggel esetleg felvitt szennyeződés és annak esetleges inhomogén vastagsága.

A rezonancia helyek viszonylagos eltolódása, kismértékű elmosódása is megokolható a Po-ra vonatkozóan a fentebb mondottakkal.

* * *

Fenti méréseimet a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében végeztem. Ez úton is köszönetet mondok az intézet igazgatójának dr. SZALAY SÁNDOR egyetemi tanár, Kossuth-díjas lev. tagnak támogatásáért és érdeklődéséért, valamint a rendelkezésemre bocsátott Po-preparátumért.

TÁBLÁZAT

1.		2.	3.		4.	5.	
W. MAURER [7]		E. FÜNFER [8]	SZALAY S. [3], [4] $B^{10}(\alpha, n)N^{13}$		R. L. WALKER [10]	Jelen mérés	
cm	MeV	Mev	cm	Mev	MeV	cm	MeV
1,0	1,9 B^{11}				1,8	1,0	1,9
					2,5	1,32	2,45
1,47	2,68 B^{11}	2,65	1,45	2,61			
			1,70	3,00		1,64	2,92 B^{10}
1,82	3,15 B^{10}	3,25					
			2,03	3,43			
2,15	3,59 B^{11}	3,60					
			2,23	3,69			
			2,55	4,05		2,4	3,90 B^{10}
2,75	4,26 B^{11}	4,10			4,2	2,67	4,18
			2,81	4,33			
3,03	4,55 B^{10}	4,45	3,06	4,58		3,04	4,56 B^{10}
3,33	4,85 B^{11}	4,73				3,3	4,82
			3,41	4,94			
3,51	5,02 B^{11}	5,08			4,9	3,6	5,08
			3,71	5,21			

A táblázatban az 1, 2, 3 pontok alatt feltüntetett értékeket a [13] alatt jelzett irodalomban megadott hatótávolság energia összefüggéseknek megfelelően korrigáltuk. (A 4, 5 alatt jelzettekkel egységesen.)

Kossuth Lajos Tudományegyetem
Kisérleti Fizikai Intézete.

IRODALOM

[1] SZALAY S., Mat. és Term. Tud. Értesítő, 1941. IX. 129.
[2] A. SZALAY u. J. ZIMONYI, Zs. f. Phys, 115, 639, 1940.
[3] A. SZALAY, Zs. f. Phys., 112, 29, 1938.
[4] SZALAY S., Mat. és Term. Tud. Értesítő, 1939. LVIII. 313.
[5] NAGY J., Fizikai Szemle, 1952. 4—5—6.
[6] J. NAGY, Acta Physica, III. 15, 1953.
[7] W. MAURER, Zs. f. Phys., 107, 721, 1937.
[8] E. FÜNFER, Ann. d. Phys. 35, 147, 1939.
[9] E. WILHELMY, Zs. f. Phys., 107, 769, 1937.
[10] R. L. WALKER, Phys. Rev., 76, 244, 1949.
[11] J. H. ROBERTS, Manhattan Project Report MDDC—731 (1944).
[12] E. SEGRÉ and C. WIEGAND, Manhattan Project Report MDDC—185 (1944).
[13] M. G. HOLLOWAY and M. S. LIVINGSTON, Phys. Rev., 54, 18 (1938).
[14] H. MILLER—W. E. DUNCANSON—A. N. MAY, Proc. Cambr. Phil. Soc. XXX—IV. (1934.)

KÖRSZERŰ TARTOMÁNYOK KONFORM LEKÉPEZÉSÉRŐL

KŐVÁRI TAMÁS

1. FRÈCHET-től származik két görbe eltérésének következő definíciója: legyen C_1, C_2 két zárt Jordan görbe, és $Q = \varphi(P)$ a C_1-nek, a C_2-re való kölcsönösen egyértelmű, folytonos leképezése. Legyen d_φ a $\varphi(P)$ és P pontok távolságának maximuma, ha P befutja a C_1 görbét. Tekintsük az összes fenti tulajdonságú $\varphi(P)$ leképezéseket. Ekkor a

$$d(C_1, C_2) = \inf d_\varphi$$

számot a C_1 és C_2 görbék „eltérésé"-nek nevezzük.

Legyen $z^* = g_n(z)$ a C_1 görbe belsejét a $C_2^{(n)}$ görbe belsejére konform leképező analitikus függvény, amely egy belső pontot és egy azon átmenő irányt fixen hagy. Minthogy nyilvánvalóan

$$d(C_1, C_2^{(n)}) \leqq \max_{z \in C_1} |g_n(z) - z|$$

tehát ahhoz, hogy $g_n(z)$ a C_1 görbe által határolt, zárt tartományban egyenletesen konvergáljon z-hez, szükséges, hogy

$$\lim_{n=\infty} d(C_1, C_2^{(n)}) = 0$$

legyen. RADÓ kimutatta (Acta litterarum ac stientiarum, Szeged 1.), hogy az előbbi feltétel egyúttal elégséges is.

A jelen cikkben azt vizsgáljuk, hogyan lehet pontos becsléssé élesíteni Radó tételét, ha feltesszük, hogy a C_1 görbe analitikus. A következő tételt fogjuk bizonyítani:

I. TÉTEL. *Legyen C_1 egy zárt analitikus görbe, C_2 egy hozzá — Frèchet-féle értelemben — közeli zárt Jordan görbe. Legyen a két görbe Frèchet-féle eltérése:*

$$d(C_1, C_2) = \varepsilon.$$

Legyen $z^* = g(z)$ a C_1 görbe belsejét a C_2 görbe belsejére konform leképező analitikus függvény, amely egy belső z_0 pontot, s egy azon átmenő irányt fixen tart. Ekkor

$$|g(z) - z| < A\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}, \tag{*}$$

ahol A csak a C_1 görbétől függő állandó. Ez a becslés nem javítható, tehát $\log \frac{1}{\varepsilon}$ nem helyettesíthető $\frac{1}{\varepsilon}$ semmilyen lassabban növekvő függvényével.

A I. tétel általánosítja L. BIEBERBACH* és S. E. WARSHAWSKI** idevágó eredményeit, bár az utóbbi eredményeit nem tartalmazza. Mindketten ugyanis a C_2 görbére további erős megszorításokat tesznek, amelyek, mint a I. tétel mutatja, nem szükségesek ahhoz, hogy $g(z)-z$ kicsi legyen.

2. Először, szemléletesség kedvéért a következő gyengébb tételt bizonyítjuk:

II. TÉTEL. *Legyen C_1 egy az origóra csillagszerű, zárt Jordan görbe, amely az*

$$1-\varepsilon<|z|<1+\varepsilon$$

körgyűrűben fekszik. Legyen $z=f(\zeta)$ a $|\zeta|<1$-et a C belsejére konform leképező függvény, amely az

$$f(0)=0; \quad f'(0)>0$$

módon van normálva. Ekkor $|\zeta|\leqq 1$-ben, ha ε elég kicsi

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}-1\right|<13\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Az eredmény pontos, az állandótól eltekintve, nem javítható.

BIZONYÍTÁS. Minthogy C Jordan görbe, ismert tétel alapján $f(\zeta)$ (illetve inverze) folytonos a $|\zeta|\leqq 1$-ben (illetve a C által határolt zárt tartományban). A feltevés alapján $|\zeta|=1$-en:

$$1-\varepsilon<\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|<1+\varepsilon.$$

RIESZ M. ismert tétele alapján, ha $u+iv$ a $|\zeta|\leqq 1$-ben reguláris, és $u(0)=0$,

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}u^p d\varphi\right\}^{\frac{1}{p}}\leqq 2p\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}v^p d\varphi\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

A tételt alkalmazzuk $i\log\frac{f(\zeta)}{\zeta}$ azon $|\zeta|\leqq 1$-ben egyértékű, reguláris ágára, amelyre $\log\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|_{\zeta=0}=\log f'(0)$ valós ($f(\zeta)$ schlichtsége miatt ugyanis $\frac{f(\zeta)}{\zeta}$-nak $|\zeta|\leqq 1$-ben nincs zérushelye). Ekkor nyerjük, hogy

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\left(\arg\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right)^{2n}d\varphi\right\}^{\frac{1}{2n}}\leqq 4n\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\log^{2n}|f(\zeta)|\,d\varphi\right\}^{\frac{1}{2n}}.$$

* „Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche" *Sitzungsberichte der Preussischen Akadémie der Wissenschaften*, 1924. A cikk egyébként — egy hibás példára támaszkodva — azt a téves állítást is tartalmazza, hogy a (*) formula jobboldalán nem állhat ε-nak $^1/_2$-nél magasabb hatványa.

** On conformal mapping nearly circular region. *Proceedings of American Mathematical Society* 1950.

Tehát $\arg f(e^{i\varphi}) = \vartheta(\varphi)$; $\psi(\varphi) = \vartheta(\varphi) - \varphi$ jelöléssel, figyelembe véve, hogy $\varepsilon < \varepsilon_0$-ra

$$-\frac{5}{4}\varepsilon < \log(1-\varepsilon) < \log|f(\zeta)| < \log(1+\varepsilon) < \varepsilon$$

fennáll a

I. LEMMA:

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\psi^{2n}(\varphi)\,d\varphi\right\}^{\frac{1}{2n}} \leqq 5n\varepsilon.$$

Minthogy a csillagszerűség miatt $\varphi_2 > \varphi_1$ esetén $\vartheta(\varphi_2) \geqq \vartheta(\varphi_1)$, innen adódik a

II. LEMMA: $\varphi_1 < \varphi_2$ esetén

$$\psi(\varphi_2) - \psi(\varphi_1) \geqq -(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Végül fennáll a

III. LEMMA:

$$|\psi| < 12\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Érje el ugyanis $|\psi|$ a φ_0 pontban maximumát. Legyen $\psi(\varphi_0) = \delta > 0$ (a $\psi(\varphi_0) < 0$ eset hasonló módon tárgyalható.) A II. lemma alapján

$$\psi(\varphi_0 + t) > \psi(\varphi_0) - t = \delta - t.$$

Tehát

$$\int\limits_0^{2\pi}\psi^{2n}d\varphi > \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+\delta}\psi^{2n}d\varphi > \int\limits_0^{\delta}(\delta - t)^{2n}dt = \frac{\delta^{2n+1}}{2n+1}.$$

Tehát a I. lemma alapján

$$\frac{1}{2\pi(2n+1)}\delta^{2n+1} \leqq (5n\varepsilon)^{2n}$$

$$\delta = \max|\psi| \leqq \sqrt[2n+1]{2\pi(2n+1)}\,5n\cdot\varepsilon^{1-\frac{1}{2n+1}} < 6n\varepsilon^{1-\frac{1}{2n+1}}$$

ha $n > n_0$. Legyen $n = \left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Ekkor $\varepsilon < \varepsilon_0$-*ra*

$$\max|\psi| < 7\log\frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\cdot e^{\log\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{2\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]+3}} < 7\sqrt{e}\,\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon} < 12\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon},$$

amivel a III. lemmát igazoltuk.

A III. lemmából azonnal adódik a tételünk, hiszen $|\zeta| = 1$-en

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta} - 1\right| = \left||f(e^{i\varphi})|e^{i\psi} - 1\right| < \varepsilon + |\psi| < 13\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}$$

és $|\zeta| \leqq 1$-re ugyanez, a maximum elvből adódik.

Hogy a II. tétel (és vele a I. tétel) nem javítható, azt a következő egyszerű példa mutatja:

$$f(\zeta)=\zeta\left\{1+\frac{\varepsilon i}{2}\log\frac{1}{1+\varepsilon-\zeta}\right\},$$

ahol a logaritmus azon ágáról van szó, amely $0<\zeta<1$-re valós. Ugyanis $|\zeta|\leqq 1$-ben

$$\operatorname{Re}\left(\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)=\operatorname{Re}\left\{\frac{\varepsilon i}{2}\frac{\zeta}{1+\varepsilon-\zeta}\frac{1}{1+\frac{\varepsilon i}{2}\log\frac{1}{1+\varepsilon-\zeta}}\right\}\geqq$$

$$\geqq 1-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\pi}{4}\right)}>0$$

miatt a $|\zeta|=1$ képe csillagszerű, és ezért $f(\zeta)$ a $|\zeta|\leqq 1$-ben schlicht. Továbbá $|\zeta|=1$-re:

$$|f(\zeta)|^2=\left|1+\frac{\varepsilon i}{2}\log\frac{1}{1+\varepsilon-\zeta}\right|^2=\left\{1+\frac{\varepsilon}{2}\arg(1+\varepsilon-\zeta)\right\}^2+\frac{\varepsilon^2}{4}\log^2\frac{1}{(1+\varepsilon-\zeta)}=$$

$$=1+\varepsilon\arg(1+\varepsilon-\zeta)+\frac{\varepsilon^2}{4}\left\{\arg^2(1+\varepsilon-\zeta)+\log^2\frac{1}{(1+\varepsilon-\zeta)}\right\}$$

$$\bigl||f(\zeta)|-1\bigr|\leqq\bigl||f(\zeta)|^2-1\bigr|\leqq\varepsilon\frac{\pi}{4}+\frac{\varepsilon^2}{4}\left\{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\log^2\frac{1}{\varepsilon}\right\}<\varepsilon,\ \text{ha } \varepsilon<\varepsilon_0.$$

Másrészt

$$|f(1)-1|=\frac{\varepsilon}{2}\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Most rátérünk a I. tétel azon speciális esetének bizonyítására, amikor a C_1 görbe kör. Ugyanis az általános eset erre redukálható.

III. TÉTEL: *Legyen K az egységkör, C egy hozzá — Frèchet-féle értelemben — közeli zárt Jordan görbe. Legyen*

$$d(K,C)=\varepsilon.$$

Legyen $z=f(\zeta)$ a II. tételben definiált függvény. Ekkor a II. tétel állítása változatlanul érvényes.

A feltevés alapján egyfelől a K egységkör pontjai $(K: z=e^{i\theta})$, másfelől a C pontjai között megadható egy olyan

$$z=e^{i\theta}\rightarrow z(\theta)\in C$$

kölcsönösen egyértelmű, folytonos megfeleltetés, hogy a megfelelő pontok távolságai kisebbek 1,01 ε-nál, azaz

$$|z(\theta)-e^{i\theta}|<1{,}01\,\varepsilon.$$

A bizonyítás teljesen hasonlóan fut a II. tételéhez, csupán a II. lemmát kell a gyengített feltételeknek megfelelően a következővel helyettesíteni:

II.* LEMMA: $\varphi_1 < \varphi_2$-re

$$\psi(\varphi_2)-\psi(\varphi_1) > -(\varphi_2-\varphi_1)-9\varepsilon.$$

Legyen ugyanis $z_1 = e^{i\theta_1}$ ill. $z_2 = e^{i\theta_2}$ a $z_1 = f(e^{i\varphi_1}) = r_1 e^{i\vartheta_1}$, ill. $z_2 = f(e^{i\varphi_2}) = r_2 e^{i\vartheta_2}$-nek megfelelő pontok ($z_1 = z(\theta_1)$, $z_2 = z(\theta_2)$). A megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű és folytonos, tehát monoton és így $\theta_2 > \theta_1$. Másrészt

$$\underline{z}_1 - z_1 = e^{i\theta_1} - r_1 e^{i\vartheta_1} = (e^{i\theta_1} - e^{i\vartheta_1}) + e^{i\vartheta_1}(1-r_1),$$

ahonnan

$$|\theta_1 - \vartheta_1| < 2|e^{i\theta_1} - e^{i\vartheta_1}| < 2|\underline{z}_1 - z_1| + 2|1-\pi_1| < 4{,}04\,\varepsilon.$$

Ugyanígy

$$|\theta_2 - \vartheta_2| < 4{,}04\,\varepsilon.$$

Tehát valóban

$$\psi(\varphi_2)-\psi(\varphi_1) = \vartheta_2 - \varphi_2 - \vartheta_1 + \varphi_1 > (\theta_2 - 4{,}1\,\varepsilon) - (\theta_1 + 4{,}1\,\varepsilon) - (\varphi_2 - \varphi_1) >$$
$$> -(\varphi_2-\varphi_1) - 9\varepsilon.$$

A III. lemma ebből nehézség nélkül nyerhető, hiszen a levezetésében csupán annyi változik, hogy δ helyébe $\delta - 9\varepsilon$ lép.

3. Most már aránylag egyszerűen bizonyíthatjuk a I. tételt. Legyen a C_1, illetve C_2 görbe paraméteres egyenlete: $z(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1, z(0) = z(1))$, illetve $\bar{z}(t)$. A feltevés alapján a két görbe pontjai között megadható egy olyan kölcsönösen egyértelmű, folytonos megfeleltetés, hogy a megfelelő pontok távolságai kisebbek 1,01 ε-nál. A paraméter megválasztható úgy, hogy a megfelelő pontok azonos paraméter értékhez tartozzanak. Legyen $z = f(\zeta)$; $\bar{z} = \bar{f}(\zeta)$ a $|\zeta| < 1$-et a C_1, illetve C_2 belsejére konform leképező függvények, amelyek az

$$f(0) = z_0, \quad f'(0) > 0$$
$$\bar{f}(0) = z_0, \quad \bar{f}'(0) > 0$$

módon vannak normálva.

Minthogy C_1 analitikus, $z = f(\zeta)$ analitikusan folytatható az egységkörön keresztül. $f'(\zeta)$-nak sem $|\zeta| < 1$-ben nem lehet gyöke, mert itt $f(\zeta)$ schlicht, sem a $|\zeta| = 1$-en, mert ennek C_1 képe analitikus. Tehát van egy olyan $|\zeta| \leqq 1 + \eta$ zárt körlemez $(\eta > 0)$, amelyben $f'(\zeta) \neq 0$ és így

$$0 < m \leqq |f'(\zeta)| \leqq M.$$

Ha ε elég kicsi, C_2 teljesen benne fekszik az $f((1+\eta)e^{i\varphi})$ görbe által határolt tartományban. Legyen

$$\zeta(t) = f^{-1}(z(t)), \ (|\zeta(t)| = 1); \quad \text{és} \quad \bar{\Gamma}\ a: \bar{\zeta}(t) = f^{-1}(\bar{z}(t))$$

görbe. Ekkor

$$|\bar{\zeta}(t) - \zeta(t)| \leqq |\bar{z}(t) - z(t)| \max \left| \frac{d}{dz} f^{-1}(z) \right| \leqq 1{,}01 \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon_1.$$

Tehát a III. tételt a $C = \bar{\Gamma}$ görbére alkalmazva:

$$|f^{-1}(\bar{f}(\zeta)) - \zeta| < 14 \frac{\varepsilon}{m} \log \frac{m}{1{,}01\,\varepsilon} < 15 \frac{\varepsilon}{m} \log \frac{1}{\varepsilon},$$

ha $\varepsilon < \varepsilon_0$, és $|\zeta| < 1$

$$|\bar{f}(\zeta) - f(\zeta)| < \max |f'(\zeta)| f^{-1}(\bar{f}(\zeta)) - \zeta| < 15 \frac{M}{m} \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$$

$\zeta = f^{-1}(z)$-t helyettesítve és figyelembe véve, hogy $\bar{f}(f^{-1}(z)) = g(z)$, nyerjük, hogy a C görbe belsejében:

$$|g(z) - z| < 15 \frac{M}{m} \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{ha } \varepsilon < \varepsilon_0$$

amivel a I. tételt bebizonyítottuk.

4. A I. tételt kiegészítik a következő tételek:

IV. TÉTEL: *A I. tétel érvényben marad, ha C_1-től csak a símaságot követeljük meg, viszont C_2-ről feltesszük, hogy a C_1 belsejében van.*

V. TÉTEL: *Ha a IV. tételben C_1-ről csak szakaszonként símaságot tételezünk fel, akkor is állítható, hogy*

$$|g(z) - z| < B\varepsilon^{\delta},$$

ahol B és $\delta > 0$ csak a C_1-től függő állandók. Ez utóbbi két tétel bizonyítása elég természetes, ezért nem részletezzük.

MATEMATIKA

A Nagy Szovjet Enciklopédia cikke

TARTALOM

I. A MATEMATIKA TÁRGYA; KAPCSOLATA MÁS TUDOMÁNYOKKAL ÉS A TECHNIKÁVAL

A matematika (görögül *ματηματιχη*, a *ματημα* — *ismeret, tudomány* szóból) a valóságos világ mennyiségi vonatkozásainak és térformáinak tudománya.

„A tiszta matematikának tárgyát a valóságos világ térformái és mennyiségi viszonylatai, tehát nagyon reális anyag alkotja. Hogy ez az anyag felette elvont alakban jelenik meg, az csak felületesen fedheti el a külső világból való eredetét. De hogy ezeket az alakokat és viszonylatokat a maguk tisztaságában vizsgálhassuk, teljesen el kell őket választanunk tartalmuktól és ezt, mint közömböst, félre kell tennünk..." (*Engels,* Anti-Dühring, Szikra-kiadás, Budapest, 1950, 39. o.). A matematika absztrakt volta azonban nem jelenti az anyagi valóságtól való elszakadását. A technika és a természettudomány kérdéseivel való szakadatlan kapcsolatban a matematika által vizsgált mennyiségi vonatkozások és térformák köre állandóan szélesedik, úgyhogy a matematika fenti definíciója mind gazdagabb tartalmat nyer. (L. erről alább, különösen a III. részt: A modern matematika.)

A matematika és a többi tudomány. A matematika alkalmazásai igen sokfélék. Elvileg a matematikai módszer alkalmazási köre korlátlan: az anyag mozgásának minden formája vizsgálható matematikailag. A matematikai módszer szerepe és jelentősége azonban a különböző esetekben különböző. A valóságos jelenségek teljes konkrétságát semmilyen meghatározott matematikai szkéma nem meríti ki teljesen; ennélfogva a konkrét jelenség megismerése során mindig két ellentétes tendencia harcol egymással: az egyik a vizsgált jelenségek formájának elkülönítése és e forma logikai analízise, a másik a megállapított formába bele nem férő mozzanatok feltárása és áttérés új, rugalmasabb, a jelenséget jobban átfogó formákra. Ha a jelenségek valamely körének vizsgálata alkalmával minden nehézség a második tendencia megvalósításában rejlik, minden lépés a jelenségek egy-egy minőségileg új oldalának figyelembevételével kapcsolatos, akkor a matematikai módszer háttérbe szorul; ebben az esetben a matematikai szkematizálás csak elhomályosíthatja a jelenségnek teljesen konkrét valóságban való dialektikus elemzését. Ha viszont a szóban forgó jelenséget annak viszonylag egyszerű és állandó alapvető formái nagy pontossággal és kielégítő teljességgel leírják, e rögzített formák keretén belül azonban már elég nehéz és bonyolult, speciális matematikai vizsgálatot, így különleges szimbolikus írásmódot és különleges megoldási algoritmust követelő problémák merülnek fel, akkor a matematikai módszer lesz az uralkodó.

A matematikai módszer hegemóniájának tipikus példája az égi mechanika,[1] s ezen belül a bolygók mozgásának tana. Az általános tömegvonzás matematikailag igen egyszerűen kifejezhető törvénye az idevágó jelenségeket majdnem teljesen meghatározza. Az általunk végezhető megfigyelések pontosságát tekintve — a Hold mozgását leíró elmélet kivételével — az égitestek „anyagi pontok"-kal helyettesíthetők, alakjuk és nagyságuk elhanyagolható. Az ily módon kapott probléma (n anyagi pontnak a tömegvonzás által keltett erők hatása alatt végzett mozgását leírni) megoldása már az $n=3$ esetben óriási nehézségekbe ütközik. Minden, e szkéma matematikai elemzése útján kapott eredmény viszont rendkívüli pontossággal teljesül a valóságban: a logikailag igen egyszerű szkéma jól tükrözi a jelenségek adott körét — a nehézségek mind a szkéma matematikai következményeinek levezetésével kapcsolatosak.

[1] L. az Enciklopédia Небесная механика c. cikkét.

A mechanikáról a fizikára áttérve a matematikai módszer szerepe még alig csökken, alkalmazásának nehézségei ellenben jelentékenyen megnövekednek. A fizikának úgyszólván nincs olyan területe, amely ne követelné meg igen fejlett matematikai apparátus alkalmazását; az alapvető nehézség azonban itt gyakran nem a matematikai elmélet kidolgozásában van, hanem az ehhez kiindulópontul szolgáló alapfeltevések megválasztásában és a matematikai úton kapott eredmények értelmezésében. Ebben az értelemben a modern kvantumfizika,[2] annak ellenére, hogy mélyreható, sajátos matematikai apparátust használ, kevésbé nevezhető a matematikai módszer uralkodási területének, mint a klasszikus fizika egyes részei (a klasszikus termodinamika, a klasszikus elektromosságtan stb.).

Több fizikai elmélet példáján megfigyelhető a matematikai módszernek az a képessége, hogy meg tudja ragadni még magát azt a folyamatot is, amikor a valóság megismerése egy következő magasabb, minőségileg új színtre emelkedik.

Klasszikus példa erre a diffúzió makroszkopikus, a diffundáló anyagot folytonos eloszlásúnak tekintő elméletének a statisztikus diffúzióelmélethez való viszonya, amely a diffundáló anyag egyes részecskéinek mozgásából indul ki. Az első elméletben a diffundáló anyag sűrűsége kielégít egy meghatározott parciális differenciálegyenletet. A diffúzióra vonatkozó különböző problémák megoldása e differenciálegyenlet megfelelő perem- és kezdeti feltételeket kielégítő megoldásainak meghatározására vezetődik vissza. A diffuzió folytonos elmélete igen nagy pontossággal visszaadja a jelenség valódi lefolyását, amíg a folyamatot a számunkra megszokott (makroszkopikus) térbeli és időbeli méretekben tekintjük. Kis térrészekre azonban (olyanokra, amelyek a diffundáló anyagnak csak kevés számú részecskéjét tartalmazzák) maga a sűrűség fogalma elveszíti határozott értelmét. A diffúzió statisztikus elmélete a diffundáló részecskéknek a diffundáló anyag molekuláitól származó lökések hatása alatti mikroszkopikus véletlen elmozdulásaiból indul ki. E mikroszkopikus elmozdulások pontos kvantitatív törvényszerűségeit nem ismerjük. A matematikai valószínűségszámítás azonban (azokból az általános feltevésekből kiindulva, hogy kicsiny időközök alatti elmozdulások is kicsinyek, és hogy egy részecske két egymásutáni időköz alatti elmozdulásai függetlenek egymástól) lehetővé teszi meghatározott kvantitatív következtetések levonását nagy (makroszkopikus) időközökre (megközelítőleg) meg tudjuk határozni a részecskék elmozdulásainak valószínűségi eloszlását. Mivel a diffundáló anyag részecskéinek száma igen nagy, az egyes részecskék elmozdulásainak valószínűségeloszlásai — feltéve, hogy az egyes részecskék elmozdulásai egymástól függetlenek — a diffundáló anyag egészének mozgására vonatkozólag teljesen határozott, már nem véletlen jellegű törvényszerűségekre vezetnek: ugyanazokra a differenciálegyenletekre, amelyeken a folytonos diffúzióelmélet alapul.

Ez a példa elég tipikus abban az értelemben, hogy véletlen jelenségek statisztikája segítségével a törvényszerűségek egyfajta körének (a példában: a diffundáló anyag egyes részecskéi mozgási törvényeinek) talaján gyakran keletkeznek más, minőségileg újfajta törvényszerűségek (a példában: a folytonos diffúzióelmélet differenciálegyenletei).

A biológiai tudományokban a matematikai módszer alárendelt szerepet játszik. Ha sikerül is biológiai jelenségek lefolyását matematikai képletekkel leírni, e képletek alkalmazhatósági köre igen korlátozott marad, a megfelelő

[2] L. az Enciklopédia Квантовая механика és Квантовая электродинамика c. cikkeit.

jelenségek valóságos menetét csak durván közelíti meg. Ennek magyarázata nem az, hogy a biológiai jelenségeket elvileg lehetetlen volna matematikailag vizsgálni, hanem az, hogy a biológiai jelenségek minőségileg igen sokfélék.

Még inkább átadja a helyét a matematikai módszer a jelenségek közvetlen, teljes konkrét bonyolultságukban való elemzésének a társadalomtudományokban. Itt különösen nagy annak a veszélye, hogy a jelenségek lefolyásának formáját absztrahálva figyelmen kívül hagyjuk olyan minőségileg új mozzanatok felhalmozódását, amelyek az egész folyamatnak döntően más irányt adnak. A társadalomtudományokban — ugyanúgy, mint a biológiában — a matematikának, mint segédtudománynak — matematikai statisztika — lényeges jelentősége marad. A társadalmi jelenségek végső elemzésében azonban a minőségileg sajátos mozzanatok minden egyes történelmi korszakban annyira uralkodóak, hogy a matematikai módszer háttérbe szorul.

A matematika és a technika. Az aritmetika és a geometria elemei, mint az az alábbi történeti áttekintésből látható, közvetlenül a gyakorlat által felvetett problémákból keletkeztek: később pedig a matematika új módszereinek és alapvető gondolatainak keletkezése a matematikai természettudományok (csillagászat, mechanika, fizika stb.) hatása alatt történik, amelyeknek fejlődése viszont ugyancsak a gyakorlat által felvetett problémákra vezethető vissza. A matematikának a technikával való *közvetlen* kapcsolata leginkább abban áll, hogy a már kész matematikai elméleteket alkalmazzák technikai problémák megoldására. Vannak azonban példák arra is, hogy új általános matematikai elméletek keletkezése közvetlenül a technikában felmerült feladatokra vezethető vissza. A legkisebb négyzetek módszere geodéziai munkák kapcsán keletkezett; sok új parciális differenciálegyenlet-típust technikai problémák kapcsán kezdtek először vizsgálni; a differenciálegyenletek megoldásának operátoros módszerei az elektrotechnika talaján nőttek ki, és így tovább. Legújabban elektrotechnikai problémák nyomán a valószínűségszámítás új fejezete jött létre: az információelmélet. A regulátorok és digitális matematikai gépek konstrukcióproblémái az algebra új részeinek kifejlődésére vezettek. Főként technikai szükségletek hatására keletkezett az ábrázoló geometria és a nomográfia. A differenciálegyenletek közelítő megoldási módszereinek fejlődésében az asztronómia szükségségletei mellett technikai problémák játszottak döntő szerepet. A parciális differenciálegyenletek és az integrálegyenletek közelítő megoldásának sok módszere tisztán a technikának köszönheti létrejöttét. A technikai problémák bonyolultabbá válása mind élesebben megköveteli, hogy a numerikus megoldások ténylegesen gyorsan megkaphatók legyenek. A numerikus számítás technikájával szemben egyébként az elméleti tudományok is mind nagyobb követelményeket támasztanak; ez még a természettudomány olyan fiatal ágaira is vonatkozik, mint amilyen pl. a geofizika. Ennek következtében a matematikai problémák numerikus megoldásának gépesítése mind nagyobb jelentőséghez jut. Itt maga a technika siet segítségére a matematikának: közvetlenül a számológépek, planiméterek és integráfok után megjelennek a harmonikus analizátorok, a differenciálegyenletek, lineáris differenciálegyenletrendszerek megoldására szolgáló integrátorok és egyéb, különféle matematikai problémákat megoldó gépek. Minden ilyen gép csak a problémák szigorúan meghatározott körének megoldására alkalmas; új feladattípusok megoldására szolgáló új gépek szerkesztése csak tervszerű tudományos munkával lehetséges. A gépi számítás technikája a tudományos kutatás hatalmas segédeszköze.

II. A MATEMATIKA TÖRTÉNETE A XIX. SZÁZADIG

Az, hogy a matematika külön önálló tudomány, amelynek megvan a saját tárgya és módszere, csak megfelelő mennyiségű konkrét anyag felhalmozódása után válhatott tudatossá. Ez először az ókori Görögországban, az i. e. VI—V. században következett be. A matematika fejlődésének eddig tartó szakaszát a matematika keletkezési korszakának tekintjük, az i. e. VI—V. évszázadra tehetjük az elemi matematika korszakának kezdetét. E két időszak alatt a matematikai kutatás csaknem teljesen annak az igen csekély számú alapvető fogalomnak a területére szorítkozik, amely még a történelmi fejlődés igen korai szakaszain keletkezett és a gazdasági élet legegyszerűbb fogalmaival kapcsolatos, mint például: tárgyak megszámlálása, termékek mennyiségének, földdarabok területének megmérése, épületrészek méreteinek meghatározása, időmérés, kereskedelmi számítások stb. A mechanika és a fizika első lépései számára [Archimedes görög tudós (i. e. III. sz.) egyes, az infinitezimális számítás elemeinek ismeretét megkövetelő vizsgálataitól eltekintve] a matematikai alapfogalmak ez a csekély készlete még elegendő lehetett. Az egyetlen olyan tudomány, amely hosszú idővel a természeti jelenségek matematikai vizsgálatának XVII—XVIII. századbeli nagyarányú kibontakozása előtt sajátos, igen nagy követelményeket támasztott a matematikával szemben, a csillagászat volt; ez feltételezi — többek között — a trigonometria előzetes kifejlődését. Az általános és középiskolában tanított „elemi matematika" alapját máig is az a fogalomkészlet alkotja, amellyel a matematika a XVII. század elejéig dolgozott.

A XVII. században a természettudomány és a technika újonnan felmerült problémái arra késztetik a matematikusokat, hogy figyelmüket olyan új módszerek megalkotására összpontosítsák, amelyeknek segítségével a mozgás, a mennyiségek változásának folyamatai, a geometriai idomok transzformációi (vetítés stb. útján) matematikailag vizsgálhatók. A változó mennyiségeknek az analitikus geometriában való alkalmazásával (DESCARTES) és a differenciál- és integrálszámítás megteremtésével kezdetét veszi a változó mennyiségek matematikájának korszaka, amelyet — megállapodásszerű szóhasználattal — a „felsőbb matematika" korszakának is nevezhetünk. Egyébként természetesen sem ekkor, sem később nem állt meg az elemi matematika továbbfejlődése sem.

A matematika által vizsgált mennyiségi vonatkozások és térformák körének további bővülése folytán a XIX. század elején szükségessé vált, hogy a matematikusok tudatosítsák ezt a folyamatot és feladatul tűzzék maguk elé a mennyiségi vonatkozások és térformák eléggé általános szempontból tekintett lehetséges típusainak vizsgálatát. Ennek az iránynak első jelentős eredménye LOBACSEVSZKIJ orosz matematikus (később teljesen reális alkalmazást nyert) „elképzelt geometriá"-jának a felfedezése volt. Az ilyen jellegű vizsgálatok a matematika egész felépítésének olyan jelentős új vonásokat adtak, hogy a matematikában a XIX. és a XX. századot joggal tekinthetjük külön korszaknak, a modern matematika korszakának.

1. A matematika keletkezése

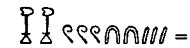
A tárgyak megszámlálása kapcsán a természetes számok aritmetikájának alapfogalmait már a művelődés legalsó fokain megalkotta az emberiség. Csupán a szóbeli számolás[3] már kidolgozott rendszere alapján keletkeztek a számolás írásbeli rendszerei és dolgozták ki a természetes számokkal való alapműveletek módszerét (az osztás elvégzése itt még sokáig nagy nehézségeket okozott). A mérés (gabona mennyisége, út hosszúsága stb.) szükségletei folytán megjelent a legegyszerűbb törtszámok neve és jelölése és kidolgozták a törtekkel való aritmetikai műveletek módszereit. Így halmozódott fel az az anyag, amelyből lassanként megszületett a legrégibb matematikai tudomány, az *aritmetika*.[4] A terület- és térfogatmérés, az építéstechnika szükségletei, később pedig a csillagászat a *geometria*[5] elemeinek megalkotására vezetnek. Mindez sok népnél legnagyobbrészt egymástól függetlenül, párhuzamosan történt. A további fejlődés szempontjából különös jelentőségű volt a matematikai ismereteknek Egyiptomban és Babilóniában való felhalmozódása. Babilóniában az aritmetikai számítások fejlett technikájának alapján megjelentek az algebra, a csillagászat problémái kapcsán pedig a trigonometria elemei is.

Egyiptom. Az ókori Egyiptomból fennmaradt matematikai szövegek legnagyobbrészt különálló feladatok megoldásának példáiból, vagy — legjobb esetben — a megoldásra szolgáló receptekből állnak; ezeket néha csak akkor lehet megérteni, ha elemezzük a szövegekben előforduló numerikus példákat. Azért kell különálló feladattípusok megoldására szolgáló receptekről beszélnünk, mert matematikai elmélet, amely általános tételek bizonyításait tartalmazta volna — úgy látszik, egyáltalán nem volt. Erre mutat például az, hogy a pontos és a közelítő megoldások egyformán voltak használatosak, anélkül, hogy bármi különbséget tettek volna köztük. Mindazonáltal az általuk ismert matematikai tények száma a magasszínvonalú építéstechnikának, a bonyolult földbirtokviszonyoknak, a pontos naptár

[3] L. az Enciklopédia Счисление c. cikkét.
[4] L. az Enciklopédia Аритметика c. cikkét.
[5] L. az Enciklopédia Геометрия c. cikkét.

szükségletének stb. megfelelőleg elég nagy volt. Az időszámításunk előtti második évezred első feléből fennmaradt papíruszok alapján az egyiptomi matematika akkori állapota a következőkkel jellemezhető:

Miután az egész számokkal való műveletek nehézségein már túljutottak (az e célra használt számrendszert a

 = 2323

példa mutatja), a törtekkel való műveletekre megalkottak egy sajátságos, elég bonyolult, speciális kisegítő táblázatokat igénylő apparátust. Rendszeresen oldottak meg ismeretlen számok meghatározását kívánó feladatokat; az ilyeneket ma egyismeretlenes egyenletek alakjában írnánk fel. A geometria lényegében terület- és köbtartalomszámítási szabályokból állott. Helyesen ki tudták számítani a háromszög és a trapéz területét, a parallelepipedon és a négyzetalapú gúla köbtartalmát. Az egyiptomiak általunk ismert legmagasabb vívmánya ezen a téren a négyzetalapú csonkagúla mai írásmóddal

$$v = \frac{h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

alakban kifejezhető köbtartalomképletének felfedezése volt. A kör területének és a henger, valamint a kúp köbtartalmának kiszámítására általuk használt szabályokban néha az igen durván közelítő $\pi = 3$, néha a jóval pontosabb $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16\ldots$ érték szerepel.

Babilónia. Innen összehasonlíthatatlanul több, a matematikai fejlődés fokára következtetni engedő szöveg maradt fenn, mint Egyiptomból. A babilóniai *ékírású matematikai szövegek*[7] az időszámításunk előtti második évezredtől (a Hammurapi és a Kasszita-dinasztia korszaka) a görög matematika keletkezéséig és kifejlődéséig terjedő időszakot ölelik fel. De már a legelső ilyen szövegek a babilóniai matematika virágzásának korából valók; a későbbiek, néhány új mozzanat megjelenése ellenére is, egészükben inkább pangásról tanúskodnak. A Hammurapi-korszak Babilóniájában a vegyes tízes-hatvanas számrendszert használták, mely még a sumér korszakban fejlődött ki; ez a számrendszer már felhasználja a helyi érték elvét (ugyanazok a számjegyek ugyanannyi számú különböző 60-as számrendszerbeli helyi értéket jelentenek). Pl.

 $= 34 \cdot 60 + 25 = 2065$.

Hasonlóan jelölték a „hatvanadostörteket" is. Ennélfogva az egész számokkal és a „hatvanadostörtekkel" való műveleteket egyfajta szabályok szerint végezhették. Az osztást reciprok érték-táblázatok segítségével szorzásra vezették vissza. Későbbi szövegekben a reciprok értékek kiszámítását nyolc hatvanasszámrendszerbeli számjegyig végzik el. A reciprok értékek táblázatán kívül fennmaradtak még szorzótáblák, négyzet-, négyzetgyök- és köbgyöktáblázatok is. Sok gazdasági irat arról tanúskodik, hogy mindezeket az eszközöket használták is az udvartartások és a templomok bonyolult gazdasági ügyeiben. Széleskörű fejlődésnek indult a százalékszámítás is kölcsönügyletek kapcsán. Fennmaradt a Hammurapi-dinasztia idejéből sok olyan feladatok megoldásával foglalkozó szöveg is, amelyek — mai szempontból nézve — első-, másod-, sőt harmadfokú egyenletekre vezetnek. Van olyan feltevés, amely szerint az ilyen elvontabb tudományos érdeklődés, amely nem szorítkozott a gyakorlatban közvetlenül felhasználható recepturára és a feladatok megoldása kapcsán

[6] L. az Enciklopédia Папирусы математические c. cikkét.
[7] L. az Enciklopédia Клинописные математические текстй c. cikkét.

általános algebrai módszerek alkotására vezetett, az „irnokiskolákban“ keletkezett, ahol a tanítványokat a gazdasági életben szükséges számolásra, könyvelésre készítették elő. Az ilyen szövegek később eltűnnek. A többjegyű számokkal való számolás technikája azonban — a pontosabb csillagászati módszereknek az i. e. első évezredbeli kifejlődésével kapcsolatban — továbbfejlődik. A csillagászat talaján jönnek létre az empirikus úton kapott összefüggések első nagyobb terjedelmű táblázatai; ezeket a függvényfogalom első megjelenési formájának tekinthetjük. A babilóniai ékírásos klasszikus matematikai hagyományok továbbfolytatódnak Asszíriában, a perzsa államban, sőt még a hellenisztikus korszakban is egészen az i. e. I. századig. A babiloni matematikának a geometria terén az egyiptomiakét túlhaladó eredményei közül meg kell említenünk a szögmérés kidolgozását és a trigonometria egyes csíráit, amelyek nyilván az asztronómia fejlődésével kapcsolatosak. A babilóniaiak már ismerték a Pythagoras-tételt.

2. Az elemi matematika korszaka

Csupán nagymennyiségű konkrét anyag — különféle aritmetikai számítási módok, terület- és köbtartalomszámítási szabályok stb. — felhalmozódása után jön létre a matematika, mint önálló tudomány, amelynek sajátos módszere van, s melynek alapfogalmai és alaptételei kellő általánossággal, rendszeresen tárgyalandók. Az aritmetikát és algebrát illetően lehetséges, hogy ez a folyamat már Babiloniában megkezdődött. Teljes mértékben azonban az új irányzat az ókori Görögországban alakult ki, ahol ez a matematikai tudomány alapjainak rendszeres és logikailag következetes felépítésében érte el tetőpontját. Az elemi geometria tárgyalásának az ókori görögök által megalkotott rendszere kétezer évre a matematikai elmélet deduktív felépítésének mintaképévé lett. Az aritmetikából lassanként kinő a számelmélet.[8] Megalkotják a mennyiségek[9] és a mérés rendszerbe foglalt elméletét. A valós szám[10] fogalmának kialakítása (a mennyiségek mérésének problémájával kapcsolatosan), mint azt alább látni fogjuk, igen hosszadalmas folyamatnak bizonyult. Ennek oka abban rejlik, hogy az irracionális és a negatív szám fogalma azok közé a bonyolultabb matematikai absztrakciók közé tartozik, amelyek a természetes számmal kapcsolatos fogalmaktól eltérőleg — nem gyökereznek szilárdan a tudományos fokot még el nem érő általános emberi tapasztalatban. Kezdők ezeket a fogalmakat még ma is, amikor reális tartalmuk és gyakorlati használhatóságuk már általánosan el van ismerve, sokszor csak nehézségek árán, rendszeres iskolai oktatás eredményeként sajátítják el. Természetes tehát, hogy megalkotásuk az emberiségtől nagy erőfeszítéseket követelt.

Az *algebrá*nak[11] mint betűszámtannak a megteremtése csak az említett kétezeréves időszak végén fejeződik be. Az ismeretlenekre speciális

[8] L. az Enciklopédia Чисел теория c. cikkét.
[9] L. az Enciklopédia Величина c. cikkét.
[10] L. az Enciklopédia Число c. cikkét.
[11] L. az Enciklopédia Алгебра c. cikkét.

jelöléseket vezetett be már DIOPHANTOS görög matematikus (valószínűleg III. század); rendszeresebben jelenik meg ugyanez Indiában a VII. században. Az egyenletek együtthatóinak betűkkel való jelölését azonban csak a XVI. században vezette be F. VIÈTE francia matematikus.

A geodézia és a csillagászat fejlődése már korán a *trigonometria* (mind a sík-, mind a gömbi trigonometria) részletes kidolgozására vezetett.

Az elemi matematika korszaka akkor ér véget, amikor (Nyugat-Európában a XVII. század elején) a matematikai érdeklődés súlypontja átkerül a változó mennyiségek matematikájának területére. Nyilvánvaló, hogy ezt az eseményt a matematika megelőző fejlődésének kellett előkészítenie. Már az ókori világ matematikájában alakulóban volt a függvényfogalom a trigonometrikus függvények vizsgálata és értéktáblázataik összeállítása kapcsán. De például a 0-tól $+\infty$-ig változó szögargumentum és az ilyen argumentum trigonometrikus függvényeinek fogalma csak a XVI. században jelenik meg (VIÈTE-nél). Görög matematikusok (különösen ARCHIMEDES) már megközelítették a végtelen kis mennyiségek analízisének alapgondolatait, ez a folyamat azonban nem fejlődik tovább, az ez irányú érdeklődés THOMAS BRADWARDINE angol és NICOLAUS CUSANUS német matematikus homályos kísérletei után (XIV., illetve XV. század) csak a XVI. század végén újul meg (S. STEVINUS flamand tudós). Így a XVII. századot megelőző egész időszak lényegében az elemi matematika korszaka.

E korszak kezdete (a görög, a hellenisztikus és a római matematika) a rabszolgatársadalom, második fele pedig a feudális társadalom idejére esik (Kínában, Indiában, Közép-Ázsiában, a Közelkeleten és Nyugat-Európában). A görög és a hellenisztikus matematika gyors felvirágzás után a rabszolgatársadalom viszonyai közt mind jobban elszakad a gyakorlattól, hatása alá kerül az idealista filozófia korlátozó tendenciáinak s végül is teljesen lehanyatlik. A középkorban a Kelet országaiban a nagy hidrotechnikai építkezések, a világkereskedelmi centrumok kifejlődése, a nagyszabású geodéziai munkák növekedő kísérletei és a kereskedőréteggel szorosan összenőtt hivatalnoki réteg gyakorlatibb törekvései kapcsán különösen nagy fejlődésnek indult a matematika számolással kapcsolatos része.

Az elemi matematika korszakának végén a nyugateurópai matematika fejlődésének ütemére hatással van a feudalizmus méhében keletkező új polgári társadalom kialakulásának folyamata. A reneszánsz korban (XV—XVI. század) gyorsan növekednek a mérnököknek, építészeknek, művészeknek, katonáknak, hajósoknak és geografusoknak a matematikával szemben támasztott igényei. Ugyanakkor az egyetemeken a szabadabb tudományos kritika és a tudományos verseny lehetőségei ösztönzést adnak, azelőtt megoldhatatlannak tűnő problémák megoldására, az elmélet bátrabb fejlesztésére.

Az ókori Görögország. Az ókori Görögországban a matematika fejlődése teljesen más irányt vett, mint Keleten. Noha a számítás technikája, az algebrai jellegű feladatok megoldásában való ügyesség és a csillagászat matematikai segédeszközeinek kidolgozása terén a görög matematika színvonala csak a hellenisztikus korszakban érte utól és múlta felül a babiloniaiét, az ókori Görögország matematikája már sokkal hamarabb a logikai fejlődés új szakaszába lépett. Itt találkozunk először pontos matematikai bizonyítás igényével, megtörténnek az első kísérletek a matematikai elmélet rendszeres felépítésére. A matematika — ugyanúgy, mint minden más tudományos és művészi tevékenység — többé nem személytelen, mint az ókori Kelet országaiban; most már névszerint ismert matematikusok művelik, akik matematikai munkákat hagynak hátra. (Ezek csak sokkal későbbi kommentátorok által megőrzött töredékekben maradtak fenn.) A matematikai tudomány jellegének ez a megváltozása azzal magyarázható, hogy a görög államok fejlettebb politikai-társadalmi és kulturális élete a dialektikát, a vitatkozás művészetét magas színvonalra emelte s szokásossá tette a kimondott állításnak az ellenféllel szemben való megvédését. A vallástól független filozófiai gondolkodás létrejötte folytán fellépett a természeti jelenségek ésszerű magyarázatának igénye, és ez új feladatok elé állította a matematikát.

Az aritmetika terén a görögök a föniciaiak tanítványainak vallották magukat, az ottani aritmetika magas fejlettségi fokát a föniciaiak kiterjedt kereskedelmével magyarázva; a görög geometria kezdetét pedig az első görög geométerek és filozófusok, Miletosi Thales (az i. e. VII. század végétől a VI. század közepéig) és Samosi Pythagoras (i. e. VI. sz.) egyiptomi utazásával köti össze a hagyomány. Pythagoras iskolájában az aritmetika a számolás egyszerű mesterségéből számelméletté nőtt. Meghatározták a legegyszerűbb számtani haladványok összegét [így az $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ összefüggést is], vizsgálták a számok oszthatóságát és a különböző (számtani, mértani, harmonikus) középértékeket. A számelmélet finomabb problémáit (például az ún. tökéletes számok meghatározását) Pythagoras iskolájában a számok közötti összefüggéseknek tulajdonított misztikus, mágikus jelentőséggel hozták kapcsolatba. Pythagoras geometriai tételével kapcsolatban megtalálták a „pythagorasi számok" (az $a^2+b^2=c^2$ összefüggést kielégítő számhármasok) végtelen sorozatának előállítási módját. A geometria területén a görög matematikusok az i. e. VI—V. században az egyiptomiak örökségének elsajátítása után ugyancsak az építőművészet, a földmérés és a hajózás legegyszerűbb problémái kapcsán felmerülő feladatokkal foglalkoztak. Ilyenek például a derékszögű háromszög befogói és átfogója közti összefüggés (amelyet a „Phytagoras-tétel" fejez ki), a hasonló idomok területének összefüggése, a kör négyszögesítése,[12] a szögharmadolás,[12] a kocka megkétszerezése.[12] Új azonban e feladatok tárgyalásmódja; ezt a tárgy bonyolultabbá válása tette szükségessé. A görög matematikusok nem elégszenek meg közelítő, tapasztalati úton talált megoldásokkal, hanem pontos bizonyítást keresnek, a probléma logikailag hiánytalan megoldását. Élő példája ennek az új irányzatnak a négyzet oldala és átlója összemérhetetlenségének bizonyítása. Az időszámításunk előtti V. század közepén Görögország filozófiai és tudományos élete Athénben koncentrálódik; ide gyülnek össze a tudósok a görög világ minden részéről. Itt dolgozik Eliszi Hippiász és Khioszi Hippokratész, Eliszi Hippiász — az elemi módszerek végigpróbálása után — i. e. 420 körül megoldja a szögharmadolás feladatát egy speciális transzcendens görbe, a kvadratrix[13] segítségével, amelyet azután Dinostratész (i. e. IV. század) a körnégyszögesítés feladatának megoldására használ fel. A geometria első rendszeres tankönyvét Khioszi Hippokratésznek tulajdonítják (az i. e. V. század közepe). Ebben az időben kétségtelenül volt már olyan kidolgozott geometriai rendszer, amely nem hagyott figyelmen kívül bizonyos logikai finomságokat, mint például a háromszögek egybevágósági eseteinek bizonyítása. Az anyag szerkezetének ésszerű megmagyarázására irányuló első — habár teljesen spekulatív — kísérleteknek a matematikában való visszatükröződése volt az i. e. V. század matematikájának minden bizonnyal legjelentősebb eredménye: az öt szabályos test felfedezése. Ez a felfede-

[12] L. az Enciklopédia Квадратура круга, Трисекция угла és Удвоение куба c. cikkeit.
[13] L. az Enciklopédia Квадратриса c. cikkét.

zés oly módon jött létre, hogy keresték azokat az ideális legegyszerűbb testeket, amelyek a világegyetem építőköveiül szolgálhatnak. Az i. e. V. és IV. század határán Demokritosz, a kiváló materialista filozófus, atomisztikus elgondolásokból kiindulva megalkot egy olyan köbtartalomszámítási módszert, amely később Archimedes kiindulópontja lesz a végtelen kicsiny mennyiségek módszerének kidolgozásában. Az i. e. IV. században Athén hatalmának hanyatlásával, a politikai reakció viszonyai közepette olyan korszak köszönt be, amelyben a matematika bizonyos mértékig az idealista filozófia korlátai közé szorul. Ebben az időben a számok tudományát szigorúan elkülönítik a „számolás mesterségétől", a geometriát pedig „a mérés mesterségétől". Az összemérhetetlen távolságok, területek és köbtartalmak létezésére hivatkozva Arisztotelész általában tiltja az aritmetikának a geometriára való alkalmazását. A geometriát szigorúan a körzővel és vonalzóval előállítható konstrukciókra korlátozzák; az ugyanebben az időben felmerült delosi problémának (kocka megkétszerezése) a megoldását a geometrián kívülállónak nyilvánítják, mert ez bonyolultabb szerkesztési eszközöket követel meg. Az i. e. IV. század matematikusai által elért konkrét eredmények közül a legjelentősebbeknek Knidosi Eudoxosz (az i. e. IV. század első fele) kutatásait tekinthetjük, melyek a geometria alapjainak logikai elemzését célzó irányzattal kapcsolatosak. Eudoxosz dolgozta ki az aránypárok elméletét és ő bizonyította be elsőnek a gúla köbtartalmáról szóló tételt (melyet az egyiptomiak tapasztalati tényként már az i. e. II. évezred elejétől fogva ismertek, l. fentebb). E bizonyítással kapcsolatban ő mondotta ki azt az Archimedes axiómájának is nevezett általános feltevést, amely az exhausztiós módszer alapját alkotja.[14] A matematika főáramlatai mellett meg kell még említenünk az i. e. IV. században Tarentuszi Arkhitoszt (az i. e. V. század második felétől a IV. század első feléig); a mechanika matematikai feldolgozásának első kísérletével. Ugyancsak ő egyébként a kocka megkettőzéséről szóló deloszi probléma egyik felvetője és a megoldás szerzője is.

A hellénisztikus és a római korszak. Az i. e. III. századtól kezdve hét évszázadon át Alexandria volt a tudományos kutatás, különösen a matematika fő központja. Itt a különböző világkultúráknak egyesülése, a nagy állami és építési feladatok és az addig még soha nem látott méretű állami támogatás által jellemzett viszonyok között a görög matematika legnagyobb felvirágzását érte el. Annak ellenére, hogy a görög műveltség és a tudományos érdeklődés az egész hellenisztikus és római világban mindenütt el volt terjedve, Alexandria „múzeum"-ával — az első modern értelemben vett tudományos kutatóintézettel — és könyvtárával oly nagy vonzóerőt gyakorolt, hogy az összes nagyobb tudósok itt gyűltek össze. Az alább említésre kerülő tudósok közül egyedül Arlhimedes maradt hű szülővárosához, Szirakuzához. Különösen kitűnik a matematikai tevékenység intenzitásával az alexandriai korszak első százada (az i. e. III. század). Ekkor élt és működött Euklidész,[15] Archimedes,[15] Eratoszthenész és Pergeszi Apolloniusz. A bonyolult hidrotechnikai alkotások (például az archimedesi csavar), a haditechnika követelményei (Archimedes hajítógépei), a tengeri hajózás problémái (Archimedes vizsgálatai a hajótestek egyensúlyáról és stabilitásáról), a geodéia és a kartográfia fejlődése (a földgömb méreteinek meghatározása Eratoszthenész által), úgyszintén a pontos asztronómiai mérések és számítások kidolgozása (az év tartamának Julianus-féle közelítő meghatározása: 1 év $= 365\,{}^1/_4$ nap), végül a mechanika és az optika fejlődése — mindez egész sereg új feladat elé állította a matematikát. Az i. e. III. századot az jellemzi, hogy a matematika e követelményeknek megfelelő gyors kiterjedésbeli bővülése termékeny módon egyesült a mélyenjáró teoretikus gondolkodással. Így a gyakorlat követelményei folytán a mennyiségek közelítő mérése és a közelítő számítások iránt felébredt érdeklődés nem vezetett a matematikai szigorúságról való lemondásra. A nagyszámú közelítőleg elvégzett gyökvonásnál, sőt az összes csillagászati számításoknál is min-

[14] L. az Enciklopédia Исчерпывания метод c. cikkét.
[15] L. az Enciklopédia Евклид, ill. Архимед c. cikkeit.

dig pontosan megjelölték a hibahatárt, oly módon, mint azt ARCHIMEDES tette kifogástalanul bebizonyított

$$3\frac{10}{71}d < k < 3\frac{1}{7}d$$

kettős egyenlőtlenségével, ahol k a kör kerülete, d pedig átmérője. Ez világos megértését jelenti annak, hogy a közelítő számítások matematikája nem valamiféle „nem szigorú" matematika — ami később hosszú időre feledésbe ment.

Az „Elemek"-ben EUKLIDÉSZ összegyűjtötte és végleges logikai formába öntötte a geometria területén addig elért eredményeket.[16] Ugyanakkor elsőnek fektette le az „Elemek"-ben a rendszeres számelmélet alapjait is: bebizonyította, hogy a prímszámok sorozata minden határon túl folytatódik és felépítette az oszthatóság lezárt elméletét. Végül az „Elemek" második, hatodik és tizedik könyvében EUKLIDÉSZ sajátos módon geometrizálja az algebrát, lehetővé téve nemcsak másodfokú egyenletek geometriai megoldását, hanem irracionális négyzetgyökös kifejezések bonyolult átalakításainak geometriai úton való végrehajtását is. Ugyanennek a „geometriai algebrának" a stílusában fogalmazta meg ARKHIMEDÉSZ a számtani haladvány tagjainak négyzetösszegéről szóló tételét. EUKLIDÉSZNEK az „Elemek"-en kívüli geometriai munkái és PERGÉSZI APOLLONIUSZ művei közül a matematika további fejlődése szempontjából a kúpszeletek[17] teljes elméletének megalkotása a legjelentősebb. ARCHIMEDES fő érdeme a geometriában a különféle területek, felszínek és köbtartalmak (így a parabolaszelet területének, a gömb felszínének és köbtartalmának), valamint egyes súlypontok (így a gömb- és a paraboloidszelet súlypontjának) meghatározása; az archimedesi spirális[18] csak egy az i. e. III. században vizsgált transzcendens görbék közül. ARCHIMEDES után, noha a tudományos ismeretek terjedelme tovább növekedett, az alexandriai tudomány már nem érte el korábbi teljességét és mélységét. A csillagászat területén ez abban fejeződött ki, hogy — a megfigyelések egyre növekvő pontossága és a matematikai apparátus tökéletesedése ellenére — elvetették SZÁMOSZI ARISZTARKHOSZNAK (az i. e. IV. század végétől a III. század közepéig) a Földnek a Nap körül való mozgásáról és az állócsillagok távolságáról szóló tanait, amelyet az előző nemzedékek legjobb elméi teljes mértékben elfogadtak. A matematikában a végtelen kicsiny mennyiségek analízisének ARCHIMEDES heurisztikus módszereiben található csírái (ARCHIMEDESNEK „A módszerről" szóló speciális munkájában; itt a szerző rámutat arra is, hogy a szóban forgó módszerek nem pontosak, a végleges tárgyalásban az exhausztiós módszerrel tartja szükségesnek helyettesíteni ezeket) nem fejlődtek tovább.

Az ókor egész matematikájának lényeges hiányossága volt, hogy az irracionális szám fogalma nem alakult ki tökéletesen. Mint fentebb már említettük, ez arra vezetett, hogy az i. e. IV. század filozófiája egyáltalában tagadta az aritmetikának geometriai mennyiségek vizsgálatára való alkalmazhatóságát. A valóságban az i. e. IV. és III. század matematikusainak mindazonáltal közvetett módon sikerült megvalósítaniuk ezt az alkalmazást az aránypárok elméletében és az exhausztiós módszerben. A következő századok nem a probléma tényleges megoldását hozták meg a megfelelő alapvetően új fogalom (az irracionális szám fogalmának) megalkotásával, hanem lassankénti feledésbe menését, ami a matematikai szigorúság igényének fokozatos elveszése által vált lehetővé. A matematikai szigorúságról való ideiglenes lemondás azonban ebben az időszakban hasznosnak bizonyult, mert megnyitotta az utat az algebra akadálytalan fejlődése előtt, ami az Euklidész „Elemei"-ben képviselt szigorú elgondolások követése esetén csak a távolságok, területek és köbtartalmak „geometriai algebrá"-jának igen kényelmetlen formájában lett volna lehetséges.

[16] L. az Enciklopédia Начала c. cikkét.
[17] L. az Enciklopédia Конические сечения c. cikkét.
[18] L. az Enciklopédia Архимедова спираль c. cikkét.

Ez irányban elért eredmények közül HÉRON[19] (valószínűleg I. század) *Metrikáját* említhetjük; e mű szerzője különösen geodéziai munkáiról híres, amelyek a római geodétikusok nagyszabású gyakorlati tevékenységének alapját alkották. HÉRON *Metrikája* nevezetes mű, a számitásos geometria módszereinek első önálló tárgyalása. Tartalmazza egyebek közt az ún. Héron-képletet is, azaz a háromszög területének (egyébként már ARCHIMEDES által is ismert)

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

képletét (a gyökjel alatt található négytényezős szorzatnak nincs geometriai értelme). A tulajdonképpeni algebrai számítások önálló és széleskörű kifejtése azonban csak DIOPHANTOSZ[20] *Aritmetikájában* található meg, amely főként az egyenletek megoldásával foglalkozik. Ez a munka tartalmazza azt a szabályt, hogyan kell átvinni egy tagot az egyenlet egyik oldaláról a másikra, felhasználja az egyenlet mindkét oldalának ugyanazzal a kifejezéssel való szorzását, megadja a másodfokú egyenletek megoldásának általános módszereit; megold benne a szerző olyan feladatokat is, amelyek harmadfokú egyenletre, valamint többismeretlenes határozatlan egyenletre vezetnek. DIOPHANTOSZ mindig pozitív megoldásokat keres; az algebrai kifejezések szorzásánál azonban felhasználja a „kivont“ számok szorzásának szabályát, amely megelőzi a negatív számokkal való műveletekre vonatkozó későbbi szabályokat. DIOPHANTOSZ természetesen — HÉRÓN gyakorlatától eltérően — a racionális megoldásokra szorítkozik, és ezzel kizárja annak lehetőségét, hogy algebrája a geometriára vagy a mechanikára alkalmazható legyen. A trigonometriát az ókorban általában nem a matematikához sorolták, hanem az asztronómiához. A trigonometriától ugyanúgy, mint HÉRÓN számításos geometriájától, nem követelik meg a megfogalmazások és a bizonyítások teljes szigorúságát. Húrhosszúságtáblázatot — mely mai sinustáblázataink szerepét töltötte be — elsőnek HIPPARKHOSZ (i. e. II. sz.) készített. A szférikus trigonometria elemeit MÉNELAOSZ (I. század) és CLAUDIUS PTOLEMAEUS (II. század) alkotta meg. PTOLEMAEUS kezdeményezte a hosszúságnak és szélességnek a földrajzi helymegjelölésre való rendszeres használatát is; úgy látszik, hogy ez volt a koordinátarendszer használatának első formája.

A tiszta matematika területén az ókor utolsó századaiban élő tudósok tevékenysége (DIOPHANTOSZT kivéve) mindinkább a régi szerzők kommentálására összpontosult. PAPPUSNAK (valószínűleg III. század) az EUKLIDÉSZ „Elemei“-hez fűzött terjedelmes kommentárai között sikerült felállítania a forgástestek köbtartalmáról azt a tételt, amelyet később Guldin-szabálynak neveztek el. Ennek az időszaknak a kommentátor-tudósai [PAPPUS, PROCLUS (V. század) és mások] minden sokoldalúságuk ellenére, az antik világ hanyatlásának körülményei között már képtelenek voltak a matematika egymástól elszigetelten fejlődő ágainak: a Diophantos-féle algebrának, az asztronómia részét alkotó trigonometriának és a geodetikusok között népszerű, nyiltan nem-szigorú Hérón-féle számításos geometriának egységes, igazán fejlődésképes, tudománnyá való egyesítésére.

Kína. A görög-római világ végleges felbomlása után a tudományos haladás centruma hosszú időre Keletre helyeződik át. A matematika további európai fejlődésére az indiai, középázsiai és közelkeleti matematikusok művei voltak a legnagyobb hatással; az időbeli elsőség azonban sok probléma tekintetében a kínai matematikusoké. Már a CSZSAN CAN és CZIN CSOU-CSAN által korábbi források alapján az i. e. II—I. században összeállított „Aritmetika kilenc fejezetben“ c. könyv bizonyítja, hogy a kínai matematikusok magasszinvonalú számítási technikával rendelkeztek és megvolt bennük az érdeklődés az általános algebrai módszerek iránt. Ez az első munka, amely tartalmazza az egész számokból való négyzet- és köbgyökvonás szabályát — lényegében ugyanúgy, ahogyan ma az iskolákban tanítjuk.

[19] L. az Enciklopédia Герон c. cikkét.
[20] L. az Enciklopédia Диофант című cikkét.

Sok feladat úgy van megfogalmazva, hogy azok csak az ismeretleneknek a lineáris egyenletrendszerekből való, általuk világosan láthatólag jól ismert kiküszöbölési módszereit magyarázó példákként foghatók fel. Így például azt az egyenletrendszert, amely a mai jelölésmóddal felírva a

$$
\begin{aligned}
3x+2y+\ \,z&=39,\\
2x+3y+\ \,z&=34,\\
x+2y+3z&=26
\end{aligned}
$$

alakot öltené, így adják meg: „három csomag gabona az első fajtából, kettő a másodikból és egy a harmadikból összesen 39 súlyegységet nyom (a másik két egyenlet tartalmát ugyanígy fogalmazzák meg). Az egyenletrendszert a következő táblázat alakjában írják fel:

1	2	3	1. fajta
2	3	2	2. fajta
3	1	1	3. fajta
26	34	39	súlyegység

A második oszlop számait megszorozzák a harmadik oszlop „első fajta" számával, azaz 3-mal, és az így kapott eredményekből kivonják a harmadik oszlop számainak kétszeresét. Azután a harmadik oszlop számait kivonják az első oszlop számainak háromszorosából. Ily módon a következő táblázatot kapják:

4	5	2. fajta
8	1	3. fajta
39	24	súlyegység

Ugyanezzel a módszerrel — amelyben nem nehéz felismerni az „angol módszert" („az egyenlő együtthatók módszerét") — oldják meg a kapott kétismeretlenes egyenletrendszert is, ami a

36	3. fajta
99	súlyegység

táblázatot adja; innen $z=\frac{99}{36}=2\frac{3}{4}$, stb. Az olyan esetekben, amikor az itt leírt algoritmus — mai terminológiával kifejezve — negatív számokra vezet, az „Aritmetika kilenc fejezetben" a „cszsen-fu" módszert ajánlja („cszsen" „hozzáadandót", „fu" pedig „kivonandót" jelent; az ilyen számokat különböző színekkel jelölték: a „cszsen"-t pirossal, a „fu"-t feketével). Negatív előjelű megoldásokat kínai forrásokban nem találunk, a negatív együtthatókat ellenben a kínai matematikusok könnyen kezelik. Az „Aritmetika kilenc fejezetben" c. könyv legutolsó része tartalmazza PYTHAGORAS tételét, tisztán aritmetikai megfogalmazásban, és néhány, a tétel alkalmazására szolgáló feladatot is a megoldással együtt.

A naptárszámítások kapcsán Kínában érdeklődés támadt az ilyenféle feladatok iránt: egy szám 3-mal osztva 2-t, 5-tel osztva 3-at, 7-tel osztva 2-t ad maradékul; melyik ez a szám? SZUN CZI (a II. és a VI. század között), majd — teljesebben — CIN CZU SAO (XIII. század) példákon bemutatva leírja az ilyen feladatok megoldásának szabályszerű algoritmusát; GAUSS német matematikus ugyanezt sokkal később (1801-ben) fedezte fel. A geometria terén a kínaiak számítási módszereinek magas fejlettségi fokát CU CSUN-CSZSI (az V. század második fele) eredménye bizonyítja: CU CSUN-CSZSI megmutatta, hogy a kör kerületének és átmérőjének viszonyára (π)

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

Különösen jelentősek a kínaiak munkái az egyenletek numerikus megoldása terén. Harmadfokú egyenletre vezető geometriai feladatok elsőízben VAN SZJAO-TUNG csillagásznál és matematikusnál (a VII. század első fele) találhatók. A negyed- és ennél is magasabbfokú egyenletek megoldási módszereiről CIN CZJU-SAO, LI JE, JAN HUEJ és CSZSU SI-CE XIII—XIV. századbeli matematikusok munkái szólnak. Az általuk használt *„égi elem-módszer"* lényegében azonos azzal, amely ma HORNER módszere néven ismeretes (HORNER angol matematikusról, aki újra felfedezte azt 1819-ben). Érdekes következménye éppen a közelítő számítási módszerek magas fejlettségi fokának, hogy CIN CZJU-SAO „A matematika kilenc fejezete" c. értekezésében általánosan oldja meg a bikvadratikus egyenletet, és itt a közbenső számításokban szerepel teljes negyedfokú egyenlet is.

A középkori kínai matematika a XVI. század táján érte el legmagasabb fejlettségi fokát. A görög-római, indiai, középázsiai és a középkori nyugateurópai matematikával való kapcsolatai nincsenek kikutatva; azt azonban, hogy ilyen kapcsolatok voltak, bizonyítja több feladatnak különböző országokból származó kéziratokban ugyanazokkal a numerikus adatokkal való ismétlődése. Így például a fentebb említett kínai feladat: az

$$x \equiv 2 \pmod 3,$$
$$x \equiv 3 \pmod 5,$$
$$x \equiv 2 \pmod 7,$$

kongruenciarendszer megoldása, pontosan megismétlődik LEONARDO DA PISA olasz matematikus „Könyv az abacusról" c. munkájában (1292).

India. Az indiai matematika virágzása az V—XII. század idejére esik [a legismertebb indiai matematikusok: ARIABHATA (az V. század végén), BRAMAGUPTA (VII. század), BHASZKARA (XII. század)]. Az indiaiaknak a matematika terén két alapvető érdemük van. Az egyik a ma használatos tízes számrendszer bevezetése és közhasználatúvá tétele, a 0-nak, mint számjegynek rendszeres alkalmazásával a megfelelő helyi értékű egységek hiányának jelölésére (hasonló jelölés a kései babilóniai szövegek hatvanasszámrendszerű írásmódjában csak helyenként található), és ennek alapján tökéletesebb számolástechnika kidolgozása, beleértve ebbe a többjegyű számok osztásának a maihoz közelálló módszerét (ez a művelet természetesen már az ókori matematikusoknak sem okozott elvi nehézségeket, végrehajtása azonban akkor sokkal bonyolultabb volt). Az Indiában használt — ma „arab"-oknak nevezett — számjegyek eredete nincs teljesen tisztázva. Az indiai matematikusok másik, még jelentősebb alapvető érdeme a nem csupán a törtekkel, hanem az irracionális és a negatív számokkal is korlátozás nélkül operáló algebra megteremtése. A „kivonandó" számok (amelyeket felül ponttal jelöltek) az indiaiaknál — DIOPHANTOSSZAL ellentétben és a kínaiakhoz hasonlóan — önálló létjogosultságot nyernek. Így például a

$$\left.\begin{array}{l} ya\ va\ 3\ ya\ 10\ ru\ \dot{8} \\ ya\ va\ 1\ ya\ \ 0\ ru\ 1 \end{array}\right| \quad (3x^2+10x-8=x^2+1)$$

egyenlet (*Bramagupta* szerint) a

$$\begin{array}{r|l} ru\ \dot{9} & \\ ya\ va\ \dot{2}\ ya\ \dot{10} & (-9=-2x^2-10x) \end{array}$$

alakra hozható. A negatív számok valóságos értelméről az indiaiaknál csak egyes említéseket találunk (a vagyon és az adósság ellentétével kapcsolatban), rendszerint viszont a feladatok megoldásainak értelmezésénél a negatív megoldásokat értelmetleneknek tartják. Általában meg kell jegyeznünk, hogy míg a tört- és az irracionális számok fogalmai keletkezésük pillanatától kezdve kapcsolatban állnak a folytonos mennyiségek mérésével, a negatív számok fogalma lényegében az algebra belső szükségleteiből ered és csak később (teljes mértékben a XVII. században) nyer önálló jelentőséget.

Bramagupta általános szabályt alkotott a másodfokú egyenletek megoldására: a negatív számok felhasználásával egyesítette azokat az eseteket, amelyeket Diophantosz még külön tárgyalt. Bhaszkara rámutatott a négyzetgyök kétértékű voltára, foglalkozott a $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ alakú irracionális kifejezések vizsgálatával, olyan átalakításokat végzett el, mint például:

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

birtokában volt törtek nevezőinek racionalizálását lehetővé tevő módszereknek, megoldott egyes speciális alakú magasabbfokú egyenleteket. Bramagupta és Bhaszkara általános módszereket adtak a kétismeretlenes elsőfokú határozatlan egyenletek, valamint az $ax^2+b=cy^2$ és $xy=ax+by+c$ alakú egyenletek egész számú megoldásainak meghatározására.

A trigonometriában az indiai matematikusok érdeme volt a sinus-, cosinus- és sinusversus-görbe bevezetése.

Közép-Ázsia és a Közel-Kelet. Az arab hódítások — rövid idő alatt hatalmas területek egyesültek az arab kalifák hatalma alatt — arra vezettek, hogy a IX—XV. században Közép-Ázsia, a Közel-Kelet és a Pireneusi Félsziget tudósai az arab nyelvet használták. A tudomány a világkereskedelmi városokban a széleskörű nemzetközi érintkezés és a nagy tudományos kezdeményezések állami támogatása mellett fejlődésnek indul. Így például a IX. század elején Al Mamun kalifa parancsára pontos délkörívmérést végeztek, a XIII. században Dzsingisz kán unokája, Hulagu kán Maragában obszervatóriumot épített Naszireddin Tuszi azerbajdzsáni tudós számára, és könyvtárakat alapítottak (a cordobai könyvtár állománya a IX. században hatszázezer kötet volt). Fényes betetőzése volt ennek a korszaknak a XV. században Ugul-bek üzbég csillagász tevékenysége, aki szamarkandi házában és obszervatóriumában több mint száz tudóst gyűjtött össze és csillagászati megfigyeléseket, matematikai táblázat-kiszámításokat stb. szervezett. Tevékenységének eredményeit hosszú időn át nem múlták felül.

A nyugat-európai tudományban a legutóbbi időkig az a vélemény uralkodott, hogy az „arab kultúra" szerepe a matematika területén lényegében csupán az ókori világ és India matematikai felfedezéseinek megőrzése és Nyugat-Európának való átadása volt. Valóban, a görög matematikusok művei Nyugat-Európában először arab fordításokból váltak ismeretessé. Mind világosabbá válik azonban, hogy az arab nyelven író matematikusoknak — közöttük azoknak, akik a mai Szovjet-Közép-Ázsia és Szovjet-Kaukázusvidék népeinek (horezmiek, üzbégek, tadzsikok, azerbajdzsániak) fiai voltak — a matematika fejlődésében vitt szerepe ennél lényegesen több volt.

A IX. század első felében Muhammed ben Musza Chorezmi középázsiai tudós elsőnek tárgyalta az algebrát mint önálló tudományt. Az „algebra" szó maga is Chorezmi „Al-dzsebr" című munkájának címéből ered; a korai középkor európai matematikusai ebből a munkából ismerték meg a másodfokú egyenletek megoldását. Nem sokkal Chorezmi után kezdenek először rendszeresen foglalkozni harmadfokú egyenletekre vezető feladatokkal. Biruni középázsiai tudós (IX. század vége — X. század első fele) a szabályos tízszög oldalának meghatározását az $x^3 + 1 = 3x$ egyenlet megoldására vezette vissza és „hatvanadostörtek" alakjában közelítőleg meg is kapta ennek az egyenletnek a megoldását. A szabályos hétszög szerkesztésének feladatát az $x^3 + 1 = 2x + x^2$ egyenlet megoldására vezették vissza. IBN-AL-HAJTAM iraki matematikus (X. század vége — XI. század eleje) egy geometriai optikai problémát negyedfokú egyenletre redukált; OMÁR KHAJJAM[21] tadzsik matematikus (XI. század vége — XII. század eleje) rendszeres módon vizsgálta a harmadfokú egyenleteket, osztályozta őket és meghatározta megoldhatóságuk feltételeit (a megoldhatóságon pozitív gyök létezését értve). Khajjam algebrai munkájában megírja, hogy sokat foglalkozott a harmadfokú egyenletek pontos megoldására irányuló vizsgálatokkal. Ebben az irányban a középázsiai matematikusok kutatásait nem koronázta siker, a megoldásnak mind geometriai (kúpszeletek felhasználásán alapuló), mind közelítő módszereit azonban jól ismerték. A középázsiai és a közelkeleti matematikusok, bár elsajátították az indusoktól a tízes számrendszert a zérus használatával együtt, a nagyobb tudományos számításokban szívesebben alkalmazták a hatvanas számrendszert (nyilván összefüggésben azzal, hogy a csillagászatban a szögek hatvanados beosztása volt használatos). Megalkották az egész számok és a „hatvanadostörtek" egységes hatvanasszámrendszerbeli írásmódját is; így a

$$43;\ 0;\ 16;\ \dotplus 8;\ 37$$

jelölés a $\dotplus$ jel az egész és a tört helyi értékek elválasztására szolgál) a

$$43{,}60^2 + 0{,}60 + 16 + \frac{8}{60} + \frac{37}{60^2}$$

számot jelölte. ABU-L-VEFA iráni tudós (X. század) már használta ezt az írásmódot a harmadik, negyedik és ötödik gyök vonásáról írt munkájában. OMAR KHAJJAM egy művében, amely nem maradt fenn, megírta tetszőleges (természetes szám-) kitevőjű gyök vonásának módját.

A csillagászati és geodéziai munkák kapcsán nagy fejlődésnek indult a trigonometria. SZIRIEC-AL-BATANI (IX. század második fele — X. század eleje) bevezette a sinus, a tangens és a cotangens, ABU-L-VEFA pedig mind a hat trigonometrikus függvény használatát. Ugyancsak ABU-L-VEFA szavakkal kifejezve megadta a trigonometrikus függvények közti algebrai összefüggéseket, sinus- és tangenstáblázatot készített (az előbbi a szögeket tízpercenként, a függvényértékeket pedig $\frac{1}{60^4}$ pontossággal tartalmazta) és felállította a gömbháromszögek sinustételét. NASZIREDDIN TUSZI azerbajdzsáni tudós (XIII. század)[22] rendszeresen végigvizsgálta a gömbháromszögek megoldásának mind a hat esetét és ezzel kiépítette a szférikus trigonometriát; a két legnehezebb eset (a szögek meghatározása az oldalakból és az oldalaké a szögekből) megoldását ő maga találta meg. NASZIREDDIN lefordította arabra EUKLIDÉSZ „Elemei"-t és kommentárokat fűzött hozzá; kommentárokat írt az „Elemek"-hez már Khajjam is. Ezekben főproblémaként a párhuzamosok posztulátumának bizonyíthatósága szerepel. KHAJJAM és NASZIREDDIN saját műveikben nagy figyelmet fordítottak a tételek exakt bizonyítására. Elvi jelentőségű tény Khajjámnál és Naszireddinnél az, hogy náluk jelent meg a (pozitív) valós szám világos fogalma. Így például két tetszőleges (összemérhető vagy nem összemérhető) mennyiség arányáról NASZIREDDIN ezt írja: „bármely ilyen arányt számnak nevezhetünk, melyet az egység ugyanúgy meghatároz, mint az arány egyik tagja a másikat".

Külön meg kell említenünk végül HILSZEDDIN DZSEMSID IBN-MASZUD AL-KASI szamarkandi matematikusnak (XV. század eleje), UGUL-BEK munkatársának eredményeit.[23] DZSEMSID rendszeres tárgyalását adta a tizedestörtek aritmetikájának; a tizedestörteket — helyesen — hasz-

[21] L. az Enciklopédia Омар Хайям c. cikkét.
[22] L. az Enciklopédia Насиреддин c. cikkét.
[23] L. az Enciklopédia Джемшид ибн-Масуд аль-Каши c. cikkét.

nálhatóbbaknak tartotta a hatvanadostörteknél. A tizedestörtekkel való számolás módszereinek hozzá hasonló tökéletességét Európában csak a XVI. század végén érte el Stevinus flamand tudós. A gyökvonással kapcsolatosan Dzsemsid szavakkal megfogalmazza Newton binomiális tételét és rámutatott a binomiális együtthatók $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$ képzési szabályára. „Értekezés a körről" c. munkájában (1427 körül) meghatározza a körbe és a kör köré írt $3{,}2^{28}$ oldalú szabályos sokszög kerületét és ily módon kiszámítja a π értékét 17 tizedesjegynyi pontossággal. Terjedelmes sinus-táblázatokat is készít és ezzel kapcsolatban igen jó iterációs módszert ad az egyenletek numerikus megoldására.

Nyugat-Európa a XVI. századig. A XII—XV. század Nyugat-Európa matematikájában lényegében az ókori és a keleti örökség elsajátításának időszaka volt. Az európai matematikai kultúra azonban már ebben a korban is, amelyben különösebb jelentőségű új matematikai felfedezések nem születtek, kitűnik több általános jellegű haladó vonásával; ezek tették lehetővé a későbbi századokban bekövetkező gyors fejlődést. Az olasz városok gyorsan gazdagodó és politikailag független polgárságának magas igényei olyan tankönyvek megírására és széleskörű elterjedésére vezettek, amelyek egyesítették magukban a gyakorlati végső célkitűzést a nagy tudományos igénnyel és alapossággal. Nem egészen 100 évvel a görög és arab matematikai művek első latin fordításainak megjelenése (XII. sz.) után a pisai Leonardo Fibonacci olasz matematikus megjelenteti „Könyv az abacusról" (1202) és „Geometriai praktikum" (1220) című, aritmetikával, kereskedelmi számtannal, algebrával és geometriával foglalkozó munkáit. Ezeknek a könyveknek nagy sikerük volt; a „Könyv az abbacusról" 1228-ban új, átdolgozott változatban terjedt. Az említett korszak végén (a könyvnyomtatás feltalálásával) az olyan tankönyvek, mint Lucchi Paceoli olasz matematikusnak az aritmetikáról, geometriáról, az arányokról és aránypárokról szóló könyve, még jobban elterjedtek. E gyakorlati irány mellett az elméleti tudományos gondolkodás fő központjai az egyetemek lettek. Az algebrának elméleti tudományként és nem csupán gyakorlati feladatok megoldására szolgáló szabályok gyűjteményeként való fejlődése nyilvánul meg az irracionális számnak — mint két össze nem mérhető mennyiség hányadosának — világos felfogásában [Bradwardine angol (XIV. század első fele) és Oresme francia matematikus (XIV. század közepe)], és különösen a tört, valamint a negatív és zérus hatványkitevő bevezetésében (az előbbi Oresme, e két utóbbi pedig Chuquet francia matematikus nevéhez fűződik). Ugyanebben az időben merülnek fel — a kort megelőzve — a végtelen kicsiny és a végtelen nagy mennyiségekkel kapcsolatos első gondolatok. [Bradwardine és Nicolaus Cusanus német matematikus (XV. század első fele)], a függvényeknek a maximum és a minimum környezetében való viselkedéséről (Oresme) stb. A tudományos kutatás ez időbeli nagy fellendülése nemcsak a görög és arab szerzők műveinek lefordításában és kiadásában nyilvánul meg, hanem olyan kezdeményezésekben is, mint például a Regiomontanus (I. Müller) német matematikus által számított terjedelmes trigonometriai táblázatok kiadása. Ugyancsak Regiomontanus a szerzője „Az összes lehetséges háromszögek öt könyve" c. trigonometriai munkának is (1461, közzétéve 1533-ban). Nagymértékben tökéletesedik a matematikai írásmód; így Chuquet jelölései a XV. század végén, bár formailag különböznek a mai írásmódtól, tömörség tekintetében majdnem elérik azt, pl.

$$R^2\; 4^1\, \bar{p}\, 4^1\, \bar{p}\, 2^1\, \bar{p}\, 1$$

A mai írásmód szerint:

$$\sqrt{4x^2 + 4x} + 2x + 1.$$

Ennél is fontosabb a tudományos kritika és vita kifejlődése, aminek következtében például Nicolaus Cusanus pontosként közölt, valójában azonban csak közelítő körrektifikációs módszerét Regiomontanus egyik speciális munkájában *megcáfolta.* Meg kell említenünk azt is, hogy a nehéz feladatok megoldására irányuló koncentrált kutatás következtében — amit az ilyen téren szokássá vált nyilvános verseny is ösztönzött — megjelentek az első megoldhatatlansági bizonyítások. Már LEONARDO PISANO bebizonyította „Virág“ c. munkájában (1225 körül), amelyben a saját maga által legszebben megoldott problémákat gyűjtötte össze, hogy az $x^3+2x^2+10x=20$ egyenlet nem oldható meg, nemcsak racionális számokkal, hanem egyszerűbb ($\sqrt{a+\sqrt{b}}$ stb. alakú) négyzetgyökös kifejezésekkel sem.

Nyugat-Európa a XVI. században. A XVI. század volt az első, amikor Nyugat-Európa fölénybe került az ókorral és Kelettel szemben. Áll ez a csillagászatra (KOPERNIKUS lengyel csillagász felfedezése), a mechanikára (a XVI. század végén már megjelennek GALILEI olasz tudós első vizsgálatai), és egészben véve a matematikára is, annak ellenére, hogy az európai matematika ekkor néhány tekintetben még elmarad a XV. századi középázsiai matematikusok eredményeitől, és hogy a valóban nagy új eszmék, amelyek meghatározták az új európai matematika további fejlődését, csak a következő, XVII. században jelennek meg. A XVI. században úgy látszott, hogy a matematikában az új korszak a harmad- és a negyedfokú algebrai egyenletek megoldásának felfedezésével kezdődik [az előbbi FERRO (1515 körül) és később — tőle függetlenül — TARTAGLIA (1530 körül), ez utóbbi FERRARI (1545) nevéhez fűződik — mindhárman olaszok]; ezeknek az egyenleteknek az általános megoldását századokon át megvalósíthatatlannak tartották.[24] CARDANO olasz matematikus a harmadfokú egyenleteket vizsgálva felfedezte az ún. irreducibilis esetet, amikor az egyenlet valós gyökei csak komplex számok segítségével fejezhetők ki. Ennek folytán CARDANO — habár nagyon bizonytalanul — felismerte a komplex számokkal való számolás előnyeit. Ugyancsak CARDANO általános módszereket alkotott tetszőleges fokú egyenletek közelítő megoldására. További fejlődését jelentették az algebrának VIÈTE[25] francia matematikus eredményei, aki megmutatta például azt, hogyan lehet egy n-edfokú egyenletet a gyökeiből felírni. VIÈTE nevéhez fűződik az algebrában a betűkkel való számolás mai formájának bevezetése (1591). (Ő előtte csak az ismeretlenek jelölésére használtak betűket.) A XVI. század egyéb eredményei közül meg kell említenünk a négyzetgyökök lánctörtbe fejtését (BOMBELLI olasz matematikus, 1572), a π első pontos analitikus kifejezését, végtelen szorzat alakjában (VIÈTE, 1593) és a trigonometrikus függvényeknek tetszőleges pozitív argumentumra való értelmezését (VIÈTE, 1594). A perspektivikus ábrázolás elméletét, mely a geometriában már a XVI. század előtt kifejlődött, DÜRER, a híres német festőművész dolgozza ki (1525). VIÈTE algebrai módszerekkel vizsgálta geometriai szerkesztések elvégezhetőségét; ugyanakkor éleselméjű mestere volt a szintetikus szerkesztési feladatoknak is (1600-ban például újra felfedezte APOLLONIUS feladványának — három adott kört érintő kör szerkesztése — elveszett megoldását). STIEFEL német matematikus DZSEMSIDtől függetlenül felfedezte a binomiális együtthatók képzésének törvényét (1544), STEVINUS flamand tudós pedig kidolgozta a tizedestörtekkel való műveletek szabályait (1585).

Oroszország a XVIII. századig. A matematikai műveltség Oroszországban a IX—XIII. században a legkulturáltabb keleti és nyugat-európai országok színvonalán állott. Ezután azonban a mongol betörés miatt hosszú időre visszavetődött. A XV—XVI. században az orosz állam megerősödése és az ország gazdasági felemelkedése következtében a társadalom követelményei a matematikai ismeretek tekintetében jelentős mértékben megnövekedtek. A XVI. század végén és különösen a XVII. század elején sok kézzel írt számtani és mértani tankönyv jelent meg; ezek széleskörű, a gyakorlati tevékenységhez (kereskedelem, adóügy, tüzérség, építészet stb.) szükséges ismereteket adtak.

[24] E felfedezések története részletesebben az Enciklopédia Алгебра és Кардано формула c. cikkeiben található.
[25] L. az Enciklopédia Виет c. cikkét.

Ó-Oroszországban a szláv abc-n alapuló, a görög-bizáncihoz hasonló számrendszer volt elterjedve. Minden egyes betű elhelyezésétől függetlenül mindig ugyanazt a számot jelentette; ha a betűt számnak használták, akkor föléje a ҃ jelet tették. A betűk а-tól ѳ-ig az egyeseket jelölték, і-től ч-ig a tízeseket, р-től ц-ig a százasokat. Ugyanezek a betűk jelenthettek magasabb helyiértékeket is, ekkor azonban ezt külön jelölések mutatták. Így például az ezer jelölésére a megfelelő betű elé a ҂ jelet tették. A szláv számírás az orosz matematikai irodalomban egészen a XVIII. század kezdetéig előfordul, a XVI. század végétől kezdve azonban mindinkább kiszorítja a helyiértékes írásmódú tízes számrendszer.

A legrégibb ismert orosz matematikai munka 1136-ból való, szerzője Kirik novgorodi szerzetes. Ez a munka időszámítási-aritmetikai tárgyú és mutatja, hogy abban az időben Oroszországban már meg tudták oldani a húsvét meghatározásának bonyolult feladatát (a húsvét időpontjának bármely évre való meghatározását), amely matematikai tekintetben elsőfokú határozatlan egyenletek egész számú megoldását követeli meg. A XVI—XVII. századból származó aritmetikai kéziratok a szláv és az arab számírásmód ismertetése mellett a pozitív egész számokkal való aritmetikai műveleteket tartalmazzák, valamint a törtekkel való műveletek szabályainak részletes ismertetését, a hármasszabályt és az elsőfokú egyismeretlenes egyenleteknek a regula falsi alkalmazásával való megoldását. Az általános szabályok gyakorlati alkalmazására a kéziratok sok reális tartalmú példát hoznak fel és ismertetik az ún. deszkaszámolókészüléket, az orosz számolókészülékek ősét. Ugyanilyen felépítésű L. F. Magnyickij híres „Aritmetiká"-jának első, számtani része is (1703). A geometriai kéziratok, amelyek többségükben szintén gyakorlati célokat követtek, idomok területének és testek köbtartalmának meghatározását tartalmazták, gyakran közelítő módon; felhasználták a hasonló háromszögek tulajdonságait és a Pythagoras-tételt.

Meg kell említenünk, hogy az orosz matematikai kéziratokat mindmáig nem tanulmányozták még kellőleg. Az utóbbi években (1950) sikerült felfedezni több fontos okmányt, amelyek mutatják, hogy a XV—XVII. században Oroszországban érdeklődtek a matematika filozófiai jellegű problémái iránt, mint például a geometriai alapfogalmak (pont, egyenes, gömb stb.) definíciója, a végtelen, a folytonosság fogalmával kapcsolatos problémák, stb.

3. A változó mennyiségek matematikája megalkotásának korszaka

A XVII. században a matematika fejlődésének alapvetően új korszaka kezdődik. Engels ezt írja erről: „A fordulópont a matematikában Descartes *variábilis* (változó) mennyisége volt. Ezzel bevonult a matematikába a mozgás, és ezzel a dialektika, és ezzel rögtön szükségessé vált a differenciál- és integrálszámítás is... (Engels: A természet dialektikája, teljes magyar kiadás, Szikra, Budapest, 1952, 268. oldal.) A matematika által vizsgált mennyiségi viszonyok és térformák köre most már nem merül ki a számokkal, mennyiségekkel és geometriai idomokkal. Ezt alapjában véve a mozgás, a változás gondolatának a matematikába világos formában való bevezetése tette lehetővé. A mennyiségek közötti összefüggés gondolata rejtett formában már az algebrában is megtalálható (az összeg értéke függ az összeadandók értékétől stb.). A mennyiségi összefüggéseknek mozgásukban való megragadásához azonban az összefüggést önmagát kellett a vizsgálat tárgyává tenni. Így kerül előtérbe a *függvény* fogalma, és ez a továbbiakban ugyanúgy önálló és legfőbb kutatási tárgy lesz, mint azelőtt a mennyiség vagy a szám fogalma. A változó mennyiségek és függvénykapcsolatok vizsgálata elvezet továbbá a matematikai analízis alapfogalmaihoz, amelyek világos formában beviszik a matematikába a végtelen gondolatát: a *határérték*, a *derivált*, a *differenciál*, az *integrál* fogalmához.[27] Megteremtik a végtelen kicsiny mennyiségek analízisét, elsősorban a *differenciálszámítás* és az *integrálszámítás* formájában;[28] ezek lehetővé teszik a változó mennyiségek véges nagyságú megváltozásai és egy-egy értékük közvetlen környezetében való viselkedése közti összefüggés meghatározását. A mechanika és a fizika alaptörvényeit *differenciálegyenletek*[29] alakjában írják fel; az ilyen egyenletek megoldása a matematika legfontosabb problémái közé kerül. Másféle követelményekkel meghatározott ismeretlen függvények megkeresése a *variációszámítás* tárgyát alkotja.[30] Ily módon az olyan egyenletek mellett, amelyekben az ismeretlenek számok, megjelennek olyan egyenletek is, amelyekben ismeretlen függvények meghatározása a feladat.

A geometria tárgyköre szintén lényegesen kibővül: helyet kap a geometriában a mozgás és a transzformáció.[31] Ugyanazzal a mozgással vagy ugyanazzal a transzformációval azonban a legkülönbözőbb idomok helyezhetők vagy alakíthatók át. Ennélfogva a geometria elkezdi a mozgást és a transzformációkat önmagukban vizsgálni. Igy például a *projektív geometria*[32] egyik fő tárgya maguknak a sík- és térbeli projektív transzformációknak a vizsgálata. Ezeknek a gondolatoknak tudatos kibontakozása egyébként csak a XVIII. század végén, a XIX. század elején következik be. De jóval hamarabb, a XVII. században az *analitikus geometria*[33] megteremtésével elvi változás következik be a geometriának a matematika többi részéhez való viszonyában: egyetemes módszert fedeztek fel a geometriai problémáknak az algebra és az analízis nyelvére való lefordítására és tisztán algebrai és analitikus módszerekkel való megoldására, másfelől pedig széles lehetőség nyílt az algebra és az analízis tényeinek geometriai ábrázolására (illusztrációjára), például a függvénykapcsolatok grafikus ábrázolásával.[34] Igaz, ezt az utóbbi lehetőséget korlátozza az a tény, hogy a tér háromdimenziós. Mindez arra indította a matematikusokat, hogy az aritmetikát, az algebrát és az analízist a függvénytannal a „tiszta" matematika részeinek tekintsék, amely a számok, az állandó, illetve a változó mennyiségek közti összefüggések tudománya, a geometriát pedig

27 L. az Enciklopédia Предел, Производная, Дифференциал, Интеграл c. cikkeit.

28 L. az Enciklopédia Дифференциальное исчисление, Интегральное исчисление c. cikkeit.

29 L. az Enciklopédia Дифференциальные уравнения c. cikkét.

30 L. az Enciklopédia Вариационное исчисление c. cikkét.

31 L. az Enciklopédia Движение (в геометрии) és Преобразования (геометрические) c. cikkét.

32 L. az Enciklopédia Проективная геометрия c. cikkét.

33 L. az Enciklopédia Аналитическая геометрия c. cikkét.

34 L. az Enciklopédia Координаты c. cikkét.

az „alkalmazott" matematika első fejezetének (a második fejezet például a mechanikát tartalmazná). A geometria eszerint alkalmazza a „tiszta" matematika eredményeit és kialakítja saját módszereit a geometriai alakzatok és transzformációk különleges vizsgálatára. A matematika fejlődésének következő szakaszában a geometriának ez az alárendelt helyzete ismét megszűnt.

A XVII. és XVIII. század algebrája jórészt az $F(x)=0$ egyenlet baloldalának, mint az x változó függvényének vizsgálatából eredő következményekkel foglalkozott. A problémának ez a kezelési módja lehetővé tette a valós gyökök számának vizsgálatát, módszereket adott a valós gyökök elválasztására és közelítő meghatározására, a komplex számok körében pedig arra vezetett, hogy D'ALEMBERT francia matematikus — nem teljesen szigorúan, de a XVIII. századbeli matematikusok számára eléggé meggyőzően — bebizonyította „az algebra alaptételét", amely szerint bármely algebrai egyenletnek van legalább egy gyöke. A „tiszta algebra" — mely nem használja fel a mennyiségek folytonos változásának az analízisből kölcsönvett fogalmát — szintén jelentős eredményeket ért el a XVII—XVIII. században. Elegendő a következő néhány példára rámutatnunk: a determinánsok segítségével általánosan előállították tetszőleges lineáris egyenletrendszer megoldását; kidolgozták a polinomok oszthatóságának, az ismeretlenek kiküszöbölésének elméletét, stb. A tulajdonképpeni algebra tényeinek és módszereinek a matematikai analízis tényeitől és módszereitől való tudatos elválasztása azonban csak a legutóbbi időre jellemző (XIX. század második fele—XX. század). A XVII—XVIII. században az algebrát legnagyobbrészt az analízis első fejezetének fogták fel, amely a mennyiségek közötti tetszőleges összefüggések vizsgálata és tetszőleges egyenletek megoldása helyett csak algebrai összefüggésekkel és algebrai egyenletekkel foglalkozik.

A változó mennyiségek új matematikájának megteremtése a XVII. században az élenjáró nyugateurópai országok matematikusainak műve volt. A XVIII. században a pétervári tudományos akadémia is a matematikai kutatás egyik fő központjává lesz; itt dolgozott az akkori idők egész sor külföldi származású kiváló matematikusa (L. EULER, D. BERNOULLI), és lassanként kialakult az orosz matematikai iskola, amelynek munkássága a XIX. század elejétől kezdve nagyszerű eredményekben bontakozott ki.

XVII. század. A matematika fentebb jellemzett új korszakának bekövetkezése szervesen összefügg annak az új matematikai módszerű természettudománynak XVII. századbeli megteremtésével, amelynek célkitűzése az egyes természeti jelenségek lefolyásának általános érvényű, matematikailag megfogalmazható természeti törvényekkel való magyarázata volt. A XVII. században igazán mélyreható és nagyszabású matematikai kutatások csak a természettudományok két területén folytak: a mechanikában [GALILEI olasz tudós felfedezi a testek esésének (1632, 1638), KEPLER német csillagász a bolygók mozgásának törvényeit (1609, 1619), NEWTON angol tudós felállítja az általános tömegvonzás törvényét (1687)] és az optikában [GALILEI (1609) és KEPLER (1611)] távcsöveket készítenek, NEWTON felépíti a fény korpuszkuláris, HUYGENS holland és HOOKE angol tudós pedig a hullámelméletét]. A természettudomány egyéb területein a matematika alkalmazása egyelőre az első, legegyszerűbb kvantitatív törvényszerűségek megállapítására szorítkozik [pl. BOYLE törvénye a gázok térfogatának és nyomásának összefüggéséről (1662), HOOKE rugalmasságtani törvénye (1660) stb.]. Mindazonáltal a XVII. század racionalista filozófiája (DESCARTES, SPINOZA, LEIBNIZ) már felveti a matematikai módszer egyetemességének gondolatát, amely a matematika e — par excellence filozófiai jellegű — fejlődési szakaszának tendenciáit különösen világossá teszi.

Noha a XVII. században megjelenő új matematikai módszereknek a technika problémáira való alkalmazása csak a következő két évszázadban bontakozott ki szélesen, „a gépek szórványos alkalmazása a XVII. században vált igen fontossá, mert e korszak nagy matematikusai számára gyakorlati támaszpontot és ösztönzést jelentett a modern mechanika megteremtésére". (MARX: A tőke, I. kötet, Szikra Kiadás, Budapest, 1948., 376. oldal.)

Új, komoly matematikai problémákat vet fel a XVII. században az óragyártás tökéletesedése és az a tény, hogy hajózási célokra pontos kronométerekre volt szükség. Az ingaórák egyik feltalálója HUYGENS volt (1657). Tizenhat évvel e találmánya után, 1673-ban megjelenteti „Ingaórák" c. könyvét, mely példaképe a technikai konstruktív gondolkodás és — az akkori időkhöz képest — finom matematikai kutatómódszerek szerves egyesítésének. Gyakorlati feladatokat adott a matematikának a XVII. században a kartográfia, a ballisztika és a hidraulika is. A XVII. századbeli szerzők megértik és szeretik hangsúlyozni a matematika gyakorlati jelentőségét. A XVII. században a polgári társadalom fejlődése lehetővé tette, hogy évszázadokra előre adjanak feladatokat a tudománynak, teljes mértékben felismerve e feladatok gyakorlati értékét. A természettudományokkal szoros kapcsolatot tartva, a matematika a XVII. században fejlődésének új szakaszába lépett. Azokat az új fogalmakat, amelyek a matematika régi formális logikai kategóriáiba nem fértek be, igazolták a valóságos világ objektíve létező összefüggései. Így például a differenciálhányados fogalmának realitása következett a sebesség fogalmának reális létezéséből a mechanikában, a kérdés tehát nem úgy vetődött fel, hogy logikailag igazolható-e a differenciálhányados fogalma, hanem úgy, hogy *hogyan* igazolható.

A XVII. század matematikai vívmányainak sorát a *logaritmus*[35] felfedezése nyitja meg. NAPIER skót matematikus, mikor táblázatait 1614-ben közzéteszi, ezek megszerkesztésénél nem a számtani és a mértani haladvány régóta ismert tulajdonságaira hivatkozik, hanem abból indul ki, hogy a számok változásakor a logaritmus „folyamatosan" változik — azaz elsőnek vezeti be

[35] L. az Enciklopédia Логарифм c. cikkét.

az olyan folytonos függvény fogalmát, amely nincs előre megadva semmiféle algebrai kifejezéssel vagy geometriai konstrukcióval. 1637-ben DESCARTES[36] francia matematikus közzéteszi „Geometriá"-ját, amely a koordinátamódszer alapjait, valamint a görbék osztályozását tartalmazza. A görbék osztályozásánál Descartes megkülönbözteti egymástól az algebrai és transzcendens görbéket. Az algebrai görbéket „fajok" szerint osztályozza (m-edfajú görbéknek az akkori terminológia szerint azokat tekintették, amelyeket ma $(2m-1)$-ed- és $2m$-edrendűeknek nevezünk). Az algebrában vizsgálják a tetszőleges fokú egyenletek valós gyökeit, szoros kapcsolatban azzal a ténnyel, hogy a $P(x)=0$ egyenlet valós gyökei előállíthatók az $y=P(x)$ görbének az abszcisszatengellyel való metszéspontjaival (DESCARTES, NEWTON és ROLLE francia matematikus). FERMAT francia matematikus maximum-minimum-vizsgálatai és görbeérintő-meghatározásai lényegileg már differenciálszámítási módszereket tartalmaznak, noha ezek a módszerek még nincsenek kikristályosodva, és a „derivált", „differenciál" szavakat még nem ejti ki. A végtelen kicsiny mennyiségek analízisének másik kiindulópontja KEPLER német csillagász (1615) és CAVALIERI olasz matematikus (1635) által *kifejlesztett „oszthatatlan elemek módszere"*, amelyet KEPLER és CAVALIERI forgástestek köbtartalmának meghatározására és több más probléma megoldásában használtak fel. Ebben az a valódi elvi új, amelyet a végtelen kicsiny mennyiségek analízisének alapfogalmai jelentenek, misztikus formában, megoldatlan ellentmondásként jelentkezik (így például a test köbtartalma és a köbtartalom nélküli síkmetszetek között, amelyek alapján a köbtartalom meghatározandó). Érthető tehát, ha KEPLER és CAVALIERI módszereit GULDIN svájci matematikus, aki szívesebben használta a klasszikus, szigorú exhausztiós módszert, kritikával fogadta. A végtelen kicsiny mennyiségek minden további nélküli használata azonban döntő győzelmet aratott FERMAT és PASCAL francia matematikusoknak, valamint WALLIS angol matematikusnak a területek meghatározásáról („kvadratúrákról") szóló munkáival. Így lényegében geometriailag megalapozták a differenciál- és integrálszámítást.

Ezzel párhuzamosan indul fejlődésnek a végtelen sorok elmélete.[37] A legegyszerűbb sorok tulajdonságait — kezdve a geometriai soron, mely a közönséges törteknek szakaszos tizedestörtek alakjában való előállítása kapcsán merült fel — WALLIS vizsgálta (1685). MERCATOR német tudós az $\frac{1}{1+x}=$ $=1-x+x^2-\cdots$ sorfejtés integrálásával megkapja a $\log(1+x)$ függvény hatványsorát (1668). NEWTON előállítja a binomiális formulát tetszőleges kitevőre, az $(1-x^2)^{-1/2}$ függvény sorfejtésének integrálásával megkapja $\arcsin x$ sorfejtését, végül meghatározza az $y=\log(1+x)$ és $y=\arcsin x$ függvények

[36] L. az Enciklopédia Декарт c. cikkét.
[37] L. az Enciklopédia Ряды c. cikkét.

inverzeinek sorfejtését:

$$x = e^y - 1 = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \cdots,$$

illetve

$$x = \sin y = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} - \cdots.$$

A végtelen sorok elméletének további fejlesztésében résztvett a XVII. századnak majdnem minden matematikusa (WALLIS, HUYGHENS, LEIBNIZ, J. BERNOULLI és mások). Meg kell jegyeznünk, hogy a XVII. századbeli szerzőknek elég világos fogalmaik voltak a sorozatok határértékéről és a sorok konvergenciájáról; szükségesnek tartották, hogy az általuk használt sorok konvergenciáját bebizonyítsák. A koordinátarendszer megalkotásával és a mechanikai irányított mennyiségek (sebesség, gyorsulás) fogalmainak elterjedésével a negatív szám fogalma teljesen szemléletes és világos lett. A komplex számok viszont, amelyek ugyanúgy, mint azelőtt, az algebrai apparátus melléktermékei maradtak, lényegében továbbra is csak terméketlen viták tárgyát alkották. A leghatározottabban A. GIRARD holland matematikus ismerte fel őket, aki elsőnek jelentette ki (1629), hogy minden n-edfokú egyenletnek n gyöke van (ami, mint ismeretes, csak a komplex számok körében igaz és csak akkor, ha a többszörös gyökök multiplicitását figyelembe vesszük).

A differenciál- és integrálszámítás tulajdonképpeni felfedezése a XVII. század utolsó harmadában történt. A publikáció szempotjából e téren az elsőség LEIBNIZet[38] illeti, aki 1682—86-ban közzétett cikkeiben részletesen kifejtette ennek az új diszciplinának az alapgondolatait. Az alapvető eredmények tényleges elérésének idejét tekintve viszont a differenciál- és integrálszámítás felfedezőjének joggal tekinthetjük NEWTONt[39], aki 1665—66-ban jutott el az alapgondolatokhoz. „Analízis egyenletek segítségével" c. művét kéziratban átadta BARROW és COLLINS angol matematikusoknak; a kézirat tartalma az angliai matematikusok között széles körben ismeretessé vált. „A fluxiók módszere" c. művét, melyben elméletének teljes tárgyalását adja, 1670—71-ben írta meg (a mű kiadására 1736-ban került sor); LEIBNIZ pedig csak 1673-ban kezdte meg a végtelen kicsiny mennyiségek analízisére vonatkozó vizsgálatait. NEWTON és LEIBNIZ voltak az elsők, akik általánosságban tekintették a függvények differenciálásának és integrálásának — az új diszciplinában alapvető szerepet játszó — műveletét, felfedezték a két művelet egymással való kapcsolatát (azaz a Newton—Leibniz-formulát) és általános, egységes szabályokat adtak a két művelet elvégzésére. A probléma megközelítése azonban más NEWTONnál és más LEIBNIZnél. NEWTON a „fluens" (változó mennyiség) és a fluens „fluxiója" (változásának sebessége) fogalmából indul ki.

[38] L. az Enciklopédia Лейбниц c. cikkét.
[39] L. az Enciklopédia Ньютон c. cikkét.

Az adott fluensek fluxióinak, valamint a fluxiók közötti összefüggéseknek a fluensek alapján történő meghatározásának direkt feladatával (ez a differenciálás és a differenciálegyenletek felállításának problémája), azt az inverz feladatot állítja szembe, amely a fluxiók közötti adott összefüggésekből a fluensek meghatározását követeli meg — azaz, rögtön felveti a differenciálegyenletek integrálásának általános feladatát; a primitív függvény meghatározása speciális esetként, mint a $\frac{dy}{dx}=f(x)$ differenciálegyenlet integrálása szerepel. Ez a szempont NEWTON, a matematikai természettudomány megalkotója számára teljesen természetes: az ő fluxiószámítása annak a gondolatnak egyszerű tükröződése, hogy az elemi természeti törvények differenciálegyenletekkel fejezhetők ki, ahhoz pedig, hogy az e differenciálegyenletek által leírt folyamatok menetét előre meg tudjuk mondani, a differenciálegyenletek integrálására van szükség.[40] LEIBNIZ számára a központi kérdés a véges mennyiségekkel foglalkozó algebráról a végtelen kicsiny mennyiségek algebrájára való átmenet problémája; az integrált mindenekelőtt végtelen sok végtelen kicsiny mennyiség összegeként fogja fel, a differenciálszámítás alapfogalma pedig nála a differenciál, azaz a változó mennyiségek végtelen kicsiny növekményének fogalma. (Ezzel szemben NEWTON, miután bevezette az általa „momentum"-nak nevezett megfelelő fogalmat, későbbi munkáiban igyekszik azt kiküszöbölni.) Attól kezdve, hogy LEIBNIZ közzétette munkáit, a kontinentális Európában a differenciál- és integrálszámítás, a differenciálegyenletek integrálása és az analízis geometriai alkalmazásai terén intenzív közös munka indul meg, amelyben LEIBNIZen kívül résztvesznek J. BERNOULLI, I. BERNOULLI,[41] L'HOSPITAL francia matematikus és mások is. Ekkor alakul ki a matematikai munka mai módszere: az elért eredményeket rövid időn belül közlik folyóiratokban, és a többi matematikusok ezeket vizsgálataikban mindjárt fel is használják.

Az analitikus geometrián kívül, szoros kapcsolatban az algebrával és az analízissel, kifejlődik a differenciálgeometria[42] [ennek területén meg kell említenünk a görbületi sugár fogalmának bevezetését KEPLER által (1604), HUYGHENS vizsgálatait az evolutákról és evolvensekről (1673), stb.]; a XVII. században megalapozzák a tiszta geometria további fejlődését, főként a projektív geometria alapfogalmainak megteremtése irányában. DESARGUES francia matematikus a perspektíva elméletével foglalkozva (1636) kifejtette a végtelen távoli térelemek fogalmának egész rendszerét, bevezette az involució fogalmát stb. A kúpszeletek elméletét projektiv geometriai szemszögből DESARGUES (1639), PASCAL (1640) és LAGUERRE (1685) francia matematikusok dolgozzák ki. A XVII. század többi felfedezése közül meg kell említenünk még: a szám-

40 L. az Enciklopédia Флюксий исчисление c. cikkét.

41 L. az Enciklopédia Я. Бернулли, ill. И. Бернулли c. cikkeit.

42 L. az Enciklopédia Дифференциальная геометрия c. cikkét.

elmélet terén a teljes indukció elvének megfogalmazását (PASCAL, 1665) és FERMAT mélyenjáró kutatásait, amelyek jelentékeny részben meghatározták e tudományág további fejlődését; a kombinatorika alapfogalmainak kidolgozását (FERMAT, PASCAL, LEIBNIZ); az első valószínűségszámítási munkákat (FERMAT, PASCAL), amelyek a század végén elvi jelentőségű eredményben csúcsosodtak ki: J. BERNOULLI a legegyszerűbb alakban felfedezte a nagy számok törvényét (ennek publikálására 1713-ban került sor); a lánctörtek elméletét [CATALDI olasz (1613), SCHWENTER német matematikus (1617, 1618), WALLIS (1656), HUYGHENS (1703)]; a határozatlan együtthatók módszerét (DESCARTES, 1637); a poliéderekről szóló ún. Euler-tétel *megfogalmazását* (DESCARTES, 1620 körül). Be kell számolnunk még az első számológépek PASCAL (1641) és LEIBNIZ (1673—74) által való megkonstruálásáról is; ez egyébként sokáig gyakorlati következmények nélkül maradt.

XVIII. század. A XVIII. század elején még folytatja munkáját az analízis megteremtőinek nemzedéke (NEWTON, LEIBNIZ). A matematikai kutatások általános stílusa azonban lassanként megváltozik. A XVII. században elért, a módszer újdonsága által lehetővé tett sikerek elsősorban az alapgondolatok merészségének és mélységének voltak köszönhetők. Ennek következtében a matematika közelebb jutott a filozófiához. A XVIII. század elején a XVII. században megteremtett matematikai diszciplínák fejlődése elérte azt a színvonalat, amelyen a továbbhaladás már elsősorban a matematikai apparátus művészi kezelését és a nehéz feladatokra meglepő kerülőkön való megoldásában megnyilvánuló találékonyságot igényelt. A XVIII. század két legnagyobb matematikusa közül EULER[43] pétervári akadémikus ennek a virtuóz tendenciának a legkiemelkedőbb képviselője; LAGRANGE[44] francia matematikus, aki a megoldott problémák mennyisége és sokfélesége tekintetében talán elmarad EULER-től, abban tűnik ki, hogy a ragyogó technikát szélesen általánosító koncepciókkal egyesíti, ami jellemző vonása volt a XVIII. század második felének a felvilágosodás gondolkozóinak nagy filozófiai mozgalmával szoros kapcsolatban álló francia matematikai iskolájára. A matematikai analízis apparátusának szokatlan ereje által keltett lelkesedés természetszerűleg azt a hitet kelti, hogy ez az apparátus egészen automatikussá válhat, és hogy a matematikai számítások korrektek akkor is, ha olyan szimbólumokat is tartalmaznak, amelyeknek nincs értelmük. Míg e végtelen kis mennyiségek analízisének megteremtésekor az volt a probléma, hogy logikailag nem tudtak megbirkózni olyan fogalmakkal, amelyek pedig szemléletesen teljesen meggyőzőek voltak, most nyiltan hirdetik, hogy a közönséges szabályok szerint lehet számolni olyan matematikai kifejezésekkel is, amelyeknek nincs közvetlen értelmük, anélkül, hogy akár a szemléletre, akár az ilyen műveletek jogosultságának

[43] L. az Enciklopédia Эйлер c. cikkét.
[44] L. az Enciklopédia Лагранж c. cikkét.

valamiféle logikai igazolására támaszkodnának. A régibb nemzedék képviselői közül mind jobban efelé az irány felé hajlik LEIBNIZ, aki 1702-ben a racionális törtek képzetes kifejezésekre való bontás után történő integrálásával kapcsolatban „az ideális világ csodálatos beavatkozásáról“ és ehhez hasonlókról beszél. A reálisabb beállítottságú EULER nem beszél csodákról, ellenben elfogadja a képzetes számokkal és a divergens sorokkal való számolás jogosultságát, mint olyan tapasztalati tényt, amelyet megerősítenek hasonló átalakítások útján kapott más eredmények. [Így például EULER szerint $+1-1+2-6+24-120+\cdots+(-1)^n n!+\cdots=0{,}5963475922\ldots$]. EULER és MACLAURIN skót matematikus mindazonáltal megkezdik a végtelen kicsiny mennyiségek analízisének racionális megalapozására irányuló munkát. Ennek az iránynak a XVIII. század matematikusai közül a logikai szigorúságra és a világosságra a legkövetkezetesebben törekedő képviselője D'ALEMBERT[45] francia enciklopédista. Így az analízis logikai alapjait illetőleg D'ALEMBERT például a végtelen nagy és végtelen kicsiny változó mennyiségek tekintetében, vagy a differenciálhányadosról, mint két végtelen kicsiny mennyiség hányadosának véges határértékéről nagy vonásokban egészen modern nézeteket vall. A matematikai analízis megalapozására irányuló különböző módszerek komoly kritikájáról nevezetes Sz. J. GURJEVICS orosz matematikusnak „Опыт об усовершении Элементов геометрии (Kísérlet a geometria elemeinek tökéletesebbé tételére) c. munkája (1798). Az analízis rendszeres logikai megalapozása azonban csak a XIX. században valósult meg. Ennélfogva LAGRANGE, akit kortársainak kifogásolható elgondolásai nem elégítettek ki, kísérletet tett arra, hogy egyszerre küszöbölje ki az összes nehézségeket, mind azokat, amelyek magával a függvényfogalommal, mind pedig azokat, amelyek a végtelen kicsiny mennyiségek analízisének megalapozásával voltak kapcsolatosak, és tisztán algebrai álláspontra helyezkedett: nem magukat a függvényeket tekintette, hanem Taylor-sorukkal helyettesítette őket, és ily módon a differenciálást és integrálást, valamint az analízis összes egyéb műveleteit visszavezette a sorok együtthatóival való algebrai műveletekre.

Míg a XVII. század legkiválóbb matematikusai igen gyakran egyúttal filozófusok vagy kísérleti fizikusok is voltak, a XVIII. században a matematikai tudományos munka önálló foglalkozássá vált. A XVIII. század matematikusai különböző társadalmi rétegekből származó emberek, akik matematikai képességeikkel korán kiváltak és gyors akadémikus karriert futottak be. (EULER például bázeli lelkészcsaládból származott, 20 éves korában hívták meg adjunktusnak a pétervári Tudományos Akadémiához, 23 éves korában ugyanott professzor lett, 37 éves korában pedig a berlini Tudományos Akadémia matematika-fizikai szakosztályának elnöke; LAGRANGE francia tiszt fia volt, 18 éves korában professzor Torinóban, 30 éves korában a berlini Tudo-

[45] L. az Enciklopédia Д'Аламбер c. cikkét.

mányos Akadémia matematika-fizikai szakosztályának elnöke; LAPLACE francia paraszt fia, 18 éves korában a beaumonti katonai iskola előadója, 20 éves korában a párizsi katonai iskola professzora, 37 éves korában pedig a párizsi tudományos akadémia tagja lett.) Emellett azonban a matematikai jellegű természettudományok (mechanika, elméleti fizika), valamint a matematika technikai alkalmazásai a matematikusok tevékenységi körében maradnak. EULER hajókonstrukciós és optikai problémákkal foglalkozik, LAGRANGE megteremti az analitikus mechanika alapjait. LAPLACE, aki alapjában véve matematikusnak tartotta magát, korának egyik legkiválóbb csillagásza és fizikusa is volt — és így tovább.

Térjünk át a XVIII. század matematikai eredményeinek az egyes területek szerinti felsorolására. Kezdjük a számelmélettel. EULER, LAGRANGE és LEGENDRE francia matematikus munkáinak eredményeként a számelmélet veszi fel elsőnek rendszeres tudomány jellegét. LAGRANGE megadta a másodfokú határozatlan egyenletek általános megoldását (1769-ben, közzétéve 1771-ben). EULER felfedezte a kvadratikus maradékok[46] reciprocitási tételét (1772, közzétéve 1783-ban). Ugyanő a prímszámok vizsgálatába bevonta az ún. *zetafüggvényt*[47] és ezzel lerakta az analitikus számelmélet alapkövét.

Lánctörtbefejtés segítségével EULER bebizonyította (1737, közzétéve 1744-ben) e és e^2, LAMBERT német matematikus pedig (1766, közzétéve 1768-ban) π irracionalitását. Az algebrában CRAMER svájci matematikus 1750-ben a lineáris egyenletrendszerek megoldására bevezette a determinánsokat (ezeket már LEIBNIZ is ismerte, de felfedezését nem publikálta). A lineáris algebra továbbfejlesztésével foglalkozott LAPLACE és VANDERMONDE francia matematikus. NEWTON, EULER és BÉZOUT francia matematikus kidolgozták a polinomok oszthatóságának és az ismeretlenek kiküszöbölésének elméletét. EULER tapasztalati ténynek tekintette, hogy minden algebrai egyenletnek van $A+B\sqrt{-1}$ alakú gyöke. Lassanként gyökeret ver az a meggyőződés, hogy általában minden képzetes kifejezés (nemcsak az algebrában, hanem az analízisben is) $A+B\sqrt{-1}$ alakra hozható. D'ALEMBERT bebizonyította (1748), hogy polinom abszolút értékének nem lehet zérustól különböző minimuma (ez az ún. D'Alembert-lemma), és ezt az eredményt úgy tekintette, mint annak bizonyítását, hogy minden algebrai egyenletnek van gyöke. MOIVRE angol matematikusnak és EULERnek a komplex változó exponenciális és trigonometrikus függvényei közti összefüggést megadó formulái a komplex számok analízisbeli alkalmazásának további bővülésére vezettek. NEWTON, STIRLING skót matematikus és EULER megvetették a differenciaszámítás alapját[48]; LAGRANGE pedig szimbolikus számítási módszert fejlesztett ki a Δ és d operátorok pozitív és negatív kitevőjű hatványainak bevezetésével; LAPLACE általános mód-

[46] L. az Enciklopédia Квадратычные вычеты c. cikkét.

[47] L. az Enciklopédia Дзета-функция c. cikkét.

[48] L. az Enciklopédia Конечных разностей исчисление c. cikkét.

szereket talált a differenciaegyenletek megoldására. TAYLOR angol matematikus (1715) felfedezte a róla elnevezett formulát, mely lehetővé teszi bármely függvény hatványsorba fejtését. A XVIII. századbeli kutatóknál, különösen EULER-nél, a sorok az analízis egyik leghatékonyabb és legrugalmasabb eszközévé válnak. D'ALEMBERT-tel megkezdődik a sorok konvergenciakritériumainak komoly vizsgálata. EULER, LAGRANGE és főként LEGENDRE megkezdik az elliptikus integrálok vizsgálatát; ezek voltak az első olyan nem elemi függvények, amelyeket mélyreható speciális vizsgálatnak vetettek alá. I. BERNOULLI, RICCATI olasz matematikus, D. BERNOULLI,[49] EULER és CLAIRAUT francia matematikus első- és másodrendű közönséges differenciálegyenletek újabb típusainak megoldását találják meg. EULER adta meg az első módszert a tetszőlegesrendű állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek megoldására (1739, közzétéve 1743-ban). D'ALEMBERT differenciálegyenlet-rendszereket vizsgált. LAGRANGE és LAPLACE kiépítették a tetszőleges rendű lineáris differenciálegyenletek megoldásának általános elméletét; EULER, MONGE francia matematikus és LAGRANGE megvetették az elsőrendű, EULER, MONGE és LAPLACE pedig a másodrendű parciális differenciálegyenletek általános elméletének alapjait. Különös jelentőségű volt itt a rezgő húr egyenlete, valamint a függvények trigonometrikus sorokba fejtésének ezzel kapcsolatos bevezetése, ezzel összefüggésben EULER, D. BERNOULLI, D'ALEMBERT, MONGE és LAGRANGE között vita keletkezett a függvényfogalomról,[50] ami előkészítette az analitikus kifejezés fogalma és az általános függvényfogalom közti viszony tisztázása terén a XIX. században elért eredményeket. Végül az analízisnek a XVIII. században keletkezett fejezete a variációszámítás, amelyet EULER és LAGRANGE teremtett meg. A. MOIVRE, J. BERNOULLI, P. LAPLACE és T. BAYES angol matematikus a XVII—XVIII. század speciális eredményei alapján lerakták a valószínűségszámítás[51] alapjait.

A geometria területén EULER betetőzte az elemi analitikus geometria rendszerét. NEWTONtól kezdve rendszeresen vizsgálták a harmadrendű görbéket. WARING angol matematikus felfedezte a tetszőleges rendű algebrai görbék több tulajdonságát. EULER, CLAIRAUT, MONGE és MEUSNIER francia matematikus munkáikban lerakták a térgörbék és a felületek differenciálgeometriájának alapjait. A differenciálgeometria problémái a parciális differenciálegyenletek elmélete fentebb említett fejlődésének egyik fő forrását alkották. LAMBERT kifejleszti a perspektíva elméletét, MONGE pedig végleges formába öntötte az ábrázoló geometriát.[52]

Ebből az áttekintésből látható, hogy a XVIII. század matematikája, mely a XVII. század eszméin alapult, a munka lendülete tekintetében messze felül-

[49] L. az Enciklopédia Бернулли д c. cikkét.
[50] Részletesebben l. az Enciklopédia Функция c. cikkét.
[51] L. az Enciklopédia Теория вероятностей c. cikkét.
[52] L. az Enciklopédia Начертательная геометрия c. cikkét.

múlta az előző századokat. Ez a felvirágzás főleg az akadémiák tevékenységével kapcsolatos; az egyetemek kisebb szerepet játszottak. A legnagyobb matematikusoknak az egyetemi oktatástól való távolmaradása megtérült azzal, hogy az így felszabaduló energiát tankönyvek és terjedelmes speciális vizsgálatokat is magukban foglaló traktátusok megírására használhatták. Új lökést adott a tudomány szervezetének a XVIII. század végén a francia polgári forradalom. A legnagyobb matematikusok (LAGRANGE, LAPLACE, LEGENDRE, MONGE) bekapcsolódnak a mértékek méterrendszerének megalkotásába, a délkör hosszúságának ezzel kapcsolatos megmérésébe, az állami eszközökkel megszervezett új trigonometriai táblázat-kiszámításokba stb. A matematika további fejlődésére legjelentősebbnek bizonyult a párizsi Ecole Polytechnique megalapítása 1794-ben, MONGE vezetése alatt; a XIX. század elején ez az iskola lett a francia matematikai kultúra fő központja.

III. A MODERN MATEMATIKA

A XIX. és a XX. században a matematikai analízisnek a XVII. és a XVIII. században keletkezett összes ágai erőteljesen továbbfejlődtek. Rendkívül kibővült a XIX. és a XX. században a matematikai analízis alkalmazása a természettudomány és a technika által felvetett problémák megoldására. E mennyiségi növekedés mellett azonban a XVIII. század legvégén és a XIX. század elején a matematika fejlődésében több lényegileg új vonás is megfigyelhető.

1. A matematika tárgyának bővülése

A XVII. és a XVIII. században felhalmozódott hatalmas mennyiségű tény-anyag szükségessé tette a mélyenszántó logikai elemzést és a matematika anyagának új szempontok alapján való csoportosítását. A komplex számok geometriai interpretációjának megalkotása és felhasználása [WESSEL dán geodéta (1799) és ARGAND francia matematikus (1806)], annak bebizonyítása, hogy az általános alakú ötödfokú egyenletek gyökök segítségével nem oldhatók meg [RUFFINI olasz (1799) és — szigorúbban — ABEL norvég matematikus (1824)], a komplex változós függvénytan alapjainak lerakása CAUCHY francia matematikus által, CAUCHYnak a végtelen kicsiny mennyiségek analízisének szigorú megalapozására irányuló munkái, a nem-euklideszi geometria megteremtése [N. I. LOBACSEVSZKIJ (1826),[53] közzétéve 1829—30-ban, és BOLYAI JÁNOS magyar matematikus (1832)], GAUSS német matematikus munkái a felületek belső geometriája terén (1827) — ezek a matematika fejlődésében a XVIII. és a XIX. század határán kikristályosodó új irányok legjellemzőbb példái.

[53] L. az Enciklopédia Лобачевский c. cikkét.

A matematikának a természettudománnyal való kapcsolata lényegében ugyanolyan szoros marad, mint azelőtt, de most bonyolultabb formákat öltött. A nagy, új elméletek nem csupán a természettudományban és a technikában felmerült problémák közvetlen hatására jelennek meg, hanem magának a matematikának belső szükségletéből is. Alapjában véve ilyen jellegű volt a komplex változós függvénytan kifejlődése, amely a XIX. század elején és közepén az egész matematikai analízisben központi helyet foglalt el. A fejlődés fő vonala itt abban állt, hogy a komplex számkörre való áttérés világosabbakká és áttekinthetőbbekké tette a vizsgált függvények tulajdonságait. A komplex változós függvények közvetlen reális (például konform ábrázolást előállító függvényekként való) alkalmazása iránti széles érdeklődés csak később alakult ki, noha az ilyen alkalmazások lehetőségére már EULER rámutatott.

A matematika belső fejlődésének eredményeként keletkező új elméleteknek még jelentősebb példája LOBACSEVSZKIJ „elképzelt geometriája".[54] LOBACSEVSZKIJ igyekezett tisztázni, hogyan keletkeznek a geometriai alapfogalmak az anyagi valóságból és ennek, valamint a közönséges euklideszi geometria logikai analízisének eredményeképpen ismerte fel az új geometriai rendszer lehetőségét. Magának LOBACSEVSZKIJnek csak néhány integrál kiszámítására sikerült alkalmaznia geometriáját. Később felfedezték a Lobacsevszkij-geometriának a felületelmélettel és a transzformációs csoportok elméletével való szoros kapcsolatát, alkalmazták ezt a geometriát fontos analitikus függvényosztályok vizsgálatára stb. LOBACSEVSZKIJnek az a javaslata, amelyben lehetségesnek tartotta geometriai eszméinek a valóságos fizikai tér vizsgálatára való alkalmazását, csak a XX. században, a relativitáselmélet megalkotásával vált valósággá.

Még egy példát hozhatunk fel arra, hogyan nyert nagyszerű igazolást a korábban felfedezett matematikai tényeknek a XVIII. század végén és a XIX. század elején általánosabb nézőpontokból történt felülvizsgálása a XIX. század második felében és a XX. században felmerült természettudományi problémákban. A csoportelmélet[55] úgy keletkezett, hogy annak idején LAGRANGE a magasabbfokú algebrai egyenletek gyökökkel való megoldhatóságának problémájával kapcsolatban foglalkozott a szubsztitúciós csoportokkal. Éppen ebből indultak ki RUFFINInak és ABELnek a fentebb említett eredményekre vezető vizsgálatai, amelyekre valamivel később GALOIS francia matematikus tette fel a koronát azzal, hogy szubsztitúciós csoportok segítségével véglegesen eldöntötte azt a problémát, milyen feltételek mellett oldható meg tetszőleges fokú algebrai egyenlet gyökökkel (1830—32, közzétéve 1832-ben és 1846-ban). A XIX. század közepén A. CAILEY angol matematikus megadta a csoport fogalmának általános „absztrakt" definícióját. S. LIE norvég matematikus,

[54] L. az Enciklopédia Лобачевского геометрия c. cikkét.
[55] L. az Enciklopédia Группы c. cikkét.

általános geometriai problémákból kiindulva, kidolgozta a folytonos csoportok[56] elméletét. És csak mindezek után állapította meg J. Sz. FJODOROV orosz krisztallográfus és geométer (1890), valamint SCHOENFLIESS német matematikus (1891), hogy a kristályok szerkezete[57] csoportelméleti törvényszerűségeket mutat; még később igen hatékony kutatási segédeszköz lett a csoportelmélet a kvantummechanikában.

A mechanikai és fizikai problémák közvetlenebb és állandóbb hatására alakul ki a vektor- és tenzoranalízis. Mindinkább megmutatkozott ugyanis, hogy a mechanika és a fizika szempontjából „skaláris"-nak nevezett mennyiségek, amelyek a valós számfogalom kialakulásának eredeti materiális alapját alkották, csak speciális esetei a többdimenziós mennyiségeknek. E többdimenziós mennyiségek közötti függvénykapcsolatokkal foglalkozik a vektor- és tenzorszámítás.[58] A vektor- és tenzorfogalomnak végtelen sok dimenziós menynyiségekre való kiterjesztését a funkcionálanalízis[59] hajtja végre, szorosan kapcsolódva a kvantummechanika követelményeihez.

Ily módon a matematika által vizsgált mennyiségi vonatkozások és térformák köre mind a matematika belső szükségleteinek eredményeként, mind a természettudományban fellépő problémák igényeinek megfelelően hatalmasan kibővül: kiterjed a tetszőleges csoportok elemei, a vektorok, operátorok, függvényterek közti vonatkozásokra, a tetszőleges dimenziójú terekben előforduló formák egész sokféleségére stb. Ha a „mennyiségi vonatkozások" és „térformák" kifejezéseket ebben a kibővített értelemben tekintjük, akkor a matematikának cikkünk elején idézett definíciója kiterjeszthető a matematika új, modern fejlődési szakaszára is.

A matematika fejlődésének a XIX. században kezdődő legutóbbi korszakában a lényegesen új vonás az, hogy a vizsgálat tárgyát alkotó mennyiségi vonatkozások és térformák szükséges kibővítésének problémái a matematikusok tudatos és aktív érdeklődésének tárgyává lesznek. Míg azelőtt például a negatív és a komplex számok bevezetése, valamint a velük való műveletek szabályainak pontos megfogalmazása hosszadalmas munkát igényelt, addig most a matematika fejlődése megkövetelte a felmerülő szükségletek szerint új geometriai rendszerek új, nem kommutatív, sőt nem asszociatív „szorzást" tartalmazó algebrák stb. tudatos és tervszerű megalkotására szolgáló módszerek kidolgozását. Ma például az, hogy nem kell-e valamilyen kontakt relékapcsolás-típus analízise és szintézise kedvéért egy új „algebrát" felépíteni új műveleti szabályokkal, a mindennapos technikai-tudományos gyakorlatban semmiféle különösebb csodálkozást nem keltő kérdés. A matematikai gondolkodásmód egész felépítésének azt a XIX. század folyamán történt

[56] L. az Enciklopédia Непрерывные группы c. cikkét.
[57] L. az Enciklopédia Кристаллография c. cikkét.
[58] L. az Enciklopédia Векторное исчисление, ill. Тензорное исчисление c. cikkeit.
[59] L. az Enciklopédia Функциональный анализ c. cikkét.

átalakulását, amely ide vezetett, fontosság tekintetében alig lehet túlbecsülni. Ebből az elvi szempontból a XIX. század elejének matematikai felfedezései közül LOBACSEVSZKIJ nem-euklideszi geometriája a legfontosabb. Ennek a geometriának a példáján dőlt ugyanis meg az ezeréves fejlődés által szentesített matematikai axiómák állandóságába vetett hit, értették meg azt, hogy olyan helyesen végrehajtott absztrakció útján, mely elveti a belső logikai szükségszerűség által nem indokolt korábbi korlátozásokat, új matematikai elméletek alkothatók, és bizonyult be az, hogy az ilyen absztrakt elméletek az idő folyamán mind szélesebb körű, teljesen konkrét alkalmazásra kerülhetnek.

A matematika tárgyának definíciójával kapcsolatos fenti megjegyzésünkhöz kiegészítésképpen meg kell jegyeznünk, hogy ha a „mennyiségi vonatkozások" kifejezést elég széles értelemben tekintjük, akkor a térformák a mennyiségi vonatkozások speciális eseteinek tekinthetők, úgyhogy ebből a szempontból nézve a dolgot, a „térformák" külön megemlítése a matematika definíciójában csupán azt a célt szolgálja, hogy jelezze a matematika geometriai részeinek viszonylagos önállóságát. A mennyiségi vonatkozásokat (a kifejezés általános filozófiai értelmében) az jellemzi, hogy — a minőségi vonatkozásoktól eltérőleg — nincs közük azoknak a dolgoknak a konkrét természetéhez, amelyek között fennállnak. Ezért különíthetők el teljesen a mennyiségi vonatkozások konkrét tartalmuktól, mint olyan valamitől, ami a dolog lényege szempontjából érdektelen (l. ENGELSnek cikkünk elején idézett mondatait). Így például valamely (meghatározott) szám ugyanaz marad, függetlenül attól, hogy milyen dolgok számát fejezi ki; az $y = ax + b$ lineáris összefüggés mindig ugyanaz marad, függetlenül attól, hogy x-szel és y-nal mit jelölünk stb. Mondhatjuk, hogy a mennyiségi vonatkozások tiszta vonatkozások, oly módon értve ezt, hogy a konkrét valóságból, amelyből absztrahálódtak, nem tartanak meg egyebet, mint amit definíciójuk előír. A mennyiségi vonatkozásoknak ezekből az általános tulajdonságaiból könnyen megmagyarázhatók a matematikának — mint a mennyiségi vonatkozások tudományának — alapvető sajátságai. A matematika túlnyomórészt deduktív volta következik abból, hogy a tiszta vonatkozások összes tulajdonságainak benne kell lenniük az illető vonatkozás definíciójában. Az, hogy minden matematikai elmélet széles körben, a természettudomány és a technika legkülönbözőbb konkrét tartalmú területein alkalmazható, érthetővé válik abból, hogy a matematika csak olyan vonatkozásokkal foglalkozik, amelyek függetlenek azoknak a tárgyaknak konkrét természetétől, melyek között a vizsgált vonatkozások fennállnak. A matematika modern korszakát éppen az az elvi tulajdonság jellemzi, hogy olyan rugalmas módszereket alkot, amelyek igen általános és különféle mennyiségi vonatkozások vizsgálatára alkalmasak (a „mennyiségi vonatkozásokat" a fentemlített széles értelemben véve). Az a tény, hogy a matematikában gyakran használják a „kvalitatív módszer"[60] kifejezést, a fentieknek csak látszólag mond ellent. A matematika által vizsgált vonatkozások a fentemlített tág értelemben mindig mennyiségek. Amikor azonban a matematika valamely területén azok mellett a mennyiségi vonatkozások mellett, amelyek már standard kifejezést nyertek és meghatározott számítási szabályoknak vannak alávetve, a vizsgált jelenségeknek alapvetően új oldalát teszik tanulmányozás tárgyává, akkor azt mondják, hogy a kvantitatív módszerekről kvalitatívakra térnek át. Így például a differenciálegyenletek elméletében a kvalitatív módszerekhez sorolják az integrálvonalak „egészükben" való vizsgálatának módszereit, amelyek általános topológiai meggondolásokon alapulnak és amelyekhez nincs szükség a differenciálegyenlet integrálására. Fejlett alakjukban azonban ezek a topológiai módszerek

[60] L. az Enciklopédia Качественные методы c. cikkét.

is meghatározott algoritmusnak vannak alávetve, amelyek bizonyos numerikus karakterisztikák (a leképezés fokszáma stb.) kiszámítására vezetik vissza a problémát; ez pedig már világosan mutatja, hogy ezek az újabb vonatkozások is mennyiségiek. A (ebben a relatív értelemben) kvalitatív módszerek nagy súlya a modern matematikában a matematika felépítésének bonyolultságával magyarázható: az egyes matematikai elméletekből állandóan újabb és újabb elméletek nőnek ki, amelyek új objektumokkal foglalkoznak (az egyenletek gyökökkel való megoldhatóságának problémája a megfelelő szubsztitúciós csoportok szerkesztésére vezethető vissza stb.).

Ami a „térformák" kifejezést illeti, arra vonatkozólag, hogy ennek értelmezését milyen határokig ésszerű kiterjeszteni, nincs kialakult álláspont a matematikai filozófiai irodalomban. A közönséges háromdimenziós euklideszi tér geometriája csupán speciális esete a modern geometria által alkotott különféle rendszereknek, és e geometriai rendszereket távolról sem mind éppen (a szó közvetlen értelmében) valóságos világ térformáinak vizsgálata céljából konstruálták meg. Éppen ezért a „Geometria" c. cikk[61] azt mondja, hogy a geometria a térbeli vonatkozások és formák, *valamint a valóságos világ egyéb, a térbeliekhez hasonló felépítésű vonatkozásainak és formáinak* tudománya. Ha a tulajdonképpeni térformáknak és a térbeliekhez csupán „hasonló" formáknak ezt a megkülönböztetését következetesen továbbvinnénk, akkor magát a „tér" kifejezést is egyedül csupán magára a valóságos térre volna szabad alkalmazni; ennek minden tekintetben való teljes vizsgálata azonban mai fogalmak szerint a *fizika* tárgykörébe tartozik, a matematika ezt csupán egyes közelítésekben vizsgálja (ilyen közelítés például az euklideszi tér, amely gyakorlati célokra elegendő).

A matematikai irodalomban azonban általánosabb a „tér" kifejezés *tágabb* értelemben való használata.[62] A „tér" kifejezésnek ez a tágabb értelmezése természetes módon kapcsolódik a „térformák" kifejezés *tágabb* értelmezéséhez, amely magában foglalja mindazokat a formákat is, amelyeket a „Geometria" c. cikk „térbeliekhez hasonlóknak" nevez. A mechanikában és a fizikában alkalmazott tetszőleges dimenziószámú fázisterek[63] példáján látható, hogy az ilyen tágabb értelemben vett formulák is ugyanúgy a *valóságos világ* valóságos formái (és nem a geométerek önkényes konstrukciói), mint a szűkebb értelemben vett térformák. Az az állítás, hogy a geometria a valóságos világ *térbeli vonatkozásainak* és formáinak tudománya, ma csak akkor igaz, ha ezeket a kifejezéseket tágabb értelmükben vesszük.

2. A matematika megalapozásának problémái
A halmazelmélet és a matematikai logika szerepe

A matematika tárgyának XIX. századbeli hatalmas méretű bővülése erősen ráirányította a figyelmet a „megalapozás" problémáira, azaz a kiinduló állítások (axiómák) kritikai felülvizsgálatára, a szigorúan felépített definíció- és bizonyításrendszer konstruálásával, valamint a bizonyításokban alkalmazott logikai módszerek kritikájával kapcsolatos problémákra. Az ilyen tárgyú munka fontosságát akkor értjük meg igazán, ha figyelembe vesszük azt, amit a matematikai elmélet fejlődése és az elméletnek a természettudomány és a tech-

[61] L. ott Геометрия.

[62] Ennek részletes magyarázatát l. az Enciklopédia Геометрия c. cikkének III. és VII. részében.

[63] L. az Enciklopédia Фазовые пространства c. cikkét.

nika gyakorlati anyaga által való igazolása közti kölcsönhatás megváltozott jellegéről mondottunk. Olyan terjedelmes és sokszor igen elvont elméleteknél, amelyek az elmélet megalkotásának alapjául szolgáló speciális eseteken kívül még további hatalmas anyagot tartalmaznak, ennek az anyagnak konkrét gyakorlati alkalmazásáig évtizedek telhetnek el, tehát már nem várható, hogy az elmélet korrektségének esetleges hiányosságait a gyakorlat regisztrált konkrét hibák formájában közvetlenül jelezze. Ehelyett az emberi szellem munkájával összegyűjtött tapasztalatok egészéhez kell folyamodni, amely mintegy összegeződik a bizonyítások „szigorúságával" szemben támasztott, a tudomány által fokozatosan kidolgozott követelményekben. Így tehát a matematika egyes ágainak szigorú megalapozására irányuló munka joggal foglal el jelentős helyet a XIX. és a XX. század matematikájában. Ennek a munkának az analízis alapjaira (a valós szám fogalmának felépítése, a határértékek elmélete és a differenciál- és integrálszámítás összes módszereinek szigorú megalapozása) vonatkozó eredményei ma már többé-kevésbé teljesen megtalálhatók a tankönyvekben (még a tisztán gyakorlati jellegűekben is). Előfordul azonban manapság is, hogy a matematikai elmélet szükségletei által gyakorlatilag már megkövetelt szigorú megalapozás késik. Így volt ez hosszú időn át már a XIX. és a XX. század fordulóján a mechanikában és az elektrotechnikában széleskörű alkalmazást nyert *operátorszámítás*sal.[64] Csak nagy késéssel készült el a *valószínűségszámítás*[65] logikailag kifogástalan felépítése. Még ma is hiányzik sok, az elméleti fizikában széles körben alkalmazott matematikai módszer szigorú megalapozása; sok fontos elméleti fizikai eredményhez olyan matematikai módszerek alkalmazásával jutnak el, amelyek nem jogosultak, és a helyes eredményt néha csak egy nyilvánvalóan hibás tényezőtől, — amelyet aztán a szóban forgó „matematikai levezetéstől" teljesen idegen meggondolásokkal küszöbölnek ki — „eltekintve", vagy végtelenné váló tagoknak az összegből való elhagyásával adják meg stb.

A logikai szigorúság követelményének az a szabványa, melyet a matematikusok az egyes matematikai elméletek felépítésére irányuló gyakorlati munkájukban mindmáig vezérelvként követnek, csak a XIX. század végén alakult ki. Ez a vezérelv a matematikai diszciplinák h a l m a z e l m é l e t i koncepcióján alapszik.[66] Eszerint minden matematikai elmélet olyan objektumok egy vagy több halmazával dolgozik, amelyek között bizonyos vonatkozások állnak fenn. Ezeknek az objektumoknak és vonatkozásoknak minden olyan formális tulajdonságát, amelyek a szóban forgó elmélet felépítéséhez szükségesek, axiómák alakjában rögzítjük; az axiómák objektumok és vonatkozások konkrét természetét nem érintik. Az elmélet alkalmazható objektumoknak és vonatkozásoknak minden olyan rendszerére, amely az elmélet alapját alkotó axiómarendszert kielégíti. Ennek megfelelőleg az elmélet csak akkor tekinthető logikailag szigorúan kifogástalannak, ha felépítése folyamán az objektu-

[64] L. az Enciklopédia Операционное исчисление c. cikkét.

[65] L. az Enciklopédia Теория вероятностей c. cikkét.

[66] L. az Enciklopédia Множеств теория és Аксиома c. cikkeit, valamint az Алгебра c. cikk III. és a Геометрия c. cikk VII. részét.

moknak és a köztük fennálló vonatkozásoknak semmiféle olyan konkrét tulajdonsága, amely az axiómákban nem volt megemlítve, nem kerül felhasználásra, és az elmélet felépítése közben bevezetett új objektumok és vonatkozások az axiómák által mind formálisan definiálhatók.

Ezekből a követelményekből következik egyebek közt, hogy ha egy matematikai elmélet valamely objektumrendszerre érvényes, akkor érvényes minden, a szóban forgó izomorf"[67] objektumrendszerre is. Megjegyezzük itt, hogy az izomorfia néha igen absztraktnak tűnő fogalma pusztán a fizikai „modellalkotás" [a fizika valamely ágába tartozó (pl. hőtani) jelenségnek a fizika valamely más területéről való (pl. elektromos) „modell"-el történő leírása] gondolatának matematikai kifejezése.[68]

A matematikai elméletek felépítésének ez a koncepciója lényegében nem más, mint a matematika ama definíciójának, hogy „a matematika a mennyiségi vonatkozások tudománya" — a „mennyiségi vonatkozások" kifejezést a fentebb kifejtett tágabb értelemben véve — bizonyos konkretizálása. Az, hogy a mennyiségi vonatkozásoknak „nincsen közük" azoknak a tárgyaknak a konkrét természetéhez, amelyekre vonatkoznak, itt abban fejeződik ki, hogy bármely objektumrendszerről minden megszorítás nélkül át lehet térni tetszőleges, vele izomorf rendszerre.

A halmazelméleti felfogás nemcsak a matematikai „szigorúság" ma általánosan elfogadott szabványát teremtette meg, hanem lehetővé tette a tájékozódást is a különféle lehetséges matematikai diszciplínák között, továbbá e diszciplínák rendszerezését. Így a tiszta a l g e b r a definiálható, mint az olyan objektumrendszerek tudománya, amelyekben véges számú, egyenként véges számú objektumra alkalmazható olyan művelet van értelmezve, mely a szóban forgó véges számú objektumhoz a rendszer egy meghatározott új elemét rendeli hozzá. Az algebrai test esetében például két művelet van értelmezve: az összeadás és a szorzás, mindkettő két-két objektumhoz rendel hozzá egy harmadikat. Ezzel a tiszta algebrát megkülönböztettük az analízistől és a geometriától (ez utóbbit a szó tulajonképpeni értelmében véve, azaz feltételezve a vizsgált terek bizonyos „folytonosságát"), amelyek elengedhetetlenül megkövetelik a végtelen sok objektumra alkalmazott „határérték"-relációk bevezetését.

Az egyes speciális matematikai diszciplínák (mint pl. a valószínűségszámítás) axiomatikus tárgyalásánál természetesen nem a semmiből indulnak ki, hanem felhasználják előzőleg felépített diszciplínák fogalmait (például a természetes vagy a valós szám fogalmát). Ennek következtében a matematikai diszciplínák kifogástalan axiomatikus felépítése ma már nem különlegesen nehéz feladat és mind általánosabbá válik. Ez a vizsgálati és tárgyalási mód az olyan bonyolult és ugyanakkor igen általános alakulatok tanulmányozásánál, mint pl. a folytonos csoportok,[69] vagy a lineáris terek[70] különféle alakjai, a világosságnak és a hibák elkerülésének elengedhetetlen feltétele.

A halmazelméleti szempont helyessége az összes konkrét matematikai diszciplínákban, még az igen általános jellegűekben is (a valós számok elméletétől a topologikus terek általános elméletéig stb.) igazolódott, amennyiben bevezetésével a konkrét matematikai vizsgálatokból gyakorlatilag eltűntek a definíciók korrektségével és a bizonyítások kellően meggyőző voltával kapcsolatos, hosszú időn át tartó kétségek és nézeteltérések. Azok a homályos pontok, sőt egyenest ellentmondások, amelyek magában a halmazelméletben merültek fel,[71] főként ott jelentkeztek, ahol a végtelen halmaz fogalmát túlzottan, a szóbajöhető alkalmazások szempontjából felesleges általánossággal értelmezték. Elvileg azonban szem

[67] L. az Enciklopédia Изоморфизм c. cikkét.

[68] L. az Enciklopédia Моделирование és Моделирование математическое c. cikkeit.

[69] L. az Enciklopédia Непрерывные группы c. cikkét.

[70] L. az Enciklopédia Линейные пространства c. cikkét.

[71] L. az Enciklopédia Парадоксы математические c. cikkét.

előtt kell tartanunk, hogy — a természetes és a valós számok aritmetikáján kezdve — az összes alapvető matematikai diszciplinák halmazelméleti felépítéséhez szükség van éppen a végtelen halmazok elméletére, ez pedig maga is logikai megalapozást igényel,[72] mert a végtelen halmaz fogalmához vezető absztrakció csak bizonyos feltételek mellett észszerű és jogosult, ezek a feltételek pedig még távolról sincsenek tisztázva.

Az összes matematikai diszciplinák felépítésének más oldalára vet fényt a matematikai logika. Az axiómarendszer a fenti (halmazelméleti) értelmezésben csupán kívülről határolja el a szóban forgó matematikai diszciplina alkalmazási területét, oly módon, hogy megadja a vizsgált objektum- és vonatkozásrendszer tulajdonságait, de nem ad semmiféle felvilágosítást arról, hogy a szóban forgó diszciplina felépítése milyen logikai eszközök segítségével történhetik. Így például a természetes számok rendszerének tulajdonságai — és természetesen egyben az ezzel izomorf rendszerekéi — igen egyszerű axiómarendszerrel megadhatók. Mindazonáltal olyan problémák megoldása, amelyekre a válasz ennek az axiómarendszernek az elfogadásával elvben egyértelműen meg van határozva, gyakran igen bonyolultnak bizonyul: éppen a számelmélet bőségesen tartalmaz olyan régen felvetett és igen egyszerűen megfogalmazható problémákat, amelyek mindmáig nincsenek megoldva. Itt természetesen felmerül az a kérdés, hogy ez csak azért van-e, mert egyes egyszerűen megfogalmazható számelméleti problémák megoldásához nagyon hosszú gondolatsorozatra van szükség, amelynek egyes elemi összetevői azonban már ismert és használatos logikai lépések, vagy pedig azért, mert vannak olyan számelméleti problémák, amelyeknek megoldásához minőségileg új, eddig még nem használt logikai módszerek szükségesek.

A modern *matematikai logika*[73] határozott választ adott erre a kérdésre: önmagában egyetlen deduktív diszciplina sem tudja kimeríteni a számelméleti problémák sokféleségét. Pontosabban: már a természetes számok elméletének keretein belül megadható olyan $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ problémasorozat, hogy bármely deduktív diszciplinához található ennek olyan eleme, (olyan, a p_n sorozatból való probléma), amely a szóban forgó diszciplina eszközeivel nem oldható meg. „Deduktív diszciplinán" itt olyan elméletet értünk, amely véges számú axiómára épül és amelynek kifejtésében a levezetések véges számú, a szóban forgó diszciplinára jellemző előre megadott elemi logikai eszköz felhasználásával készülnek, e véges számú elemi módszerből azonban tetszőlegesen hosszú gondolatsorozatok állíthatók össze.

Kiderült tehát, hogy a matematikai diszciplina fogalma — olyan diszciplinát értve ezen, amelyet egy meghatározott halmazelméleti típusú axiómarendszer határoz meg — lényegesen t á g a b b, mint a deduktív diszciplina logikai fogalma: már a természetes számok aritmetikájának felépítésénél végtelen sokszor kell teljesen új logikai következtetési módszerekhez folyamodni, úgyhogy ezek összessége nem fér bele semmiféle véges számú megszabott módszerből álló rendszerbe.

Mindazok az eredmények, amelyek valamely deduktív diszciplina keretein belül megkaphatók, megkaphatók egyszer s mindenkorra megadott szabályok szerint végrehajtható s z á m í t á s s a l is. Ha a problémák valamely osztályának megoldására szigorúan meghatározott számításrecept adható meg, matematikai *algoritmus*ról[74] beszélünk. Az elég általános és ugyanakkor rövid algoritmusok konstruálásának problémája fontos helyet foglal el a matematika történetében mindazóta, amióta elegendően kidolgozott matematikai jelrendszer[75] egyáltalán létezik. Az algoritmusok és a matematikai problémák „algoritmikus megoldhatósága" általános elméletének megteremtése azonban csak az utolsó évtizedekben kezdődött meg, a matematikai logika fejlődésének eredményeként. Ennek az elméletnek a gya-

[72] L. az Enciklopédia Бесконечность c. cikkét.
[73] L. az Enciklopédia Логика математическая c. cikkét.
[74] L. az Enciklopédia Алгоритм c. cikkét.
[75] L. az Enciklopédia Знаки математические c. cikkét.

korlati perspektívái igen szélesek, különös tekintettel arra, hogy a modern számítási technika lehetővé teszi már bonyolult matematikai algoritmusok gépi munkával való helyettesítését.

Azoknak a korlátoknak, amelyek a fentiek szerint bármely rögzített deduktív rendszer lehetőségeire érvényesek, az algoritmusok elméletében olyan tételek felelnek meg, amelyek szerint matematikai problémák elég széles körének megoldására alkalmas „univerzális" algoritmusok konstruálása nem lehetséges. Ezek a tételek a matematika filozófiája számára igen érdekes és éles módon konkretizálták azt az általános igazságot, hogy az élő gondolkodás elvileg különbözik bármely számolóautomata működésétől.

A halmazelmélet, a legtöbb matematikai diszciplina sikeres halmazelméleti megalapozása, valamint a matematikai logika (és vele az algoritmuselmélet) eredményei fontos előfeltételei a modern matematika sok filozófiai problémája megoldásának. A matematika összes ágainak halmazelméleti alapon való átdolgozása következtében mindazoknak a problémáknak a megoldása, amelyek a végtelen matematikai fogalmával kapcsolatosak, a végtelen halmaz fogalmának megalapozására és kritikai tisztázására vezetődött vissza. A halmazelméletre támaszkodó axiomatika, mint már említettük, megadja az eszközöket a matematika által vizsgált vonatkozások mennyiségi jellegű problematikájának kellő általánosságú megvilágítására. Lehetővé teszi az egyes speciális matematikai diszciplinák szerkezetének — amelyeknek tárgyi tartalmát a megfelelő axiómák rögzítik le — egységes szempontból való vizsgálatát, és ily módon bizonyos mértékig mind a matematikai diszciplinák és a valóság viszonyának, mind a matematikai vizsgálati módszer sajátos jellegének megvilágítását is. Láttuk, hogy a matematikai diszciplina ily módon keletkező fogalma lényegesen szélesebb, mint a formális logikai értelemben vett deduktív diszciplina fogalma. A modern matematikai logika idevonatkozó eredményei lehetővé teszik számunkra, hogy teljes konkrétsággal nyomon követhessük ama deduktív diszciplinák és algoritmusok megalkotásának dialektikus folyamatát, amelyek a matematikai diszciplina mind szélesebb körébe tartozó problémáinak megoldására adják meg nekünk a formális-logikai és számítási eszközöket.

A XX. században, amikor ezek az általános problémák elég szélesen felvetődhettek, a kapitalista országok tudományában már elhatalmasodtak a reakciós idealista áramlatok. A logicizmus[76] a halmazelméleti axiomatika eredményeit, amelyek valójában azt tárták fel, hogy a matematikai elméletnek szélesebbek az objektív valósággal való kapcsolatai, mint az korábban várható volt (ugyanannak a matematikai diszciplinának a keretein belül a reális jelenségek sok különböző köre vizsgálható), annak a homlokegyenest ellenkező tézisnek a kikiáltására használták fel, hogy a matematika teljesen független az anyagi világ tanulmányozásának problémáitól. Későbbb az intuicionizmus hívei[77] a végtelen halmazok elméletének megalapozásával kapcsolatos logikai nehézségeket használták fel arra, hogy a matematikát ne rajtunk kívül álló dolgokat vizsgáló tudománynak, hanem olyan sajátos teremtő „tevékenység"-nek nyilvánítsák, amely a külső valóságos világgal semmiféle vonatkozásban nem álló elmekonstrukciók létrehozására irányul. Végül a formalisták[78] a matematikai logika eredményeit arra használta fel, hogy a matematika egész tartalmát olyan szimbolikus „számítások" konstruálására vezessék vissza, amelyekben a szimbólumok egyáltalán semmit nem jelentenek.

A matematika filozófiai problémáinak a tudatos materialista dialektika alapján való vizsgálatát MARX kezdte meg,[79] aki mélyrehatóan elemezte a matematika XVII. és XVIII. századbeli fejlődését és megvilágította azt a dialektikus folyamatot, amellyel a véges meny-

[76] Erről a burzsoá filozófiai áramlatról l. az Enciklopédia Логистика c. cikkét.
[77] L. az Enciklopédia Интуиционизм c. cikkét.
[78] L. az Enciklopédia Формализм c. cikkét.
[79] L. az Enciklopédia Математические рукописи Маркса c. cikkét.

nyiségek algebrájának talaján létrejött a végtelen kicsiny mennyiségek analízise.[80] Különösen részletesen dolgozta ki MARX a differenciálfogalom tartalmának problémáját. A differenciálnak, mint „operatív szimbólumnak" általa felvetett koncepciója megelőzött olyan eszméket, amelyek csak a XX. században jelentkeztek ismét; MARX felfogása a differenciálról, mint a növekmény fő részéről teljesen megfelel annak, ami a mai tankönyvekben olvasható és ami az általa tanulmányozott munkákból hiányzott (a matematikusoknak az analízis megalapozásáról írt munkái, így CAUCHY francia matematikus művei, MARX előtt ismeretlenek maradtak).

3. A matematika története a XIX. és a XX. században

A XIX. század eleje és közepe. A XIX. század elején a matematikai analízis alkalmazási területeinek újabb jelentős kiszélesedése következik be. Eddig két olyan fő része volt a fizikának, amely nagy matematikai apparátust követelt: a mechanika és az optika; most ezekhez hozzájárul még az elektrodinamika, a mágnesesség tana és a termodinamika is. Nagymértékben kifejlődnek a folytonos közegek mechanikájának legfontosabb részei; ezek közül az összenyomhatatlan ideális folyadékok hidrodinamikája régebbi (XVIII. századi) keletkezésű D. BERNOULLI, EULER, D'ALEMBERT és LAGRANGE). Gyorsan növekszenek a technika igényei is a matematikával szemben, a XIX. század elején főleg a gőzgépek termodinamikája, a technikai matematika, a ballisztika terén. A mechanika és a matematikai fizika új fejezeteinek legfontosabb matematikai apparátusaként fokozottan kidolgozzák a parciális differenciálegyenletek elméletét és különösen a potenciálelméletet.[81] Ebben az irányban folytatja munkáját a század elején és közepén az analízis legnagyobb tudósainak többsége (GAUSS[82] német, J. FOURIER, POISSON és CAUCHY[83] francia, DIRICHLET német, GREEN angol és OSZTROGRADSZKIJ[84] orosz matematikus). OSZTROGRADSZKIJ rakta le többváltozós függvényekre a variációszámítás alapjait, fedezte fel a hármas integrálok kettős integrálokká való átalakításának nevezetes formuláját (1828, publikálva 1831-ben), valamint e formula általánosítását n dimenzióra (1834, publikálva 1838-ban), tökéletesítette a változók helyettesítésének elméletét a többszörös integrálokban (1836, publikálva 1838); e téren megkapta lényegében mindazokat az eredményeket, amelyeket később (1841) általánosan n dimenzióra JACOBI német matematikus fogalmazott meg.[85] STOKES angol matematikusnak a matematikai fizika differenciálegyenletei terén végzett kutatásai eredményeként megszületik a vektoranalízis (amelynek egyik legfontosabb formulája egyébként lényegében éppen a fentebb említett Osztrogradszkij formula).

[80] L. ezzel kapcsolatban az Enciklopédia Бесконечно малые c. cikkét is.

[81] L. az Enciklopédia Потенциала теория c. cikkét.

[82] L. az Enciklopédia Гаусс c. cikkét.

[83] L. az Enciklopédia Коши c. cikkét.

[84] L. az Enciklopédia Остроградский c. cikkét.

[85] L. az Enciklopédia Якобиан c. cikkét.

Annak ellenére, hogy a XX. század elején a természettudományban az a mechanisztikus meggyőződés uralkodott, hogy minden természeti jelenség leírható differenciálegyenletekkel, a gyakorlat által felvetett problémák kényszere folytán jelentősen továbbfejlődik a valószínűségszámítás. LAPLACE és POISSON új, hatékony analitikus apparátust teremtenek meg erre a célra. Oroszországban a valószínűségszámításnak a minőségellenőrzésre és a statisztikára való alkalmazásával foglalkozik OSZTROGRADSZKIJ és BUNYAKOVSZKIJ; CSEBISEV megadja a valószínűségszámítás elemeinek szigorú megalapozását és bebizonyítja híres tételét (1867), amely egyesíti a nagy számok törvényének[86] addig ismert formáit.

Mint már említettük, azokon a munkákon kívül, amelyek a természettudomány és a technika által felvetett problémákkal voltak kapcsolatosak, rendkívül erősen foglalkoztatták a matematikusok figyelmét az analízis szigorú megalapozásának problémái. CAUCHY 1821-ben és 1823-ban közzétette az École Polytechnique-on tartott előadásait. Ezek a határértékek és a sorok elméletének szigorú felépítését, a folytonos függvény fogalmának definícióját és a differenciál- és integrálszámításnak a határértékelméleten alapuló tárgyalását (többek között azt a tételt is, amely kimondja, hogy folytonos függvénynek van integrálja) tartalmazták. Ennek az előadásnak bizonyos kiegészítéseit, valamint a differenciálegyenletek megoldásának exisztencia- és unicitástételét később publikálta. LOBACSEVSZKIJ (1834), majd később DIRICHLET (1837) határozottan kimondották a függvény általános — tetszőleges megfelelésként való definícióját. DIRICHLET bebizonyította, hogy minden olyan függvény, amelynek csak véges számú maximuma és minimuma van, Fourier-sorba fejthető: LOBACSEVSZKIJ 1834—35-ben olyan konvergenciakritériumokat adott meg a Fourier-sorokra, melyeknek érvényességi tartománya bizonyos vonatkozásban tágabb a Dirichlet-kritérium érvényességi tartományánál.

Fentebb már említettük WESSEL dán geodétának a komplex számok geometriai interpretációját tartalmazó munkáját; ezt annak idején nem méltatták figyelemre. 1799-ben GAUSS közzétette az algebra alaptételének első bizonyítását, mely azonban a tételt óvatosan, valós kifejezésmódot használva fogalmazza meg („minden valós polinom első- és másodfokú valós tényezők szorzatára bontható"). Csak sokkal később (1831-ben) tárgyalja GAUSS kifejezetten a komplex számok elméletét. Közben ARGAND 1806-ban közzétette munkáját a komplex számok elméletéről, azok geometriai interpretációjával és D'ALEMBERT lemmájának bizonyításával, 1815-ben pedig az algebra alaptételének bizonyítását, amely alapgondolata tekintetében közel áll CAUCHY 1821-ből származó bizonyításához.

A komplex számok természetének világos megértése alapján megszületik a komplex változós függvénytan. GAUSS e téren igen sokat tudott, de úgy-

[86] L. az Enciklopédia Больших чисел закон c. cikkét.

szólván semmit sem publikált. Az általános alapokat CAUCHY rakta le; az elliptikus függvények elméletét pedig ABEL és JACOBI építette ki. Már erre az időszakra jellemző, hogy — a XVIII. század tisztán algoritmikus felfogásától eltérőleg — a figyelem a függvény komplex tartománybeli viselkedésének sajátságaira és az itt uralkodó alapvető geometriai törvényszerűségekre irányul (kezdve a Taylor-sor konvergenciasugarának a szinguláris pontok elhelyezkedésétől való függésén, amit CAUCHY fedezett fel). A század közepén a komplex változós függvénytannak ez a — bizonyos értelemben — „kvalitatív" és geometriai jellege RIEMANN[87] német matematikusnál tovább erősödik. Kiderül, hogy az analitikus függvény természetes geometriai hordozója — amennyiben többértékű függvényről van szó — nem a komplex számsík, hanem a megfelelő Riemann-féle felület — egy olyan alakzat, amelynek természete csak a geometria fentebb említett újszerű értelmezésének keretei között érthető meg. Noha WEIERSTRASS német matematikus a tiszta analízis talaján maradva eléri az általánosságnak ugyanazt a színvonalát, mint amit RIEMANN, a továbbiakban RIEMANN geometriai eszméi azok, amelyek mindinkább meghatározzák a komplex változós függvénytan területén a kutatás egész stílusát.

A komplex változós függvénytan hegemóniája idején a valós tartománybeli függvénytan konkrét problémái iránti érdeklődés fő képviselője CSEBISEV.[88] E téren CSEBISEV legkiemelkedőbb eredménye az optimális közelítés elméletének[89] megteremtése (1854-től kezdve); a kiindulási pontot itt a mechanizmusok elméletének problémái adták.

Az algebrában az után, hogy RUFFINI és ABEL bebizonyították az általános ötödfokú egyenletek gyökökkel való megoldhatatlanságát, GALOIS francia matematikus megmutatta, hogy bármely egyenlet gyökökkel való megolható-hatósága az egyenlet Galois-csoportjának tulajdonságaitól függ.[90] A csoportok általános absztrakt vizsgálatának feladatát CAYLEY tűzte ki. Meg kell jegyeznünk, hogy a csoportelmélet jelentőségének általános elismerése még magában az algebrában is csak a hetvenes években, JORDAN francia matematikus munkáinak megjelenése után történik meg. GALOIS és ABEL munkái nyomán születik meg az algebrai számtest fogalma is, mely új tudománynak: az algebrai számelméletnek keletkezésére vezet.

Új, lényegesen magasabb színvonalra emelkedik a számelmélet régi, a közönséges egész számokkal kapcsolatos problémáinak megoldása is. GAUSS kidolgozza a számok kvadratikus formákkal való előállításának elméletét (1801), CSEBISEV megkapja az első eredményeket a prímszámoknak a természetes számsorban való sűrűsége oszlásával kapcsolatban (1848, 1850), DIRICHLET bebizonyítja, hogy a számtani haladványokban végtelen sok prímszám van stb.

87 L. az Enciklopédia Риман c. cikkét.
88 L. az Enciklopédia Чебышев c. cikkét.
89 L. az Enciklopédia Найлучшие приближения c. cikkét.
90 L. az Enciklopédia Галуа теория c. cikkét.

A felületek differenciálgeometriáját GAUSS (1827) és PETERSZON orosz matematikus (1853) alkotja meg. A geometria tárgyával kapcsolatos új nézetek kidolgozása terén, mint már mondottuk, alapvető jelentőségű volt a nem-euklideszi geometriának LOBACSEVSZKIJ által való megteremtése. LOBACSEVSZKIJ azáltal, hogy felépítette a nem-euklideszi trigonometriát és analitikus geometriát, lényegében megalkotta mindazt, ami szükséges ahhoz, hogy ez új geometria axiómarendszerének ellentmondásmentessége és teljessége megállapítható legyen. A nem-euklideszi geometriával párhuzamosan, hosszú ideig tőle függetlenül fejlődött a projektív geometria (PONCELET francia, STEINER svájci, STAUDT német matematikus és mások), amelynek fejlődése szintén a térrel kapcsolatos régi nézetek döntő megváltozásával függ össze. PLÜCKER német matematikus felépíti a geometriát úgy, hogy alapelemnek az egyenest tekinti, GRASSMANN német matematikus pedig megalkotja az n dimenziós vektortér affin és metrikus geometriáját.

A differenciálgeometriának lényegében már a felületek Gauss-féle belső geometriájának megteremtésével szintén megszűnik az euklideszi geometriával való közvetlen kapcsolata; az a tény, hogy a felület benne van a háromdimenziós euklideszi térben, a Gauss-féle felületelmélet szempontjából csupán esetleges körülmény. Ebből kiindulva RIEMANN megalkotja az n dimenziós varietás fogalmát (1854, publikálva 1866-ban), a $ds^2 = \Sigma a_{ik} dx_i dx_k$ kvadratikus differenciálforma alapján. Ezzel megvetette az alapját az n dimenziós varietások differenciálgeometriájának. A többdimenziós varietások topológiája terén az első gondolatok ugyancsak Riemanntól származnak.

A XIX. század vége és a XX. század eleje. A matematika a Szovjetunióban. Csak a XIX. század hetvenes éveiben fedezi fel FELIX KLEIN német matematikus a Lobacsevszkij-féle nem-euklideszi geometria első modelljét, amely végképp eloszlatja a nem-euklideszi geometria ellentmondásmentességével szemben támasztott összes kétségeket. KLEIN a különböző dimenziószámú terek ez idő tájt megalkotott összes geometriáit bizonyos transzformációs csoportok invariánsai szempontjából vizsgálja meg. Ugyanekkor (1872-ben) DEDEKIND, G. CANTOR és WEIERSTRASS német matematikusok megteremtik az analízis megalapozására irányuló munka szükséges fundamentumát: az irracionális számok szigorúan felépített elméletét. 1879—84-ben teszi közzé CANTOR a végtelen halmazok általános elméletéről szóló alapvető munkáit. Csak ez után alakulhattak ki a matematika tárgyával, a matematikai diszciplinák felépítésével, az axiomatika szerepével stb. kapcsolatos modern elképzelések. Ezeknek széleskörű elterjedéséhez még néhány évtizedre volt szükség (a geometria felépítésével kapcsolatos modern elgondolások általános elismerését HILBERT német matematikus „Grundlagen der Geometrie" c. munkájának 1899-ben való megjelenésével szokták összefüggésbe hozni).

A matematika alapja terén a kutatások a továbbiakban főként két irányban mélyültek el: az általános halmazelméletben felmerült logikai nehézségek legyőzése és a matematikai diszciplinák felépítésének, valamint a matematikai problémák matematikai logikai eszközökkel való konstruktív megoldásának vizsgálata irányában. Ezek a kutatások a matematika önálló, nagy ágává fejlődtek *(matematikai logika)*.[91] A matematikai logika alapjait a XIX. században BOOLE angol logikus, PORECKIJ orosz matematikus, SCHRÖDER és FREGE német matematikusok, PEANO olasz matematikus és mások teremtették meg. A XX. század nyugat-európai és amerikai matematikusai szintén nagy eredményeket értek el ezen a téren: ide tartozik HILBERT bizonyításelmélete, a BROUWER holland matematikus és követői által megteremtett konstruktív logika (amelyet BROUWER helytelen filozófiai nézeteivel kapcsolatban „intuicionista logiká"-nak neveznek), GÖDEL osztrák matematikus tétele a formális deduktív diszplicinák teljességének elvi lehetetlenségéről, a számelméleti függvények algoritmikus „kiszámíthatóságának" kidolgozása stb. A kapitalista világban azonban a matematika alapjaival kapcsolatos munkák mindinkább a reakciós filozófia hatása alá kerülnek és gyakran az agnoszticizmust, a matematikai elméletnek a gyakorlattól való teljes elszakadását propagálják. A halmazelmélet és a matematikai logika elvi problémái terén több nagy jelentőségű tényleges felfedezés szovjet kutatók érdeme (N. N. LUZIN munkái a projektív halmazokról, az „intuicionista logika" A. N. KOLMOGOROV-féle konstruktív értelmezése, P. Sz. NOVIKOV munkái bizonyos halmazelméleti tételek ellentmondásmentességéről, az algoritmusok és a matematikai problémák algoritmikus megoldása elméletének továbbfejlesztése az ifjabb A. A. MARKOV által stb.). A matematika alapjainak területén a Szovjetunióban és a népi demokratikus országokban folyó kutatások tudatosan a dialektikus materializmus filozófiájából indulnak ki.

A XIX. század második felében megkezdődik a matematika történetével kapcsolatos problémák intenzív feldolgozása [M. CANTOR (Németország), ZEUTHEN (Dánia), BOBINYIN (Oroszország)]. Nagy eredményeket ért el ezen a téren egy szovjet tudóscsoport (M. J. VIGODSZKIJ, A. P. JUSKEVICS, Sz. A. JANOVSZKAJA és mások), amely a matematika történetének különböző problémáit marxista-leninista módszerrel vizsgálja.

A XIX. század végén és a XX. század elején a matematika minden ága — a legrégibben: a számelméleten kezdve — hatalmas fejlődésnek indul. Ez az időszak nemcsak a munkák mennyisége tekintetében múlja felül a régebbieket, hanem a módszerek tökéletessége és hatékonysága, valamint az eredmények véglegessége terén is. KUMMER, KRONECKER, DEDEKIND német matematikusok, ZOLOTARJOV orosz és HILBERT német matematikusok megvetik a modern algebrai számelmélet alapjait. HERMITE francia matematikus 1873-ban bebizonyítja az e szám, LINDEMAN német matematikus 1882-ben a π szám transzcendens voltát; HADAMARD francia és LA VALLÉE—POUSSIN belga matematikus (mindketten 1896-ban) betetőzik CSEBISEVnek a prímszámok fogyó sűrűségű eloszlására vonatkozó vizsgálatait. G. MINKOWSKI német matematikus

[91] L. az Enciklopédia Логика математическая c. cikkét.

geometriai módszereket vezet be a számelméleti kutatásokban. Oroszországban a számelméleti munkák CSEBISEV után nagyszerű fejlődésnek indulnak; ezzel kapcsolatban a fentebb már említett ZOLOTARJOVon kívül A. N. KORKIN, G. F. VORONOJ és az idősebb A. A. MARKOV nevét kell megemlítenünk. Azt a vezető pozíciót, amelyet az orosz tudomány az ő munkáik révén a számelméletben megszerzett, a szovjet korszakokban még inkább megerősítették I. M. VINOGRADOV művei. VINOGRADOV 1937-ben páratlan számokra eldöntötte a híres Goldbach-sejtést[92] és igen hatékony módszert alkotott az additiv számelmélet különféle egyéb problémáinak megoldására is. Nagy jelentőségűek a számelmélet terén L. G. SNIRELMAN, B. N. GYELONYE, A. O. GELFOND és más szovjet matematikusok munkái. Továbbfejlődnek az algebra klasszikus fejezetei is. Így például részletesen vizsgálják (a gyökökkel meg nem oldható) magasabbfokú egyenletek megoldásának a lehető legegyszerűbb alakú egyenletek megoldására való visszavezetését, azaz a *rezolvensek*[93] problémáját (F. KLEIN, HILBERT, a Szovjetunióban pedig N. G. CSEBOTARJEV). A rezgéselméleti problémákkal (stabilitás, automatikus szabályozás) kapcsolatban kiterjedten kutatják az egyenletek gyökei különféle síkbeli elhelyezkedéseinek kritériumait.[94] A lineáris algebra problémái, amelyek a mechanikában és a fizikában mind kiterjedtebb alkalmazást találnak, teljesen új megvilágítást nyertek azáltal, hogy a kutatásokba bevonták az *n* dimenziós *vektorterek*kel[95] kapcsolatos geometriai elgondolásokat. Az elméleti algebrai kutatások súlypontja azonban átkerül az algebra új területeire: a csoportelméletre, a testek, gyűrűk, struktúrák elméletére stb. Az algebrának több ilyen része mélyreható alkalmazásra kerül a természettudományokban: így a csoportelmélet a krisztallográfiában (J. Sz. FJODOROV és A. SCHOENFLIESS), később pedig a kvantummechanikában.[96] A modern algebra általános problémáin a Szovjetunióban a legkiválóbb tudósokból álló iskola dolgozik (O. J. SMIDT, A. G. KUROS, A. I. MALCEV és mások).

Az algebra és a geometria határterületén LIE norvég matematikus (1873-tól kezdve) megalkotja a folytonos csoportok elméletét; ennek az elméletnek a módszerei később behatolnak a matematika és a természettudomány mind újabb és újabb területeire. Ezen a téren igen jelentős eredményeket értek el L. Sz. PONTRJAGIN és más szovjet tudósok.

Az elemi és a projektív geometria a XIX. század végén és a XX. században főleg a logikai és axiomatikus alapok szempontjából érdekli a matematikusokat.[97] Erőteljesen kifejlődött — az ábrázoló geometrián kívül, amelyet már említettünk — néhány alkalmazott geometriai diszciplina: a nomográfia,[98]

[92] L. az Enciklopédia Голдбаха проблема c. cikkét.
[93] L. az Enciklopédia Резульвента c. cikkét.
[94] L. például az Enciklopédia Гурвица критерий c. cikkét.
[95] L. az Enciklopédia Векторные пространства c. cikkét.
[96] L. az Enciklopédia Представления групп c. cikkét.
[97] L. az Enciklopédia Геометрия c. cikkének V. részét: Основания геометрии.
[98] L. az Enciklopédia Номография c. cikkét.

a grafikus számítási módszerek,[99] a grafikus sztatika[100] stb. A geometriának a tudomány legnagyobb erőit vonzó, legfontosabb területe azonban a differenciálgeometria és, valamivel kisebb mértékben, az *algebrai geometria.*[101] Az euklideszi háromdimenziós tér differenciálgeometriáját teljes rendszerességgel tárgyalják BELTRAMI olasz, DARBOUX francia matematikusok, és mások. Később gyors fejlődésnek indul a különféle (az euklideszi mozgásoknál) szélesebb transzformációs csoportok,[102] különösen a többdimenziós terek differenciálgeometriája, mind a metrikus,[103] mind a különféle más „leképezések"-é (affin, konform, projektív differenciálgeometria). A geometriai vizsgálatoknak ezt az irányát, melynek az általános relativitáselmélet[104] felfedezése hatalmas további impulzust adott, eredetileg LEVI-CIVITÁ olasz, CARTAN francia és H. WEYL német matematikus teremtette meg. A differenciálgeometria minden területén fontos munkák fűződnek szovjet matematikusok (D. F. JEGOROV, Sz. P. FINYIKOV, N. N. LUZIN) nevéhez. Tenzormódszerekkel dolgozó kutatók nagy iskoláját teremtette meg a Szovjetunióban V. F. KAGAN. Különösen nagy eredményeket értek el a szovjet matematikusok a differenciálgeometriai alakulatok „egészben" való vizsgálata terén (L. A. LJUSZTYERNYIK és L. G. SNIRELMAN munkái a zárt geodetikus *vonalak* exisztenciájáról, A. D. ALEXANDROV munkái a felületek „egészben" való hajlításáról stb.).

A halmazelmélet és a valós függvénytan (l. alább) általánosabb nézőpontjainak kifejlődése folytán az analitikus függvények elmélete a XIX. század végén elveszíti ezt a kizárólagos központi helyzetét, amelyet a XIX. század elején és közepén a matematikai analízisen belül elfoglalt. Ennek ellenére nem csökkenő intenzitással fejlődik tovább, mind belső szükségletei, mind az analízis egyéb ágaival és közvetlenül a természettudományokkal való összefüggései folytán. Különösen lényeges volt ebben a tekintetben a konform leképezések szerepének tisztázása a rugalmasságtani, valamint az ideális folyadékok sík áramlásaival kapcsolatos problémáknál felmerülő parciális differenciálegyenletek peremértékfeladatainak (pl. a Laplace-egyenlet Dirichlet-feladatának) megoldásánál.

FELIX KLEIN német és POINCARÉ francia matematikusok megalkotják az *automorf függvények*[105] elméletét, amelyben LOBACSEVSZKIJ geometriája jelentős alkalmazást nyert. PICARD, POINCARÉ, HADAMARD és BOREL francia matematikusok mélyrehatóan kidolgozzák az egész függvények elméletét; munkájuk eredményeként lehetővé válik a prímszámok sűrűségeloszlásáról szóló, már

[99] L. az Enciklopédia Графические вычисления c. cikkét.

[100] L. az Enciklopédia Графическая статика c. cikkét.

[101] L. az Enciklopédia Алгебраическая геометрия c. cikkét.

[102] L. az Enciklopédia Конформно-дифференциальная геометрия és Проективно-дифференциальная геометрия c. cikkeit.

[103] L. az Enciklopédia Римановы геометрии c. cikkét.

[104] L. az Enciklopédia Относительности теория c. cikkét.

[105] L. az Enciklopédia Автоморфные функции c. cikkét.

említett tétel felfedezése. A geometriai függvénytant és a *Riemann-féle felületek*[106] elméletét POINCARÉ francia matematikus, HILBERT, WEYL és CARATHÉODORY német matematikusok, a konform ábrázolását[107] I. I. PRIVALOV, M. A. LAVRENTYJEV, G. M. GOLUZIN és más szovjet matematikusok fejlesztik ki. Igen kiterjedten alkalmazzák munkáikban a konform ábrázolást (és ennek általánosítását: a kvázikonform ábrázolást) az aeromechanikára és a rugalmasságtanra N. N. ZSUKOVSZKIJ, SZ. A. CSAPLIGIN, N. I. MUSZHELJSVILI, M. A. LAVRENTYJEV és más szovjet kutatók.

A matematikai analízis szisztematikus, az irracionális számok szigorúan megalapozott elméletére és a halmazelméletre való felépítése a matematika új ágának: a *valós függvénytan*nak[108] a keletkezésére vezetett. Ez a többé-kevésbé megállapodásszerű elnevezés főként az analízis alapfogalmainak (pl. a függvény, derivált, az integrál fogalma) és legfontosabb műveleteinek (pl. a függvények trigonometrikus sorba[109] fejtése) kellően általános szempontból való vizsgálatát jelenti. Míg azelőtt csak az olyan függvényeket vizsgálták rendszeresen, amelyek „természetes úton" merültek fel valamilyen speciális feladatban, a valós függvénytanra jellemző, hogy teljesen felkutatja az általános definíciók tényleges terjedelmét (így például először BOLZANO cseh matematikus, később pedig WEIERSTRASS felfedezte, hogy van olyan folytonos függvény, amely sehol sem differenciálható), és általánosítja az analízis alapfogalmait azokra az esetekre, amikor eredeti formájukban nem adnak kimerítő választ arra a problémára, amelynek megoldásából keletkeztek (foglalkozik például a valós függvénytan olyan integrálási eljárás konstruálásával, amelynek segítségével b á r m e l y, minden x helyen differenciálható $F(x)$ függvény — egy állandó tagtól eltekintve — megkapható, ha deriváltja, $F'(x)$, adva van). A modern valós függvénytan alapját a francia iskola matematikusai vetették meg C. JORDAN, BOREL, LEBESGUE, BAIRE). A vezetőszerepet később átveszi az orosz és a szovjet iskola, amelynek megalapítása D. F. JEGOROV és különösen N. N. LUZIN nevéhez fűződik. Ennek az iskolának a legkiválóbb képviselői D. J. MENYSOV, A. J. HINCSIN, P. SZ. ALEXANDROV, M. J. SZUSZLIN, I. I. PRIVALOV (főként a valós és az analitikus függvénytan határterületén végzett munkáival), N. K. BARI és mások. Intenzíven foglalkozik a valós függvénytan és a halmazelmélet fejlesztésével a W. SIERPINSKI vezetése alatt álló lengyel iskola.

A valós függvényeket azonban vizsgálták más, CSEBISEVhez csatlakozó, klasszikus szempontból is. Bebizonyosodott ugyanis, hogy a függvények szűkebb, alapvető gyakorlati jelentőséggel bíró osztályai (az adott számszor differenciálható, vagy az analitikus függvények) jellemezhetők azzal, hogy n nö-

[106] L. az Enciklopédia Римановы поверхности c. cikkét.
[107] L. az Enciklopédia Конформное отображение c. cikkét.
[108] L. az Enciklopédia Функций теория c. cikkét.
[109] L. az Enciklopédia Тригонометрические ряды c. cikkét.

vekedésével milyen gyorsan csökken a függvénynek a legjobb n-edfokú közelítő polinomoktól való eltérése. Ebben az irányban a legjelentősebb eredmények a XX. század elején Sz. N. BERNSTEJN nevéhez fűződnek, aki később a *konstruktív függvénytan*[110] iskolájának élére állt; a konstruktív függvénytanban is a szovjet kutatók viszik a vezetőszerepet.[111] A függvények polinomokkal való approximációja terén komplex tartományban tekintve is nagy eredményeket értek el a szovjet matematikusok (M. A. LAVRENTYJEV, M. V. KELDIS és mások).

A valós függvénytan — közvetlen jelentőségén kívül — nagy hatással volt a matematika sok más részének fejlődésére is. Különösen nélkülözhetetleneknek bizonyultak a valós függvénytanban kidolgozott módszerek a funkcionálanalízis megalapozásánál. A funkcionálanalízis módszerei tekintetében a valós függvénytan és a halmazelmélet hatása alatt fejlődött, tartalmát és az általa megoldott problémák jellegét illetőleg azonban közvetlenül csatlakozik a klasszikus analízishez és a matematikai fizikához; különösen nélkülözhetetlenné vált — főként az operátorszámítás[112] alakjában — a kvantumfizikában. A funkcionálanalízisnek, mint a matematika önálló ágának tudatos különválasztása elsőízben VOLTERRA olasz matematikus nevéhez fűződik (a XIX. század végén). Ma már a funkcionálanalízis részének tekintik a sokkal régebbi keletű variációszámítást,[113] amelynek feladata a funkcionálok maximumainak és minimumainak meghatározása, valamint az integrálegyenletek[114] elméletét is, amelynek rendszeres felépítését ugyancsak VOLTERRA kezdte meg, majd FREDHOLM svéd matematikus folytatta. FREDHOLM nagy vonásokban befejezte az ő nevét viselő fontos lineáris integrálegyenletek elméletének kiépítését. Általánosabb szemszögből nézve a funkcionálanalízisben központi helyet foglal el a végtelen sok dimenziós *lineáris terek*,[115] valamint operátoraik elmélete. (A lineáris terek elméletének leghasználatosabb formája BANACH lengyel matematikustól származik.) Különösen intenzív kutatómunka folyik az operátorok legfontosabb speciálisesetének, a *Hilbert-tér*[116] operátorainak területén. (A Hilbert-tér alapvető szerepét HILBERT-nek az integrálegyenletekről szóló munkája derítette fel.) A funkcionálanalízis általános problémái terén jelentős munkák fűződnek RIESZ FRIGYES magyar, NEUMANN JÁNOS amerikai, I.M. GELFAND szovjet matematikus és mások nevéhez. N. I. MUSZHELISVILI és az általa vezetett iskola kidolgozta a *szinguláris integrálegyenletek*[117] elméletét, amely a rugalmasságtanban igen nagy jelentőségű. A variációszámítás terén fontos munkát végez-

110 L. az Enciklopédia Конструктивная теория функций c. cikkét.
111 L. az Enciklopédia Приближение и интерполирование функций c. cikkét.
112 L. az Enciklopédia Операторное исчисление c. cikkét.
113 L. az Enciklopédia Вариационное исчисление c. cikkét.
114 L. az Enciklopédia Интегральные уравиения c. cikkét.
115 L. az Enciklopédia Линейные пространства c. cikkét.
116 L. az Enciklopédia Гулбертово пространство c. cikkét.
117 L. az Enciklopédia Сингуляарные интегральные уравнения c. cikkét.

tek M. A. LAVRENTYJEV, L. A. LJUSZTYERNYIK és N. N. BOGOLJUBOV szovjet matematikusok. Kiterjedten alkalmazták a funkcionálanalízis módszereit konkrét matematikai fizikai problémák megoldására Sz. L. SZOBOLJEV és az analízis más szovjet tudósai.

A funkcionálanalízis kifejlődése azonban nem változtat azon, hogy a természettudományok és a technika által a matematika elé tárt feladatok többsége differenciálegyenletekre vezet, mind közönséges (véges szabadsági fokú rendszerek vizsgálata), mind parciális differenciálegyenletekre (folytonos közegek vizsgálata, kvantumfizika). Ennek következtében intenzíven művelik a differenciálegyenletek kutatásának minden irányát. A bonyolult lineáris differenciálegyenletrendszerek megoldására megalkotják az *operátor számítási*[118] módszereket. Az operátorszámítás megteremtését — nem egészen jogosultan — O. HEAVISIDE angol mérnök nevével szokták összefüggésbe hozni (holott ezen a téren elég sok alapvető tényre korábban (1862) rámutatott például M. J. VASCSENKO—ZAHARCSENKO orosz matematikus). Az olyan nem-lineáris differenciálegyenletrendszerekre, amelyek a linearitástól csak kevéssé térnek el, kiterjedten alkalmazzák a paraméter szerinti sorfejtés módszerét. Tovább fejlődik a közönséges differenciálegyenletek analitikus elmélete (POINCARÉ és P. PAINLEVÉ francia matematikusok, I. A. LAPPO—DANYILEVSZKIJ szovjet matematikus és mások). A közönséges differenciálegyenletek területén azonban a legtöbb figyelmet a megoldások kvalitatív vizsgálatára fordítják, ide tartoznak: a szinguláris pontok osztályozása (Poincaré és mások), a stabilitás[119] problémái, amelyeket különösen mélyrehatóan vizsgált A. M. LJAPUNOV orosz matematikus, a határciklusok meghatározása és az integrálgörbék topologikus elhelyezkedésének egyéb kérdései, az integrálgörbék „középértékben" való viselkedése (az ún. *ergod-elmélet*[120]). Mindezek a vizsgálatok intenzív fejlődésnek indultak a Szovjetunióban (L. I. MANDELSTAM, A. A. ANDRONOV, V. V. SZTYEPANOV, N. M. KRILOV, N. N. BOGOLJUBOV és mások).

A differenciálegyenletek kvalitatív elmélete[121] Poincaré számára kiindulópontul szolgált a varietások RIEMANN által éppen csak körvonalazott topológiájának[122] széles mederben való folytatásához, főként a varietások önmagukra való folytonos leképezései fixpontjainak vizsgálata irányában. Innen erednek a modern topológia „kombinatorikus", „homológ", és „homotip"-módszerei; ezeket L. BROUWER holland O. VEBLEN, J. ALEXANDER, S. LEFSHETZ amerikai és H. HOPF német matematikus dolgozta ki. A topológia másik iránya a halmazelmélet és a funkcionálanalízis talaján nőtt ki és az általános topologikus terek elméletének rendszeres felépítésére vezetett (M. FRÉCHET francia,

[118] L. az Enciklopédia Операционное исчисление c. cikkét.
[119] L. az Enciklopédia Устойчивость c. cikkét.
[120] L. az Enciklopédia Эргодическайа теория c. cikkét.
[121] L. az Enciklopédia Качественная теория дифференциальных уравнений c. cikkét.
[122] L. az Enciklopédia Топология c. cikkét.

F. HAUSDORFF német, P. SZ. URISZON, P. SZ. ALEKSZANDROV és A. N. TYIHONOV szovjet matematikus), beleértve ebbe a topologikus terek dimenzióelméletét (URISZON). Ezeknek az irányoknak az egyesítését, ami az algebrai „kombinatorikus módszereknek" teljes általánosságot adott, a szovjet topológiai iskola valósította meg (P. SZ. ALEKSZANDROV, L. SZ. PONTRJAGIN), amelynek munkái a modern topológia alapját alkotják. A topológiai módszereknek az analízisre való alkalmazását G. BIRKHOF és M. MORSE amerikai, J. SCHAUDER lengyel, L. A. LJUSZTYERNYIK szovjet matematikus és mások dolgozták ki.

A parciális differenciálegyenletek elmélete a kutatók figyelmének a peremértékproblémák[123] felé való fordulása és az analitikus peremfeltételekre szorítkozásról való lemondás következtében már a XIX. század végén teljesen új alakot öltött. A parciális differenciálegyenletek analitikus elmélete, mely CAUCHY-tól, WEIERSTRASStól és KOVALEVSZKAJA orosz matematikustól ered, nem veszítette el jelentőségét, csupán némileg háttérbe szorult, mert bebizonyosodott, hogy az elmélet a peremértékproblémák megoldásánál nem biztosítja a probléma kitűzésének „korrektségét", azaz azt, hogy a peremfeltételek közelítő ismeretében a megoldás közelítőleg megkapható legyen, enélkül pedig az elméleti megoldásnak nincs gyakorlati értéke. A helyzet bonyolultabb, mint ahogyan az analitikus elmélet szemszögéből nézve látszott: azok a peremértékproblémák, amelyeknek kitűzése „korrekt", a különböző egyenlettípusokra különbözők. Az egyes egyenlettípusok megfelelő peremértékfeladatainak kiválasztásához a legmegbízhatóbb útmutatást azáltal kaphatjuk, ha közvetlenül a megfelelő fizikai jelenségeket tekintjük (hullámok terjedése, hőterjedés, diffúzió stb.). Az a tény, hogy a parciális differenciálegyenletek elmélete jórészt a matematikai fizika differenciálegyenleteinek[124] elméletévé alakult át, nagy és pozitív jelentőségű abból a szempontból, hogy hatalmas konkrét anyag felhalmozódására vezetett, ugyanakkor azonban mutatja azt is, hogy a peremértékproblémák általános elmélete nem fejlődött megfelelő mértékben, nem tette lehetővé az összes létező „korrekt" kitűzésű peremértékproblémák elméletileg rendszeres vizsgálatát. Ebben az irányban lényeges haladás csak a legutóbbi időben mutatkozik, I. G. PETROVSZKIJ, SZ. L. SZOBOLJEV és más szovjet matematikusok munkája nyomán.

A matematikai fizika különféle differenciálegyenleteivel kapcsolatos munkák joggal foglalják el az egész mai matematikai irodalom jelentős részét. DIRICHLET és RIEMANN után ezzel a területtel POINCARÉ, PICARD, GOURSAT, HADAMARD francia matematikusok, J. RAYLEIGH és U. THOMSON angol fizikusok, K. NEUMANN, G. SCHWARZ, HILBERT, R. COURANT német matematikusok és sokan mások foglalkoztak. Az elliptikus egyenletek elméletének azt az alapvető jelentőségű problémáját, analitikusak-e megoldásaik, a XX. század elején orosz matematikus, SZ. N. BERNSTEJN oldotta meg. A matematikai fizika differen-

[123] L. az Enciklopédia Краевые задачи c. cikkét.
[124] L. az Enciklopédia Уравнения математической физики c. cikkét.

ciálegyenleteinek területén rendszeres munkát folytató szovjet iskola megalapítói A. M. LJAPUNOV, V. A. SZTYEKLOV, N. M. GJUNTER, A. N. KRILOV. Ennek az iskolának az élén ma V. I. SZMIRNOV, I. G. PETROVSZKIJ, SZ. L. SZOBOLJEV, A. N. TYIHONOV és más tudósok állnak, akik révén a szovjet tudomány a matematika e területének több részén vezető szerephez jutott.

A technikai problémák tulajdonságainak és megoldásának vizsgálatánál a differenciálegyenletek elméletének fontos kiegészítője a valószínűségszámítás.[125] Míg a XIX. század elején a hibaszámítástól eltekintve csak a tüzérek használtak valószínűségszámítási módszereket, a XIX. század végén és a XX. század elején a valószínűségszámítás a statisztikus fizika és mechanika fejlődése, valamint a matematikai statisztika [126] apparátusának kidolgozása folytán számos új alkalmazásra talál. A legmélyebbre hatoló valószínűségszámítási kutatások a XIX. század végén és a XX. század elején az orosz iskola matematikusainak nevéhez fűződnek (CSEBISEV, az idősebb A. A. MARKOV, A. M. LJAPUNOV). Ezek a kutatások főként a valószínűségszámítás központi határeloszlástétele alkalmazhatósági kritériumainak felderítésére irányulnak. A XX. században minden országban megnő az érdeklődés a valószínűségszámítás iránt (Németországban R. MIESES, Franciaországban E. BOREL és P. LÉVY, az Egyesült Államokban W. FELLER és mások). A Szovjetunióban alapvető jelentőségűek Sz. N. BERNSTEJN munkái, aki betetőzte a Csebisev-féle iskola művét és több új elméleti és gyakorlati irányban indította el a kutatómunkát. A szovjet tudósok (A. J. HINCSIN, A. N. KOLMOGOROV és mások) megalapozzák a „véletlen", sztochasztikus folyamatok elméletét és a valós függvénytan mértékfogalma, valamint a valószínűség fogalma közti, első ízben BOREL által észrevett analógiából kiindulva végleges formába öntik a valószínűségszámítás axiomatikus felépítését.

Ha az elméleti matematikai kutatások eredményét a gyakorlatban fel akarjuk használni, a kitűzött problémára a választ számszerű alakban kell megkapnunk. Sokszor azonban kiderül, hogy ez a feladat teljes, kimerítő tárgyalása után is éppenséggel nem könnyű dolog. A XIX. század végén és a XX. században az analízis numerikus módszerei [127] a matematika önálló nagy ágává nőnek ki. Különösen nagy figyelmet fordítanak a differenciálegyenletek numerikus integrálására.[128] A közönséges differenciálegyenletekre kiterjedten alkalmazható az a módszer, amelyet J. ADAMS angol csillagász még 1855-ben fedezett fel és később K. STÖRMER norvég matematikus fejlesztett tovább. Más típusú módszert alkotott K. RUNGE német matematikus. E két típus sokféle változatán és a szukcesszív approximáció [129] régen ismert módszerén kívül

[125] L. az Enciklopédia Теория вероятностей c. cikkét.
[126] L. az Enciklopédia Математическая статистика c. cikkét.
[127] L. az Enciklopédia Численные методы c. cikkét.
[128] L. az Enciklopédia Приближённое интегрирование c. cikkét.
[129] L. az Enciklopédia Последовательных приближений метод c. cikkét.

melynek elméleti megalapozása PICARD nevéhez fűződik, SZ. A. CSAPLIGIN szovjet matematikus (1919-ben) a közönséges differenciálegyenletek integrálására teljesen más elveken alapuló új módszert alkotott. A parciális differenciálegyenletekre alkalmazható növekmény-módszereket, melyeknek kidolgozását G. LIEBMANN német matematikus kezdte meg, a Szovjetunióban S. A. GERSGORIN és több más kutató tökéletesítette. Egy más, W. RITZ német matematikustól származó módszer[130] jelentős továbbfejlesztése GALJORKIN orosz matematikus érdeme (1915). A Galjorkin-módszer alkalmazhatóságának kritériumait M. V. KELDIS és mások vizsgálták. Az analízis numerikus módszereinek területén minden kutatási irányra nagy hatással voltak A.N. KRILOV munkái. Az analízis numerikus módszereinek a funkcionálanalízissel való jelentős kapcsolatait L. V. KANTOROVICS fedezte fel.

A numerikus számításokat igénylő munkák széleskörű kifejlődése folytán mind több matematikai táblázat[131] kiszámítása és kiadása vált szükségessé. Több, a táblázatok szerkesztésével és a rajtuk való interpolációval kapcsolatos probléma serkentőleg hat a megfelelő elméleti kutatásokra is, különösen a többváltozós függvények táblázataival kapcsolatban, („tabuláció-elmélet").

Az utóbbi időben mind nagyobb jelentőségűvé válnak a számításokban a nagy gyorsszámológépek. Ezzel kapcsolatban a matematikának új ága keletkezett: a programozás elmélete. Ennek az elméletnek a célkitűzése a problémák olyan alakra való hozása, hogy számológépek segítségével minél alkalmasabb módon megoldhatók legyenek.[132] [133]

[130] L. az Enciklopédia Ритца метод c. cikkét.

[131] L. az Enciklopédia Таблицы математические („Matematikai táblázatok") c. cikkét,

[132] A „gépi" matematika technikai oldalát illetőleg l. az Enciklopédia Счётная машинная техника, Математические машины, Математические приборы, Вычислительные машины, Счётные машины. Универсальные вычислительные машины, Электронные вычислительные машины c. cikkeit.

[133] A cikk végén (a Nagy Szovjet Enciklopédia 26. kötetének 483. oldalán) bibliográfia található, mely külön sorolja fel a matematika történetére és a filozófiájára vonatkozó és az általános jellegű, közvetlenül matematikai munkákat. (*A ford.*)

KÖNYVISMERTETÉS

Turán Pál: „Az analízis egy új módszeréről és annak egyes alkalmazásairól" című könyvének ismertetése

A szerző ebben a könyvben foglalta össze első ízben komplex számok hatványösszegeire vonatkozó azon felfedezésének következményeit, mely durva fogalmazásban úgy szól, hogy a kitevő szukcesszív értékeinek megfelelő hatványösszegek abszolút értékei nem lehetnek mindannyian nagyon kicsinyek, ha a kitevő befut egy bizonyos intervallumot. Az említett gondolatkörhöz tartozó első eredményekből, melyeket a kvázi-Riemann-sejtéssel foglalkozó munkájával kapcsolatban talált, a további alkalmazások során egy általános módszert alakított ki; ennek elvi alapjait és összefüggéseit a diofantikus approximáció elméletével a könyv első része tárgyalja, míg a második rész az egymástól távol eső alkalmazások nagy számát mutatja be, melyeknek köre a könyv megjelenése óta tovább tágult. Jóllehet az alapul szolgáló módszer ismertetése, valamint a tárgyalt alkalmazások jelentékeny része önálló dolgozatok alakjában már korábban megjelent, a könyv ezek ismeretét nem tételezi fel és általában az analízis alapjain kívül csupán a Riemann-féle ζ-függvényre vonatkozó néhány jól ismert tény ismeretét követeli meg az olvasótól.

A bevezető paragrafusok rámutatnak arra, hogy a diofantikus approximációk elméletének két alaptétele, úm. Kronecker, illetve Dirichlet tétele az analitikus alkalmazások céljaira adekvát alakban fogalmazhatók meg. Kronecker tétele ugyanis ekvivalens a következő állítással: ha $z_1, z_2, \ldots, z_k$ olyan komplex számok, melyeknek arkuszai lineárisan függetlenek, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pedig tetszőleges komplex számok, akkor egy tetszőlegesen kicsiny pozitív ε-hoz található olyan valós t, hogy

$$\frac{\left|\sum_{j=1}^{k} a_j z_j^t\right|}{\sum_{j=1}^{k} |a_j||z_j|^t} > 1-\varepsilon;$$

Dirichlet tétele pedig lényegileg ekvivalens a következővel: ha $z_1, z_2, \ldots, z_k$ tetszőleges komplex számok, viszont az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ együtthatók pozitívek, akkor $\omega > 4$-re

$$\max_{1 \leqq t \leqq \omega^k} \frac{\left|\sum_{j=1}^{k} a_j z_j^t\right|}{\sum_{j=1}^{k} |a_j||z_j|^t} > \cos\frac{2\pi}{\omega}.$$

Eszerint mindkét tétel „analitikus" alakjában exponenciális összegekre vonatkozik és olyan valós t értékek egzisztenciáját állítja, melyekre a $\sum_{j=1}^{k} a_j z_j^t$ általánosított hatványösszeg abszolút értéke nem lesz igen kicsiny tagjainak kölcsönös interferenciája folytán, hanem megközelíti triviális felső korlátját, a $\sum_{j=1}^{k} |a_j||z_j|^t$ mennyiséget. Általában ilyen t létezése nincs biztosítva, azonban az idézett tételek szerint vagy a z_j-k arkuszainak lineáris függetlensége, vagy az a_j-k pozitív volta elégséges feltétel ilyen t értékek egzisztenciája számára; az alkalmazások szempontjából igen lényeges, hogy az utóbbi feltétel mellett a keresett t érték egy bizonyos értelemben lokalizálható, az előbbi feltétel esetében azonban semmilyen lokalizáció sem adható meg.

H. BOHR azon tételeinek, miszerint a $\zeta(s)$ függvény abszolút értéke a $\sigma > 1$ félsíkon (itt σ az s komplex független változó valós részét jelenti) tetszőlegesen kicsiny, illetve tetszőlegesen nagy értékeket is felvesz, általa adott bizonyításai éppen arra a körülményre vannak alapítva, hogy KRONECKER, illetve DIRICHLET tételei az említett „trigonometrikus" alakban fogalmazhatók meg. Ez indokolja meg, hogy szerző az előszóban módszere kezdeményezőjeként BOHR-t nevezi meg, tekintettel arra, hogy ő „a diofantikus approximációk elméletét első ízben alkalmazta függvénytani kérdések megoldására és elsőnek jegyezte meg, hogy ezen elmélet bizonyos kérdései trigonometrikus kifejezések becslésével ekvivalensek". Ezzel kapcsolatban mégis hangsúlyozni kell, hogy BOHR felismerését lényegileg csupán a ζ-függvény értékkészletére vonatkozó konkrét problémával kapcsolatban használta fel és nem tért ki a mögötte rejlő általánosítások elvi lehetőségeinek vizsgálatára; utóbbiak irányát a könyv szerzőjének vizsgálatai jelölték ki: meg kell szabadulni a lineáris függetlenségre, illetve a pozitivitásra vonatkozó kikötésektől, továbbá azon az áron, hogy gyengébb alsó becslésekkel is megelégszünk, biztosítani kell, hogy lehetőleg sűrűn lépjenek fel azok a t értékek, melyekre a becslés érvényes. Az analízis különféle kérdéseire való alkalmazásoknál nem az a lényeges, hogy olyan t-ket találjunk, amelyekre $\left|\sum_{j=1}^{k} a_j z_j^t\right|$ triviális felső korlátjához igen közeli értéket vesz fel, hanem az fontos, hogy elég szűk intervallumokra legyenek korlátozhatók t azon értékei, melyekre ez a mennyiség viszonylag elég nagy értékeket vesz fel, ami elérhető, ha $\sum_{j=1}^{k} |a_j||z_j|^t$ szerepét egy nála lényegesen kisebb mennyiség veszi át, melyet a szerző normának nevez.

A könyv alaptételei a

$$\min_{j=1,\ldots,k} |z_j|^t, \text{ illetve a } \max_{j=1,\ldots,k} |z_j|^t$$

normákra vonatkoznak. E tételek tehát olyan t értékek egzisztenciáját állítják, melyekre a

$$\frac{\left|\sum_{j=1}^{k} a_j z_j^t\right|}{\min\limits_{j=1,\ldots,k} |z_j|^t}, \text{ illetve az } \frac{\left|\sum_{j=1}^{k} a_j z_j^t\right|}{\max\limits_{j=1,\ldots,k} |z_j|^t}$$

mennyiség egy a z_j-től független alsó korlát fölött marad (első, ill. második alapfeladat), éspedig ilyen t-k előfordulása akármilyen $m \leqq t \leqq m+k$ intervallumban ki van mutatva, teljesen tetszőleges komplex a_j-k és z_j-k esetén. Pontosabban szólva a két alapfeladat megoldását a következő állítások adják:

Ha $m \geq 0$, akkor a tetszőleges komplex z_j-khez és a_j-khez $(j=1,2,\ldots,k)$ van olyan egész ν, hogy fennállnak az

$$m \leqq \nu \leqq m+k,$$

valamint az

$$\frac{|a_1 z_1^\nu + a_2 z_2^\nu + \cdots + a_k z_k^\nu|}{\min\limits_{1 \leqq j \leqq k} |z_j|^\nu} \geqq |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \left(\frac{k}{2e(m+k)}\right)^k$$

egyenlőtlenségek.

Ha $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tetszőleges komplex számok, $z_1, z_2, \ldots, z_k$ olyan komplex számok, melyekre

$$|z_1| \geqq |z_2| \geqq \cdots \geqq |z_k|,$$

továbbá $m \geqq 0$, akkor létezik olyan egész ν, hogy fennállnak az

$$m \leqq \nu \leqq m+k,$$

valamint az

$$\frac{|a_1 z_1^\nu + a_2 z_2^\nu + \cdots + a_k z_k^\nu|}{|z_1|^\nu} \geqq \left(\frac{k}{24e^2(m+2k)}\right)^k \min_{1 \leqq j \leqq k} |a_1 + a_2 + \cdots + a_j|$$

egyenlőtlenségek.

A könyv első része egyébként az általánosított hatványösszegnek olyan becsléseit is tartalmazza, melyeknél nem csak a norma más, mint a két alapfeladatban, hanem a becslés természete is; így a

$$\frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{k} a_j z_j^t\right|}{\sum\limits_{j=1}^{k} |a_j| |z_j|^t}$$

mennyiségre tetszőleges a_j-k esetén olyan alsó korlát adható meg, mely az a_j-től független, azonban függ a z_j-től. Ezen további feladatok szisztematikus diszkusszióját, mely a nagyszámú és sokféle alkalmazási lehetőségek szempontjából nem kevésbé jelentősnek látszik, mint a már részletesen kifejtett két alapfeladat, a könyv következő kiadásai már tartalmazni fogják.

Az alaptételek első alkalmazása arra mutat rá, hogy LITTLEWOOD egy ismert tétele az első alaptételből levezethető. A második alkalmazás ugyanezen tétel következő folyományát adja: legyen

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k} b_j e^{i\mu_j x},$$

hol a b_j együtthatók tetszőlegesek, a μ_j-kre pedig

$$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_k;$$

legyen továbbá $\alpha \leqq \beta < \gamma \leqq \delta$; akkor

$$\max_{\alpha \leqq x \leqq \delta} |g(x)| \leqq \left(2e\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \beta}\right)^k \max_{\beta \leqq x \leqq \gamma} |g(x)|.$$

E tétel egész μ_j-k esetén is S. BERNSTEIN egyik ismert tétele általánosításának fogható fel; nagyon lényeges azonban, hogy itt a felső korlát nem a $g(x)$ fokszámától függ, mint BERNSTEIN tételében, hanem $g(x)$ tagjainak a számától; ez a körülmény jelentős a tételnek a hézagos hatvány-, illetve Dirichlet-sorok elméletére való alkalmazásai tekintetében, melyek a következő paragrafusok egyikében vannak tárgyalva és felölelik a Fabry-tétel egy általánosítását Dirichlet-sorokra, nem szükségképpen egész kitevők esetében. Ez a bizonyítás világosan mutatja Fabry tételének összefüggését a diofantikus approximációk elméletével. Ugyancsak az első főtételből vezethető le egy elég éles felső becslés nem-negatív együtthatós $\sum_{j=0}^{n} a_j \cos \lambda_j x$ általánosított trigonometrikus polinomok $(0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n)$ egy adott intervallumba eső gyökeinek számosságára, mely független az együtthatóktól és a $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ mennyiségektől, de függ a tagok számától, az intervallum hosszától és helyzetétől, valamint λ_n-től.

Az ötödik alkalmazás a kvázi-analitikus függvények elméletéhez kapcsolódik. Az idevonatkozó tétel szerint az olyan

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{i\lambda_j x} \qquad (\lambda_j \text{ valós})$$

alakú exponenciális sorok által definiált függvények osztálya, melyeknél az a_j együtthatók azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy egy alkalmasan választott fix pozitív ϱ-val

$$\overline{\lim_{\omega \to \infty}}\, e^{\frac{2}{\varrho}\omega \log \omega} \sum_{j > \omega} |a_j| < \infty,$$

kvázi-analitikus abban az értelemben, hogy ha $f_1(x)$ és $f_2(x)$ mindketten ehhez az osztályhoz tartoznak és egy alkalmasan választott valós x_0-val

$$\lim_{h \to +0} e^{h^{-\varrho}} \max_{x_0 - h \leqq x \leqq x_0} |f(x)| < \infty,$$

akkor minden valós x-re $f_1(x) = f_2(x)$. A Mandelbrojt-értelemben kvázi-analitikus függvényosztályokra vonatkozó korábbi tételekben az osztályhoz tartozás kritériuma nem az együtthatókra, hanem az exponensekre vonatkozott. Megjegyezhető, hogy $\omega \log \omega$ helyett $\omega^{1-\varepsilon}$-nal a tétel már nem igaz.

A következő paragrafus azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy ha $n > 1$ egész szám, az $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ komplex számokra $|\varkappa_1| \geqq |\varkappa_2| \geqq \cdots \geqq |\varkappa_n|$, $g(w)$ pedig véges rendű egész függvény, akkor valamilyen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ számokkal képzett

$$G(z) = \sum_{j=1}^{n} b_j g(z\varkappa_j)$$

egész függvény rendje milyen feltételek mellett fog megegyezni $g(w)$ rendjével? A hatványösszegbecslésekből levezethető, hogy ha a $g(w) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m$ függvényhez találhatók olyan pozitív egész ω, n és A számok, hogy

$$\left| \frac{c_\mu}{c_\nu} \right| \geqq A(m+n)^{-n\omega},$$

valahányszor tetszőleges pozitív m-mel $m \leqq \mu$ és $\nu \leqq m+n$, akkor úgy választva a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ komplex számokat, hogy a

$$|b_1+\cdots+b_n|>0$$

feltétel teljesüljön, a $G(z)$ egész függvény rendje, ha pedig még a

$$\min_{1 \leqq j \leqq n} |b_1+\cdots+b_j|>0$$

feltétel is teljesül, akkor típusa is megegyezik a $g(z\varkappa_1)$ függvényével. Ez a tétel GELFOND egy nevezetes approximációs tételével kapcsolatban is jelentős, amennyiben az approximációk egyértelműségére enged következtetni.

A második rész 7. §-a a közönséges differenciálegyenletek elméletéhez tartozik. POINCARÉ, LJAPUNOV, PERRON és mások vizsgálták annak kritériumait, hogy egy differenciálegyenlet megoldásai mikor lesznek instabilisek, más szóval milyen feltételek mellett következik be az, hogy a kezdeti adatok tetszőleges kis megváltoztatása esetén a megoldás a végtelen idő folyamán végül is szükségképpen tetszőleges mértékben el fog térni az eredetitől. A hatványösszegmódszer bizonyos kikötések mellett lehetővé teszi az eltérés számára egy explicit alsó korlát megállapítását, amely biztosítja, hogy az eltérés valamely kijelölhető véges időköz folyamán elér egy megkívánt értéket; a régebbi vizsgálatoknál már maga a kérdés felvetése olyan természetű volt, hogy az eltérésnek csak a $t \to \infty$ határátmenetnek megfelelő viselkedésére lehet információt nyerni. Az itt kezdeményezett gondolatkör további kiépítése az égi mechanika egyes kérdéseivel kapcsolatban is fontosnak látszik.

A nyolcadik paragrafus az algebrai egyenletek közelítő megoldására szolgáló Graeffe-féle szabály olyan módosításait adja meg, melyek abban az esetben is érvényesek, mikor a megoldandó egyenlet gyökeinek abszolút értékei között egymással egyenlőek is vannak. Az idevágó tételek lehetővé teszik a gyökök meghatározását egy tetszőleges kis mennyiségnél kisebb hibával véges sok lépésben, melyek mindegyike az alapműveletekből tevődik össze, és amelyeknek száma csak a megkívánt pontosságtól és az egyenlet fokszámától függ, de nem függ annak együtthatóitól. Az itt levezetett eljárás a numerikus számításoknál ugyanakkora pontosságot biztosít, mint OSTROWSKI korábbi eredményei, azonban egyszerűség szempontjából messze felülmúlja azokat.

A hátralevő paragrafusok tartalma az analitikus számelmélethez, illetve a ζ-függvény elméletéhez tartozik. Az itt ismertetett eredmények közül kettő a primszámformula maradéktagjára, illetve a $\Delta(x)=\sum_{p \leqq x} \log p - x$ különbségre vonatkozik. Ezek közül az első $\Delta(x)$-nek Ω-becslését a ζ-függvény egyetlen tetszőleges nem triviális nullahelyétől függően állapítja meg, míg v. KOCH korábbi becslésében a hatványkitevőt az összes nullahelyek valós részeinek felső határa szabja meg. Ennek jelentősége azon körülménnyel függ össze, hogy eddig nem sikerült olyan gyökmentes $\sigma > \vartheta$ félsík egzisztenciáját kimutatni, melyre $\vartheta < 1$ volna, azonban egyes nem triviális nullahelyek ismeretesek. A másik tétel meghatározza a ζ-függvény gyökmentes tartományának és $\Delta(x)$ nagyságrendjének összefüggését abban az esetben, ha az előbb említett felső határ az egységgel egyenlő. Ennek állítása szerint ha γ_1 azon γ számok felső határa, melyekre alkalmasan választott c_1-gyel

$$\Delta(x) = O(xe^{-c_1 \log^{\gamma} x}),$$

γ_2 pedig azon pozitív γ' számok alsó határa, melyekre alkalmas c_2 és c_3 mellett a

$$\sigma > 1 - \frac{c_2}{\log^{\gamma'}|t|}, \quad |t| > c_3$$

tartományban $\zeta(s)$ nem tűnik el, akkor

$$\gamma_1 = \frac{1}{1+\gamma_2};$$

innen látható, hogy egy

$$\sigma > 1 - \frac{c}{\log^{\gamma'}|t|}$$

alakú gyökmentes tartomány bizonyított egzisztenciájából elvileg nem lehet a $\Delta(x)$ maradéktagra az eddigieknél lényegesen pontosabb felső becslést levezetni.

A számelméleti következményekben oly gazdag Riemann-sejtés helyett a következmények szempontjából elegendő volna az ún. kvazi-Riemann-sejtést bebizonyítani, vagyis azt az állítást, hogy létezik olyan $\sigma > \vartheta \left(\frac{1}{2} \leqq \vartheta < 1\right)$ félsík, melyben $\zeta(s)$-nek legfeljebb csak véges sok nullahelye van. A második alaptétel segítségével kimutatható, hogy a kvázi-Riemann-sejtés helyessége a Lindelöf-sejtés feltételezése mellett levezethető, ha a

$$\sum_{N \leqq n \leqq 2N} \Lambda(n) e^{-it \log n} \qquad (N \text{ pozitív egész})$$

összegekre vonatkozólag bizonyos becslések érvényesek. Ez az eredmény általánosítható a Dirichlet-sorral előállítható függvények egy bizonyos osztályára. Emellett találunk a könyvben a

$$\sum_{N \leqq p \leqq 2N} e^{-it \log \gamma_p} \qquad \left(N > 0 \text{ egész}, \ \frac{1}{2} \leqq \gamma \leqq 2, \ \gamma \neq 1\right)$$

alakú összegek becsléseire vonatkozó állításokat, melyeknek mindegyike ekvivalens a kvazi-Riemann-sejtéssel. Az egyik ilyen ekvivalenciatétel azt állítja, hogy a kvazi-Riemann-sejtés helyességéhez szükséges és elegendő, hogy valahányszor egy $\alpha > 2$ állandóval $N > |t|^{\alpha}$, fennálljon a

$$\left| \sum_{N \leqq p \leqq 2N} e^{-it \log \gamma_p} \right| < \frac{A N \log^{20} N}{|t|^{\beta}}$$

egyenlőtlenség, hol $\frac{1}{2} < \beta \leqq 1$ és A olyan állandó, melynek értéke csak α-tól, β-tól és γ-tól függ.

Az utóbbi egyenlőtlenségben szereplő összegek a ζ-függvény elméletétől függetlenül igen pontosan megbecsülhetők VINOGRADOV módszerével; így tehát remélhető, hogy ezen eljárás pontosabbá tételével a kvazi-Riemann-sejtés bebizonyítható lesz. Mindaddig azonban, míg ez nem vihető keresztül, egyes számelméleti alkalmazások tekintetében nagy jelentősége van olyan tételeknek, melyek azt állítják, hogy egy $\sigma > \vartheta \left(\frac{1}{2} \leqq \vartheta < 1\right)$ félsíkban a ζ-függvénynek nincs „túl sok" gyöke; ebbe a tételkörbe tartozik CARLSON egyik nevezetes tétele, mely pl. a Piltz-féle sejtés irányában enged meg bizonyos következtetéseket. A szerző CARLSON tételének egy olyan pendant-ját vezette le, mely nála az egységtől kevéssé különböző ϑ értékekre lényegesen jobb becslést ad, aminek jelentősége van az alkalmazásoknál. Végül a második rész utolsó paragrafusa utal arra, hogy az itt kifejtett módszerrel a számtani haladványok legkisebb primszámára vonatkozó Linnyik-féle tételnek az eredetinél sokkal egyszerűbb bizonyítása szintén kivitelezhetőnek látszik.

A könyvben tárgyalt applikációk nagy száma, valamint az a körülmény, hogy ezek a matematika olyan ágazatai között oszlanak meg, melyek között nem áll fenn semmiféle szorosabb összefüggés, világosan mutatják a hatványösszegmódszer mélységét és nagy horderejét, azonban korántsem merítik ki a két főtétel alkalmazásainak lehetőségeit, másrészt pedig a szerzőnek könyve megjelenése óta végzett kutatásaiból kitűnt, hogy e két főtétel nem öleli még fel az alapul szolgáló idea összes elvi következményeit, úgyhogy az első részben tárgyalt általános diszciplina teljes szisztematikus kifejtését is csak a későbbi kiadások fogják bemutatni.

Földes István
a matematikai tudományok kandidátusa

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Nagy Károly kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1954. november 5-én rendezte meg a III. Osztály a szokásos vitát NAGY KÁROLY kandidátusi értekezése felett. Az értekezést HORVÁTH JÁNOS, valamint HOFFMANN TIBOR, a fizikai tudományok kandidátusai opponálták, a vita-ülés bírálóbizottságának elnökéül KOVÁCS ISTVÁN lev. tagot kérte fel a Tudományos Minősítő Bizottság. A vitára szép számú hallgatóság sereglett egybe.

A vita előtt a bizottság titkára ismertette NAGY KÁROLYnak eddigi tudományos tevékenységét, majd az elnök felkérésére NAGY KÁROLY foglalta össze 74 oldal terjedelmű dolgozatának főbb eredményeit. Kutatásának célja — mint kifejtette — a mozgó izotróp közegekben kialakuló sugárzási tér kvantumelméletének kimélyítése volt: közelebbről pedig az a kérdés, mutat-e átlátszó anyagokban is az elektromágneses sugárzás részecske-jelleget.

Ezt a kérdést NAGY KÁROLY vizsgálatait megelőzően J. M. JAUCH és K. M. WATSON már tanulmányozták, azonban eredményeikből különböző paradoxiák fakadtak. Az említett két szerző a tér kvantumelméleti tárgyalása céljából ugyanis lényegileg az elektromágneses energia-impulzus-sűrűség tenzorának Minkowski-féle változatából indult ki, amelynek pedig aszimmetrikus mivolta tudvalevően nem biztosítja sem az impulzusmomentum, sem az energia-tehetetlenség tételének érvényességét. NOVOBÁTZKY akadémikus szerint ebben a hibás kiindulásban gyökerezik JAUCH és WATSON eredményeiből vonható számos következtetésnek lehetetlensége, hogy pl. a fotonenergia c/n-nél sebesebben mozgó dielektrikumban negatív lenne, egy c/n sebességű megfigyelő viszont a foton energiáját zérusnak, impulzusát pedig mégis végesnek mérné stb. Ezen paradoxiák magyarázatára mások úgy vélik, hogy a „foton"-kép csak vakuumra korlátozható: a foton a dielektrikumban egyáltalán nem is rendelkezne részecske-sajátságokkal.

NAGY KÁROLY a tér kvantumelméleti tárgyalása céljából a közeg elektromágneses energia- és impulzus-sűrűségét az Abraham-féle tenzorból származtatta, amellyel szemben már pusztán szimmetrikusságának jóvoltából dinamikai ellenvetések nem tehetők. Az így számított elektromágneses erőtérnek mindjárt a következő különösen figyelemre méltó két tulajdonságára sikerült NAGY KÁROLYnak rájönnie: a mozgó dielektrikum sugárzási terében az energia sajátállapota egyszersmind *nem* sajátállapota az impulzusnak is, ezenfelül mind a térenergia, mind az impulzus időben általában változik. Ezek a komplikációk csak megerősítették azt a felfogást, hogy az energia-impulzus-sűrűség számításánál az Abraham-tenzort MARX GY. és GYÖRGYI G. nyomán eltűnő divergenciájú ún. sugárzási energia-impulzus-tenzorrá kell kibővíteni, amely az elektromágneses térnek és dielektrikumnak kölcsönhatásáról, vagyis a dielektrikumban ébredt feszültségekről is számot ad. NAGY KÁROLYnak sikerült az anyagi tenzort általánosan kovariáns alakban felírnia, sőt nem érve be az energia és impulzus kvantálásával ő a Hamilton-operátor konkrét alakját is előállította, hogy a szereplő mennyiségek időbeli változását is tanulmányozhassa.

A sugárzási tér kvantumelméleti tárgyalásánál NAGY KÁROLYnak a következő fontos tételeket sikerült kimutatnia. A sugárzási tér energia-sajátállapotai egyben az impulzusnak is sajátállapotai. Ennek következtében a dielektrikumban az energia-kvantumok ugyanúgy függnek a terjedési sebességtől, mint anyagi részek energiája és impulzusa (az elektromágneses energia- és impulzuskvantumok is négyes vektorként transzformálódnak). A fotonnal együttmozgó észlelő sem találhatja a foton energiáját zérusnak. A foton helybeli lokalizációja azonban, amint vakuumban, a mozgó dielektrikumban sincs meg, minden körülmények között véges és pozitív valós értékűnek bizonyuló nyugalmi tömegének a frekvenciától, törésmutatótól függő mivolta pedig szintén a részecske-felfogás korlátait jelenti.

Ezután NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus emelkedett szólásra, hogy ismertesse, milyen forrásokból fakadt az általa vezetett NAGY KÁROLY aspiránsnak most megvitatandó értekezése. Kifejtette, hogy a mozgó dielektrikumok elektrodinamikájának kérdésében a tanszékén búvárkodó elméleti munkaközösség egyöntetűen csatlakozott azon korábbi meggyőződéséhez, hogy közegekben a vitatott elektromágneses energia-impulzus-tenzornak csupán az ABRAHAM által felállított szimmetrikus alakja lehet helytálló. Az energia tehetetlenségét ugyanis töretlenül csak ez az alak hozza kifejezésre, de különös bizonyító erő jelentkezik abban is, hogy neki egy Lagrange-függvényből a mértéktenzor variációja segítségével ezt a tenzor-alakot sikerült leszármaztatnia.

Legutóbb MARX GYÖRGY pedig GYÖRGYI GÉZÁval közösen írott egyik dolgozatában a fellépő erőhatások pontosabb elemzése alapján az energiatenzornak szintén Abraham-féle alakjához jutott el egyben kimutatva azt is, hogy a Minkowski-féle tenzoralakot indokoló valamennyi kísérleti eredmény az Abraham-féle alapján még természetesebben értelmezhető. Az említett szerzőknek sikerült ugyanis megtalálniuk az elektromágneses tér és a dielektrikum eddig figyelembe nem vett kölcsönhatását kifejező energiatenzort, amely az Abraham-féléhez adva a sugárzásnak, mint zárt rendszernek LAUE ellenvetéseit is kiálló, divergenciamentes tenzorát szolgáltatja.

Sötét szellemnek kellett tehát érvényesülnie akkor, amikor a TMB az érdemes GYÖRGYI GÉZÁt az aspiránturától visszavetette, noha az Akadémia a MARX—GYÖRGYI-féle munkát a legmagasabb prémiummal honorálta.

NOVOBÁTZKY akadémikus megítélése szerint a mozgó dielektrikumok elektromágneses terének kvantumelméleti tárgyalása kockázatos vállalkozásnak látszott. Hiszen LAUE nézete szerint az is lehetséges volt, hogy a foton csak vakuumban bír szemléletes jelentéssel. NAGY KÁROLY munkáját mégis siker koronázta, a meginduló vita pedig meg fogja mutatni, nem kell-e újabb problémákkal szembenéznünk.

Ezután az opponensek adták elő rendre a bírálatukat NAGY KÁROLY dolgozatával kapcsolatban.

HORVÁTH JÁNOS kandidátus szerint a tárgyalt probléma szerfelett aktuális és szinte túlságosan igényes is. Különösen jelentősnek ítélte a dolgozatnak azt az eredményét, hogy a sugárzási tér kvantumának nyugalmi tömege nem tűnik el, energiája és frekvenciája között pedig nem a megszokott összefüggés áll fenn. Megítélése szerint azonban nagyobb tárgyilagossággal lehetett volna a szerzőnek eljárnia akkor, amikor az Abraham-féle és Minkowski-féle tenzor között szemben álló nézeteket értékeli, hiszen olyan szakértők, mint LAUE, MÖLLER és TAMM az utóbbi alak mellett törtek lándzsát. Hiánynak minősítette még, hogy a dolgozat nem hivatkozik azon eredetileg TAMMtól származó felismerésre, hogy az energia-impulzus-tenzornak nem szükséges szimmetrikusnak lennie, minthogy az elektromágneses tér kölcsönhatásban van a dielektrikummal. Sőt LAUE iskolájában BECK ki is számította azt a dielektrikumhoz rendelendő járulékos tenzort, amely az elektromágneses teret zárttá egészítve ki a Minkowski-féle tenzorváltozatot szimmetrikussá teszi. Az Abraham-féle szimmetrikus tenzorváltozat divergenciájának el nem tűnéséből a dolgozat helyesen a tér és közeg kölcsönhatására következtet, azonban az opponens szerint helytelenül arra is, hogy az eltűnő divergenciájú aszimmetrikus tenzorváltozat a kölcsönhatást nem tartalmazza, hiszen ennek aszimmetriája egy forgónyomaték fellépését eredményezi. Ugyan HORVÁTH kandidátus a Minkowski-féle tenzorváltozat álláspontját képviseli, mégis az eddigi sikerek alapján elismerte, hogy egy Abraham-féle változaton nyugvó elmélet is felépíthető. Dönteni azonban egy experimentum crucis hivatott.

Hiányolta még az opponens, hogy a dolgozat nem utal JAUCH és WATSON későbbi dolgozataira is, amelyek pedig a korábbi dolgozat egyes nehézségeit eliminálták. Megkérdezte a szerzőt, helytálló-e JAUCH és WATSON azon megállapítása, hogy a Cserenkov-effektus értelmezésére c/n-nél sebesebb közegáramlás esetén a foton energiájának negatív mivolta szükséges. HORVÁTH kandidátus szerint vitatható, szabad-e sugárzási tér véges nyugalmi tömegű kvantumait fotonoknak nevezni. Egyéb részletekbe vágó rövidebb kérdések feltevése közben választ várt arra nézve is, felbontható-e a sugárzási tér kvantuma egy fotonra, valamint a dielektrikumnak egy fotonjára abból a célból, hogy a nyugalmi tömeg zérus értéke és az $E = h \cdot \nu$ összefüggés fenntartható legyen.

Minthogy a felhozott opponensi észrevételek NAGY KÁROLY jelentős eredményeit nem érintik, HORVÁTH kandidátus a dolgozatot alkalmasnak ítélte arra, hogy vele a szerző a kandidátusi fokozatra pályázzék.

Ezután az opponáló HOFFMANN TIBOR kandidátus emelte ki, hogy NAGY KÁROLYnak dolgozatával sikerült megszüntetnie azokat az ellentmondásokat, amelyek az irodalomban a nem abszorbeáló dielektrikumban haladó fotonok képzetes fotontömege stb. körül léptek fel. Igen lényeges eredményként könyvelte el annak kimutatását, hogy az energia és az impulzus csak akkor bír egyidejűleg sajátértékkel, ha az elektromágneses térnek a dielektrikummal való kölcsönhatását is számításba vesszük.

Viszont hiányosságnak ítélte az opponens azt, hogy a dolgozat a nyert szép eredmények fizikai interpretációján túl könnyedén siklik át, fizikai konzekvenciát egyes helyeken le sem von, az értelmezést az olvasóra bízza. Különösen szükséges részletesebb diszkusszió a foton nyugalmi tömegének bevezetésénél, de az elektromágneses tér energiájának kvantálásánál nyert, úgyszintén a sugárzási térre kiszámított energiakifejezéssel kapcsolatban is. Kívánatos a sugárzási tér teljes impulzusának részletezése álló, ill. fénysebességű közegmozgás esetére is, továbbá azon vonatkoztatási rendszereknek megállapítása, amelyekből ítélve a dielektrikumban haladó fotonoknak energiája a vakuumbelinél nagyobb értékű.

Különösen értékesek HOFFMANN kandidátusnak azok az észrevételei, amelyek a dolgozat részleteire vonatkoznak. Ő nagy gonddal ellenőrizte a dolgozat részletszámításait, számos helyen számítási és jelölésbeli egyszerűsítésre, a fogalmazás kibővítésére, ill. szabatosabbá tételére, továbbá elírási hibára hívta fel a szerző figyelmét.

HOFFMANN kandidátus a dolgozatot szintén alkalmasnak minősítette arra, hogy megvédése árán szerzője a kandidátusi fokozatot elnyerje.

Az elnök ezután NAGY KÁROLYnak adta a szót. NAGY KÁROLY először HORVÁTH kandidátus kérdéseire válaszolt. Megemlítette, hogy dolgozatában csak a töltés és árammentes közegben haladó sugárzás elméletének történeti előzményeit kívánta vázolni, ezért nemcsak olyan érveket volt kénytelen elhagyni, amilyenek a Minkowski-féle tenzor-változat mellett, hanem olyanokat is, amilyenek az Abraham-féle változat mellett szólnak. Ugyanezen oknál fogva nem idézte TAMM hiányolt megállapítását*, továbbá JAUCH és WATSON későbbi dolgozatait.

A további opponensi észrevételekre a következőképpen válaszolt. Amíg a Minkowski-féle tenzorváltozat paradox módon, erőhatásra vissza nem vezethető forgatónyomaték fellépését involválja, és ebben jelentkezik a tér és közeg kölcsönhatása, addig az Abraham-féle változat, előnyére, erőhatásnak tulajdonítható forgatónyomatékra vezet. NAGY KÁROLY szerint a Cserenkov-effektus értelmezésénél a negatív fotonenergia paradoxiája onnan származik, hogy JAUCH és WATSON a tér és közeg kölcsönhatását nem veszik figyelembe. Bebizonyította, hogy a Cserenkov-effektus az Abraham-féle felfogás alapján is magyarázható, minthogy a sugárzásra mérvadó átmeneti matrixelemnek számításához szükséges Hamilton-operator alakja független attól, melyik energia-impulzustenzor alakot fogadjuk el. HORVÁTH kandidátus utoljára említett kérdésére a jelölt kifejtette, miért nem látja elvileg sem lehetségesnek a sugárzási tér kvantumát a korlátozó feltételek mellett fotonra és fononra felbontani.

HOFFMANN kandidátus oppoziciójára a jelölt kipótolta válaszában egyes levezetéseinek hiányait megköszönve a számításokkal és jelölésekkel kapcsolatos értékes megjegyzéseket. Majd a foton energiájára adta meg részletesen a hiányolt diszkussziót. Részletezte a két extrém esetben a sugárzási tér impulzusát is. Szabatosabban definiálta a foton nyugalmi tömegét, valamint annak kapcsolatát mozgási tömegével.

Az ezután megnyitott vitában először MÁTRAI TIBOR tette fel a jelöltnek a kérdést, lehet-e kristályos közegben is fotonról, mint korpuszkuláról beszélni. Majd MARX GYÖRGY kandidátus azzal kapcsolatban, hogy most a kristályos közegben haladó fotonok problémája felmerült, kívánatosnak látja a fotonok spinjének kvantumelektrodinamikai tárgyalását is. A pozitív és negatív spinállapotoknak a kristályos közegben valószínűleg elliptikusan polározott hullámok felelnek majd meg. E tekintetben a jelölt véleményét kérte. GYÖRGYI GÉZA idézve HORVÁTH opponensnek nézetét, amely szerint a Minkowski—Abraham vitában kísérlet hivatott dönteni, felvetette egy experimentum crucisnak lehetőségét: a Lorentz-féle erősűrűséget kellene mérni ferroelektromos, vagy szigetelő ferromágneses anyagokban. PÁL LÉNÁRD kandidátus szerint a jelölt eredményei alapján az várható, hogy a Compton-effektusnál a hullámhosszváltozás erősen függ az anyag törésmutatójától. Érdeklődött aziránt, megkísérelte-e a szerző az irodalomban található kísérleti adatok alapján e következtetést ellenőrizni. Végül HORVÁTH kandidátus kérdezte, megbecsülte-e a szerző a végesnek adódó foton-tömeg nagyságrendjét. NOVOBÁTZKY akadémikusnak beve-

* Megjegyezzük, hogy J. E. TAMM szóban forgó művének időközben megjelent új kiadása LANDAURA hivatkozva elhagyta a Minkowski-féle kifejezés mellett felhozott érveit és az Abraham-féle kifejezést használja.

zető megjegyzésére válaszolva pedig elismerte, hogy a jelölt disszertációja jelentős érveket szolgáltat az Abraham-féle tenzor mellett, ugyanakkor azonban kifejezte abbeli reményét, hogy hasonló vizsgálat a kiegészített Minkowski-tenzor alapján is elvégezhető.

NAGY KÁROLY a feltett kérdésekre GYÖRGYI GÉZA észrevételét is hálával fogadva szabatos választ adott. Az opponensek is elfogadták NAGY KÁROLY nekik adott válaszát.

Ezután a vitát berekesztve a bírálóbizottság határozatot hozott, amelyet az elnök az ülést ismét megnyitva a jelenlevők előtt kihirdetett. A határozat a következő:

„A NAGY KÁROLY aspiráns „Az elektromágneses sugárzás kvantumelmélete dielektrikumokban" című kandidátusi értekezésének nyilvános vitájára kiküldött bírálóbizottság megállapította, hogy a jelölt tárgyválasztása igen szerencsés, a választott disszertációs téma időszerű és érdekes. A jelölt a témakörben való alapos jártasságát jól bebizonyította, az idevágó irodalmat, valamint a kutatási módszereket jól ismeri és az utóbbiakat önállóan alkalmazni tudja. Disszertációjának érdeme, hogy a felvetett kérdést új szemszögből tárgyalja. Elért eredményei értékes adalékokat szolgáltatnak egy hosszú ideje fennálló tudományos vitának az eldöntéséhez. A jelölt és a hozzászólók a vita folyamán rámutattak az eredmények továbbfejlesztésének lehetőségeire.

Ennek alapján a bizottság javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy NAGY KÁROLY elvtársat nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává."

A magyar fizikusok várakozással tekintenek NAGY KÁROLY szépen indult kvantumelektrodinamikai kutatásainak kiszélesítése felé.

Mátrai Tibor
a fizikai tudományok kandidátusa

Kertész Andor kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1954. november 12-én került sor KERTÉSZ ANDOR aspiráns kandidátusi disszertációjának megvédésére. A jelölt matematikai rátermettségét már korábbi csoportelméleti dolgozataiból jól ismerjük. Témáját ezúttal a modern algebra egy másik területéről: a gyűrűelméletből veszi, és itt sikerül olyan eredményt elérnie, melyet az utóbbi évek egyik legszebb gyűrűelméleti eredményének tekinthetünk. Dolgozatának címe: „Operátormodulusok és féligegyszerű gyűrűk."

KERTÉSZ ANDOR rendkívül világosan és szabatosan ismertette dolgozatának eredményeit. Mindenekelőtt kiemelte az operátorcsoportoknak és az operátormodulusoknak a modern algebrában ma már elvitathatatlanul igen fontos szerepét. Utalt A. G. KUROS „Csoportelmélet"-ének legújabb kiadására, mely nagy teret biztosít az operátormodulusok elméletének tárgyalására.

A disszertáció első eredménye a közönséges Abel-féle csoportok elméletében fontos szerepet betöltő elemi Abel-féle csoportok általánosítása ún. elemi operátormodulusok esetére, melyek unitérek (azaz az operátortartománynak van egységeleme, és ez a csoporton identikusan operál). KERTÉSZ az ilyen operátormodulusoknak négy ekvivalens jellemzését adja. Ezek után megoldja a probléma duálisát, azaz megadja azokat az egységelemes gyűrűket, melyekre bármely unitér operátormodulus elemi. Itt a következő szép eredményt nyeri:

ezek a gyűrűk éppen a klasszikus értelemben vett féligegyszerű gyűrűk. Ennek bizonyítása közben a féligegyszerű gyűrűknek csupán egyetlen jellemző tulajdonságát használja fel éspedig azt, melyet a következő FUCHS—SZELE-féle tétel mond ki: egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely baloldali ideálja tartalmaz jobboldali egységelemet. Ezt követően a féligegyszerű gyűrűk további négy ekvivalens jellemzését, majd ugyancsak a féligegyszerű gyűrűk egy tisztán gyűrűelméleti jellemzését mutatja be.

Ezek után került sor a dolgozatnak az opponensek véleménye szerint is legértékesebb részére: a féligegyszerű gyűrűk feletti lineáris egyenletrendszerek elméletére. A lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete szerint bármely kompatibilis lineáris egyenletrendszernek van olyan megoldása, amelynek elemei az egyenletrendszer jobboldalán álló konstansok lineáris kombinációi, és az összes megoldások szabadon választható értékű paraméterek lineáris függvényeiként állíthatók elő. Sokáig csak az volt ismeretes, hogy véges számú egyenletből álló rendszert véve alapul, ferdetestre érvényes a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete. Nemrégen SZELE TIBORnak és GACSÁLYI SÁNDORnak sikerült általánosítania ezt arra az esetre, ha az egyenletek és ismeretlenek számossága tetszőleges. Ennek az eredménynek nagymértékű általánosítását és további általánosítás lehetetlenségét mondja ki a disszertáció 10. tétele, mely szerint *egy gyűrű fölött akkor és csak akkor érvényes a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete, ha az féligegyszerű gyűrű.* E tétel bizonyításában KERTÉSZ felhasználja a már említett FUCHS—SZELE-féle tételt.

Hogy ez a 10. tételben kimondott rendkívül szép eredmény a gyűrűelmélet fejlődésében ilyen sokáig váratott magára, annak oka nagyrészt abban keresendő, hogy már a legegyszerűbb $ax = b$ egyenlet megoldhatósága ferdetest alapulvételét szuggerálja. Mindenekelőtt ezzel az előítélettel kellett a szerzőnek szakítania, mikor elméletét felállította.

A disszertáció további részében az egyenletrendszerek megoldásaival foglalkozik, majd az utolsó §-ban az elemi operátormodulus fogalmát általánosítja arra az esetre, ha az operátortartomány nem szükségképpen tartalmaz egységelemet, s alkalmazásként többek között a féligegyszerű gyűrűk további jellemzéseit nyeri, köztük egy Goldman-féle tétel általánosítását.

A beszámoló után az opponensek, RÉDEI LÁSZLÓ és FUCHS LÁSZLÓ bírálatai következtek.

RÉDEI LÁSZLÓ hangsúlyozta, hogy KERTÉSZ ANDOR főeredménye a féligegyszerű gyűrűk „belső jellemzésének" tekinthető. A főeredmény megvilágítására meg kell azonban jegyezni — mondja az opponens — hogy a fenti klasszikus elmélet érvényessége erős kirovást jelent, mert speciálisan egyetlen $ax = b$ alakú egyismeretlenű kompatibilis egyenlet esetén azt követeli, hogy még az $ax = b$ egyenlet is (közönséges értelemben) megoldható legyen. Ezek után kiemelte még KERTÉSZ ANDOR dolgozatából azt a szép eredményt, mely szerint éppen a féligegyszerű gyűrűk azok az R gyűrűk, melyekre minden unitér R-modulus elemi. Ezeket a vizsgálatokat a szerző egy teljes világossággal először általa kimondott elv szellemében végzi, amely szerint a gyűrűk és modulusok ama kölcsönhatásukban vizsgálandók, melyet egymásra kifejtenek, miközben a gyűrűt a modulushoz operátortartományként rendeljük.

RÉDEI LÁSZLÓ opponens bírálatának összefoglalásaképpen megállapítja, hogy KERTÉSZ ANDOR kandidátusi disszertációja a csoport- és gyűrűelméletet új gondolatokkal és igen jelentős eredményekkel gazdagítja, amelyek kétségtelenül mély nyomot fognak hagyni főleg a lineáris algebrában, valamint a féligegyszerű gyűrűk felfogásában. Külön megdicsérte a dolgozat külső alakját, áttekinthető szerkezetét és szép stílusát.

Ezután FUCHS LÁSZLÓ opponens olvasta fel bírálatát. Hasonlóképpen kiemeli a dolgozatnak a féligegyszerű gyűrűkre vonatkozó két jellemzési módját, az elemi operátormodulusok és a lineáris egyenletrendszerek segítségével. Kiemeli továbbá a jelölt alapos tárgyi felkészültségét és tájékozottságát az irodalomban, s örvendetesnek tartja, hogy KERTÉSZ ANDOR, aki mint aspiráns számos szép eredményt ért el a végtelen Abel-csoportok elméletében, disszertációjában kibővíti kutatási területét és ezen a számára új területen is komoly eredményekre jut.

RÉDEI LÁSZLÓ és FUCHS LÁSZLÓ opponensek véleménye szerint KERTÉSZ ANDOR messzemenően alkalmas arra, hogy őt e dolgozata alapján a Tudományos Minősítő Bizottság a matematikai tudományok kandidátusává nyilvánítsa.

FUCHS LÁSZLÓ még néhány kérdést intézett a jelölthöz. Elsőnek megkérdezte: ismeretes-e olyan gyűrű, mely nem féligegyszerű, de amelyben minden egyismeretlenű egyenlet a kompatibilitási feltételek teljesülése mellett megoldható? Megjegyezte, hogy érdemes volna az egyenletrendszernek a gyűrűben való megoldhatóságát vizsgálni, nem törődve a megoldásoknak a szokott alakban való előállíthatóságával. Végül megkérdezte, hogy gondolt-e a jelölt arra, hogy a megoldásokat az alapulvett gyűrű kvociensgyűrűjében keresse.

Ezután KERTÉSZ ANDOR válaszolt az opponensek bírálatára. Mindenekelőtt köszönetet mondott az opponensek gondos, alapos munkájáért és értékes, tanulságos észrevételeikért. Köszönettel vette RÉDEI LÁSZLÓ professzor azon észrevételét, amely egyetlen egyismeretlenű egyenlet esetére explicit formában adja meg a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elméletének érvényességi feltételét. KERTÉSZ ebből a megjegyzésből azt következteti, hogyha a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elméletét csupán a véges esetben tekintjük, akkor ez az elmélet esetleg a féligegyszerű gyűrűknél általánosabb gyűrűkategória alapulvétele mellett is érvényes, ti. a Neumann-féle reguláris gyűrűkre.

Az opponensek által feltett kérdésekre a jelölt részletesen válaszolt. Megadott egy olyan gyűrűt, amely mutatja, hogy FUCHS LÁSZLÓ első kérdésére a válasz igenlő. A további kérdések számos, igen nehéz elintézetlen problémával állnak kapcsolatban.

A bíráló bizottság az elhangzott vita alapján a következő határozatot hozta:

„Kertész Andor aspiráns „Operátormodulusok és féligegyszerű gyűrűk" című kandidátusi értekezésének nyilvános vitájára kiküldött bíráló bizottság megállapította, hogy KERTÉSZ ANDOR disszertációja komoly tudományos értékű és lényegesen előreviszi a féligegyszerű gyűrűk és operátormodulusok elméletét. Különösen értékesnek tartja a disszertációnak a lineáris egyenletrendszerek általánosított elméletére vonatkozó részét. A disszertáció mind tartalmilag, mind formailag teljesen kifogástalan.

Ennek alapján a bizottság egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy KERTÉSZ ANDORt nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává."

Szép Jenő
a matematikai tudományok kandidátusa

Ketskeméty István kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

KETSKEMÉTY ISTVÁN aspiráns „Vizsgálatok az alumínium-morin lumineszcenciájáról. Adalékok a polarizált lumineszcencia elméletéhez“ című kandidátusi disszertációjának megvédésére 1954. június 24-én került sor.

Az aspiráns — amint az a disszertációból, az opponensi véleményekből kitűnt és a vita során is megállapítást nyert — komoly, alapos munkát végzett. Kísérleti munkái során spektrofotográfiai és fényelektromos módszerrel vizsgált emissziós és abszorpciós spektrumokat, megállapította ezen spektrumok polarizációs fokát. Ezekhez a vizsgálatokhoz pusztán egy spektrográf állt rendelkezésére, a többi mérőberendezést korszerű kivitelben az aspiráns tervezte meg és helyezte üzembe. A kísérleti anyag elég tekintélyes és értékes volta mellett az elméleti rész még jobbnak mondható; az aspiráns a polarizált lumineszcenciának PERRIN, VAVILOV és LJOVSINtól származó elméletét lényegesen továbbfejlesztette, különösen a rotációs depolarizációs és a lumineszcens oldatokban fellépő energiaátadás területén.

A disszertáció opponensei, GYULAI ZOLTÁN r. tag és SZIGETI GYÖRGY lev. tag. kiemelve a disszertáció új, értékes eredményeit, rámutattak egyes kisebb jelentőségű — kizárólag stiláris, ill. fogalmazásbeli — hibákra is. A vita során az aspiráns az opponensi véleményekre és az egyes kérdésekre adott válaszában a téma teljes ismeretéről tett tanúságot és minden kérdésre teljesen kielégítő választ adott.

A bizottság rövid tanácskozás után egyhangúlag javasolta a TMB-nek, hogy KETSKEMÉTY ISTVÁNt nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusának.

Nagy Elemér
a fizikai tudományok kandidátusa

A III. OSZTÁLY HÍREI

JUTALMAK

A Magyar Tudományos Akadémia Elnöksége az 1954. évben eredményes munkásságukért a III. Osztály területén a következő kutatókat részesítette jutalomban:

EGERVÁRY JENŐ akadémikus, jelentős eredményeket ért el a matrix-számítás és a differenciál-egyenletek elmélete terén. Eredményei a matematikai fizika egyes kérdéseivel, különösen a mechanikával kapcsolatosak, gyakorlati szempontból igen fontosak. 6000 Ft jutalomban részesült.

HAJÓS GYÖRGY akadémikus, mint a III. Osztály titkára áldozatkész és lelkiismeretes munkát végez. Nemcsak matematikai kérdésekkel foglalkozik behatóan, hanem különös gondot fordít a fizika és csillagászat kérdéseire is. Rendszeresen látogatja a fizikai és csillagászati intézeteket, a bizottságok és tanácsok munkáját értékes tanácsaival támogatja. 6000 Ft jutalomban részesült.

TURÁN PÁL akadémikusnak az elmúlt év folyamán számos, jelentős eredményeket tartalmazó dolgozata jelent meg. Különösen kiemelkedő eredményekről számol be a „Riemann-féle zéta-függvény gyökeiről" c. dolgozata. 6000 Ft jutalomban részesült.

BUDÓ ÁGOSTON lev. tag KOVÁCS ISTVÁNnal együtt írt „Vizsgálatok az O_2^+ molekula $^4\pi$ állapotán" c. dolgozatban, amely az Acta Physica-ban jelenik meg, jelentősen előbbre viszik az O_2^+ molekula szerkezetére vonatkozó ismereteket. A Fizikus Főbizottságban fáradhatatlan és lelkes munkát végez. 5000 Ft jutalomban részesült.

KOVÁCS ISTVÁN lev. tag BUDÓ ÁGOSTONnal közösen írt munkájáért, valamint a Központi Fizikai Kutató Intézet felépítése és megszervezése terén végzett odaadó és szívós munkájáért 5000 Ft jutalomban részesült.

SZALAY SÁNDOR lev. tag a nagy atomsúlyú kationok adszorpciójának humusz kolloidokon végzett vizsgálatáért, valamint a Debreceni Fizikai Kutató Intézet szervezése és felépítése érdekében kifejtett fáradhatatlan munkájáért 5000 Ft jutalomban részesült.

FEJES-TÓTH LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora a geometria egy szűkebb területén évek óta komoly tudományos munkásságot fejt ki, eredményeit világszerte értékelik. Tudományos eredményeit tartalmazó több dolgozata az Acta Mathematica-ban jelent meg, illetőleg van megjelenés alatt. 5000 Ft jutalomban részesült.

FENYŐ ISTVÁN a matematikai tudományok kandidátusa figyelemre méltó eredményeket ért el az „Über die Lösung der im Banachschen Raume definierten nichtlinearen Gleichungen" címen az Acta Mathematica-ban, valamint az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményeinek II. kötetében megjelent két dolgozatában, amelyek a matematikai fizika szempontjából is igen jelentősek. 3000 Ft jutalomban részesült.

HORVÁTH JÁNOS, a fizikai tudományok kandidátusának ez évben hat dolgozata jelent meg, amelyek számos új eredményt tartalmaznak az elméleti fizika köréből. 3000 Ft jutalomban részesült.

CSADA IMRE tudományos munkatárs a turbulencia elmélete és a csillagok mágnességére vonatkozó vizsgálatai során ért el szép eredményeket. 3000 Ft jutalomban részesült.

JEGES KÁROLY főiskolai tanár jelentős eredményeket ért el a félvezetők és lumineszcenciai kutatások területén. „Vizsgálatok a kassziterit elektronlumineszcenciájával kapcsolatban" című dolgozatában elsőként állapította meg, hogy a kassziterit elektrolumineszcenciát mutat. 3000 Ft jutalomban részesült.

ALEXITS GYÖRGY akadémikus az Elnökség mellett működő Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottság titkára. Aktív közreműködésével, a tudománypolitikai szempontok és a publikálás anyagi feltételeinek összehangolásával, a hibák feltárásával és jó javaslatok kidolgozásával elősegítette tudományos könyv- és folyóiratkiadásunk mindannyiunk által tapasztalt fejlődését. 6000 Ft jutalomban részesült.

A Magyar Tudományos Akadémia ún. „Elnöki alap"-jából jutalmazta 3000 Ft-tal

BALÁZS JÁNOSt, aki mint a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának szaktitkára, igen lelkiismeretes és körültekintő munkát végez.

PRÉMIUMOK

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztálya az 1954-ben végzett eredményes munkájukért a következőket részesítette prémiumban:

ÁDÁM ANDRÁS aspiráns a multiplier koincidencia technika terén ért el kiváló eredményeket. 2000 Ft jutalomban részesült.

NAGY LÁSZLÓ aspiráns „Vizsgálatok a kozmikus sugárzás által ólomban keltett záporokkal kapcsolatban" című dolgozatában ért el értékes eredményeket. 2000 Ft jutalomban részesült.

NAGY KÁZMÉR aspiráns a kozmikus sugárzás területén két sajtó alatt levő publikációjában ért el kimagasló eredményeket. 2000 Ft jutalomban részesült.

SIEGLER JÁNOSNÉ aspiráns A K-800-as gyorsító berendezés fokuszálási problémáinak megoldása terén végzett eredményes munkát. 1500 Ft jutalomban részesült.

KISDI DÁVIDNÉ aspiráns az elektromágneses hullámok területén sajtó alatt levő publikációjában elért értékes eredményekért 1500 Ft jutalomban részesült.

KÁROLYHÁZI FRIGYES aspiráns „Elektromágneses hullámok interferenciája a kvantumelméletben", „Különböző fotonok interferenciája" és „Megjegyzések a merev mozgás relativisztikus elméletéhez" című dolgozataiban ért el értékes eredményeket. 2000 Ft jutalomban részesült.

FÉNYES IMRE, a fizikai tudományok kandidátusa, „Megjegyzések és kiegészítések a mechanika elveinek Farkas Gyula-féle tárgyalásmódjához" című dolgozatában ért el önálló eredményeket. 1500 Ft jutalomban részesült.

SZAMOSI GÉZA és MARX GYÖRGY „Relativisztikus mozgás skaláris térben" és „Nukleonok skaláris mezontérben" című közös dolgozataikban értek el kiváló eredményeket. 2500—2500 Ft jutalomban részesültek.

GYARMATI BORBÁLA kutató „H_2^+ energiájának kiszámítása Gurnee—Magee módszerével" című dolgozatában elért eredményeiért 800 forint jutalomban részesült.

LENTEI ILONA kutató „A Schrödinger-egyenlet komplex megoldásai és a WKB-módszer" című dolgozatában elért eredményeiért 800 Ft jutalomban részesült.

BOZÓKY LÁSZLÓ, a fizikai tudományok kandidátusa, a Központi Izotóp Bizottságban végzett jó munkájáért, valamint az izotóp szabvány összeállításáért 3000 Ft jutalomban részesült.

JAKUCS ISTVÁN ny. tanár fizikai tárgyú tudománytörténeti munkák összegyűjtéséért 4500 Ft jutalomban részesült.

TANDORI KÁROLY, a matematikai tudományok kandidátusa, „Über die Konvergenz singulärer Integrale", „Fourier-sorok erős szummációja" és „Über die Divergenz der Fourierreihe" című dolgozataiban elért eredményeiért 3000 Ft jutalomban részesült.

KERTÉSZ ANDOR, a matematikai tudományok kandidátusa, kandidátusi disszertációjában és azóta elért eredményeiért 3000 Ft jutalomban részesült.

UJHELYI SÁNDOR „Antracén egykristályok előállítása" című dolgozatáért 1500 Ft jutalomban részesült.

BERENCZ FERENC adjunktus „Megjegyzések az abszorpciós görbék analíziséhez" című dolgozatában elért eredményeiért 1000 Ft jutalomban részesült.

PAUNCZ REZSŐ „Egy új kvantum-kémiai közelítő módszer teljesítőképességének vizsgálata" című dolgozatában elért eredményeiért 3000 Ft jutalomban részesült.

CSÁSZÁR SÁNDOR és JESZENSZKY BÉLA „A térerősség hatása az alkalihaloidok vezetőképességére" című dolgozatukban elért eredményeikért 750—750 Ft jutalomban részesültek.

TOMKA PÁL „Színezett s nem színezett alkalihalogenid kristályok elektromos vezetése" című dolgozatában elért eredményeiért 1500 Ft jutalomban részesült.

FODOR GÉZA, a matematikai tudományok kandidátusa, eddig elért kiváló eredményeiért 2000 Ft jutalomban részesült.

MOLNÁR JÓZSEF aspiráns „A csillagtartományokra vonatkozó Krasznoszszelszkij-tételről" című dolgozatában elért eredményeiért 1200 Ft jutalomban részesült.

ERDŐS JENŐ aspiráns eddig elért kiváló eredményeiért 1000 Ft jutalomban részesült.

SZOLCSÁNYI PÁL adjunktus „Raman fényforrások elmélete" című dolgozatát az Akadémia III. Osztálya dicséretben részesítette.

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója. Műszaki felelős: Farkas Sándor.
A kézirat beérkezett: 1955. III. 16. — Példányszám: 500. — Terjedelem: 17 (A/5) ív, 15 ábra.

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 55-1176 Felelős vezető: Vincze György

Ára: 36,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

KÖNYVISMERTETÉS

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

V. KÖTET 3. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1955

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

V. kötet 3. szám

Szerkesztőség: Budapest V. Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest V. Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V. Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V. Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI. Sztálin út 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK AZ 1955. ÉVI NAGYGYŰLÉS ALKALMÁBÓL RENDEZETT ELŐADÁSAI

Együttes ülés

Május 24-én, kedden délután fél 4 órakor

KOVÁCS ISTVÁN lev. tag:
A Központi Fizikai Kutató Intézet szerepe a felszabadulás utáni magyar fizikai kutatás kialakításában.*

Osztályülés

Május 25-én, szerdán délután 4 órakor

HAJÓS GYÖRGY akadémikus: Osztálytitkári beszámoló.
Hozzászóló: DETRE LÁSZLÓ lev. tag.

Május 26-án, csütörtökön délelőtt 10 órakor

EGERVÁRY JENŐ akadémikus:
A függőhidak elméletének megalapozása és felépítése a matrix-elmélet segítségével.

Május 26-án, csütörtökön délután 4 órakor

STANISLAW MAZUR akadémikus:
„A kiszámítható analízis" alapjairól.**
Hozzászóló: KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag.

RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus:
Hazai vizsgálatok a véges csoportok elméletében.

FUCHS LÁSZLÓ, a matematikai tudományok doktora:
Magyar kutatók eredményei a végtelen csoportok elméletében.

Május 27-én, pénteken délelőtt fél 9 órakor

LEOPOLD INFELD akadémikus:
Az 50 éves relativitáselmélet.***

Május 27-én, pénteken délelőtt 11 órakor

SIMONYI KÁROLY, a fizikai tudományok kandidátusa:****
Magfizikai gyorsító berendezések tervezésének és kivitelezésének néhány problémája.

* Megjelent a „Magyar Tudomány 10 éve" című könyvben.
** Stanislaw Mazur előadását egy későbbi számban közöljük.
*** Ez az előadás a Fizikai Szemlében jelenik meg.
**** A Szovjetunióban tartózkodó Simonyi Károly helyett Erő János mutatta be.

BESZÁMOLÓ

AZ OSZTÁLY TUDOMÁNYTERÜLETEIN A FELSZABADULÁS ÓTA ELÉRT EREDMÉNYEKRŐL ÉS A TOVÁBBI FELADATOKRÓL

HAJÓS GYÖRGY osztálytitkár

Előadta az 1955. május 25-én tartott nyilvános osztályülésen

Hazánk felszabadulásának tízéves évfordulója alkalmából ez az osztálytitkári beszámoló elsősorban ennek a tíz évnek tudományos eredményeit akarja felmérni. A beszámoló célja képet adni a hazai matematika és fizika fejlődéséről és az eredmények felmérése, értékelése alapján meghatározni a további feladatokat. A hazai csillagászat fejlődését, eredményeit DETRE LÁSZLÓ külön ismerteti beszámolóm utáni hozzászólásában.

A hazai matematika és fizika fejlődéséről részletes tájékoztatást ad a felszabadulásunk tíz éves évfordulója alkalmából kiadásra került kötetben szereplő „A matematika fejlődése hazánkban a felszabadulás óta" című cikk, amelynek ALEXITS GYÖRGY, HAJÓS GYÖRGY és RÉNYI ALFRÉD a szerzői, valamint „A fizika hazai fejlődése és eredményei a felszabadulás után" című cikk GYULAI ZOLTÁN akadémikus tollából. Beszámolóm, amely főként erre a két cikkre támaszkodik, nyilvánvalóan nem törekedhetik teljességre, hiszen egy előadás keretében az elért eredmények részletes ismertetésére és értékelésére nincsen lehetőség. Nem törekedhettem arra sem, hogy az egyes kutatók munkásságáról teljes képet adjak; egyéni eredményeket csak olyan mértékben ismertetek, amennyiben ez a szóban forgó tudományok hazai fejlődésének megvilágításához szükséges. Nem kivánok foglalkozni a Központi Fizikai Kutató Intézetben folyó munkával, az ott elért eredményekkel és azok értékelésével, hiszen erről az együttes ülés keretében KOVÁCS ISTVÁN számolt be előadásában. Nem szándékozom foglalkozni a hazai matematikai és fizikai kutatások felszabadulás előtti helyzetével sem, hogy minél több idő maradjon a felszabadulás óta elért eredmények ismertetésére és értékelésére. A felszabadulás előtti állapotok fogyatékosságait a korábban említett mindkét cikk éles vonásokkal megrajzolja. A következőkben rátérek az eredmények ismertetésére és értékelésére.

A magyar matematikai kutatásnak a felszabadulás utáni korszakára általában jellemző a következő három jelenség: 1. Rövid idő alatt nagyon megszaporodott a kutatók és a kutatás iránt érdeklődők száma és ezzel együtt erősen megnövekedett a matematikai folyóirat és könyvkiadás is. 2. A régebben is vizsgált területeken végzett kutatások megnövekedésén kívül új, eddig nálunk meglehetősen elhanyagolt területeken is intenzív és sikeres vizsgálatok folynak. 3. Rendszeres tudományos munka segíti elő a matematika elméleti eredményeinek a gyakorlatba való átültetését és e célra megalakult a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete.

A kutatók számának szaporodásáról mondottak alátámasztására megemlítem, hogy fokozottan igyekeztünk biztosítani a kutatás iránt érdeklődők mind szélesebb körét, mondhatni a matematika közönségét. Ezt bizonyítja pl. az a tény, hogy a felszabadulás után alakult Bolyai János Matematikai Társulatnak ma már 1300-nál több tagja van. E nagyszámú érdeklődő közül nőnek ki a holnap kutatói. Jelenleg a matematikának száznál több aktív kutatója van hazánkban.

Ennek a helyzetnek a kialakulását elősegítette az is, hogy néhány év óta két magyar nyelvű folyóiratunk és három nemzetközi folyóiratunk jelenik meg. Idegen nyelven megjelenő folyóirataink ma már nemzetközileg ismertek. Könyvkiadásunkat illetően meg kell említenem, hogy évente az Akadémia kiadásában öt-hat matematikai könyv jelent meg az utóbbi években, míg a felszabadulás előtt a Horthy időszak csaknem 25 éve alatt mindössze egy-kettő. A felszabadulás után magyar szerzőktől megjelent munkák egyrésze idegen nyelven jelent meg, ezek a könyvek nemzetközileg is nagy sikert értek el. Külön ki kell emelnem RIESZ FRIGYES és SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA „Leçons d'Analyse Fonctionelle" című monográfiáját arról a tudományterületről, amelyet jórészt Riesz Frigyes ma már klasszikus eredményei nyitották meg. Világsikerét bizonyítja, hogy a könyv már III. kiadásban jelent meg, ugyanakkor megjelent oroszul a Szovjetunióban és német kiadása is meg fog jelenni a Német Demokratikus Köztársaságban.

Ugyancsak nagy sikert ért el PÉTER RÓZSA: „Rekursive Funktionen" című munkája, amely orosz nyelven is kiadásra került. Hasonlóan nemzetközi sikernek örvend TURÁN PÁL az „Analízis egy új módszeréről és annak egyes alkalmazásairól" című magyar és német nyelven megjelent könyve.

Újabb területeknek a kutatásba való bekapcsolásáról szóltam. Rá kell mutatnom arra, hogy a matematika művelésének jelentős mennyiségi szaporodása a kutatások minőségi megváltozását is maga után vonta. A felszabadulás után a régebben is művelt kutatási irányok továbbfejlesztése és kiterjesztése mellett megszületett a magyar algebrai és valószínűségszámítási iskola. Ez nem kizárólag a matematika belső fejlődési irányának köszönhető, hanem tudatos tudománypolitikánk eredménye is. A matematika gyakorlati hasznosításával kapcsolatban hangsúlyoznom kell, hogy a régebbi jórészt elvont témakörökre vonatkozó kutatások mellett a felszabadulás után tudatosan irányítottuk a matematikusok figyelmét a matematika alkalmazásainak vizsgálatára. Ennek köszönhető, hogy a matematika néhány fontos, de nálunk régebben alig művelt ágában megindultak, illetőleg jelentősen megerősödtek a tudományos vizsgálatok. Ezekről a kérdésekről a későbbiek során részletesen szólok.

Hadd vegyem most sorra a matematika egyes fejezeteit, hogy néhány szót szólhassak az ott elért eredményeinkről.

A század eleji magyar matematikai kutatás legkiemelkedőbb eredményei a sorfejtésekre vonatkoznak. Hiszen elég FEJÉR LIPÓT immár klasszikus eredményeire és az ezekhez világszerte kapcsolódó munkák nagy számára és jelentőségére hivatkoznunk. Ezekre az értékes előzményekre támaszkodva a felszabadulás után is számos kutató foglalkozott sorfejtésekkel, különösen ortogonális-sorokkal. E téren sikerült itthon néhány olyan eredményt elérni, amely a matematikának ezt az ágát jelentősen előrevitte. A felszabadulás után SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA bebizonyította, hogy KOLMOGOROV, SZELIVERSZTOV és PLESSNER szovjet matematikusoknak a Fourier-sorok speciális esetére vonatkozó tétele még igen általános ortogonális sorfejtésekre is érvényes marad, vagyis az általános ortogonális polinom-sorok konvergencia viszonyai hasonlók a klasszikus Fourier-soréhoz. ALEXITS GYÖRGY kimutatta, hogy ami a Fourier-sorra vonatkozó KOLMOGOROV, SZELIVERSZTOV és PLESSNER-féle feltételt illeti az a sorbafejtett függvény egy szerkezeti tulajdonságával ekvivalens.

Az ortogonális polinomsorok konvergencia-viszonyainak tanulmányozásával együtt szükségszerűen felmerül a sor szummálhatóságának a kérdése is, vagyis az a probléma, hogy a sorfejtés részletösszegeinek számtani közepei milyen feltételek esetén tartanak a sorbafejtett függvényhez? Általános ortogonális polinomsorokra vonatkozó ilyen tétel régebben egyáltalán nem volt ismeretes. Annál érdekesebb TANDORI KÁROLYnak, majd ehhez kapcsolódva FREUD GÉZÁnak az az eredménye, amely szerint FEJÉR LIPÓTnak a Fourier-sorra vonatkozó klasszikus tétele, valamint ennek LEBESGUE-tól származó bővítése a súlyfüggvényre vonatkozó igen általános feltételek mellett érvényes marad ortogonális polinom-sorokra is.

Nem kívánom a felszabadulás után elért sorfejtésekre vonatkozó valamennyi eredményt felsorolni. Megemlíthetem a sorfejtésekre vonatkozó vizsgálatoknak azt a törekvését, amely a régebben csupán speciális esetekben ismert eredmények lényegét feltárva a tételek érvényességi körét minél általánosabb esetre igyekszik kiterjeszteni. Ez a tendencia mutatkozik meg ALEXITS, TANDORI, FREUD, RÉNYI, SZŐKEFALVI-NAGY és TURÁN egyéb ortogonális sorokra vagy a klasszikus Fourier-sorra vonatkozó különböző vizsgálataiban is. Ezek figyelemre méltó eredményt tartalmaznak.

Az ortogonális polinomokkal szoros kapcsolatban áll a nálunk ugyancsak nagy multra visszatekintő interpoláció-elmélet is, amely ugyancsak FEJÉR LIPÓT nagy jelentőségű munkásságának hatása folytán került a magyar matematikusok érdeklődésének középpontjába. FEJÉR LIPÓT maga is folytatta ez irányú kutatásait a felszabadulás után is és újabb értékes eredményeket ért el. Az interpoláció elmélettel a felszabadulás után igen intenziven foglalkoztak a magyar matematikusok. A különböző eredmények közül kettőt eme-lünk ki. FREUD GÉZA kimutatta — ERDŐS PÁL és TURÁN PÁL bizonyos régebbi eredményeire támaszkodva —, hogy a Lagrange-féle interpolációs eljárás az alappontok lényegesen általánosabb megválasztása esetén is ugyanannyira használható marad, mint az eddig ismert speciális esetekben. A másik fontos eredmény ERDŐS PÁLtól és TURÁN PÁLtól származik, akik egyrészt megmutatták, hogy az interpoláció-elméletben klasszikussá vált módszer segítségével nem lehet elérni olyan eredményt, amilyent idáig általában reméltünk, másrészt kidolgoztak olyan finomított elméletet is, amely megvilágítja a Lagrange-féle interpolációs eljárás konvergenciájának bizonyos feltételeit.

Az ortogonális függvények elméletével kapcsolatos a függvényrendszerek teljességének vizsgálata. E téren RÉNYI ALFRÉD, PUKÁNSZKY LAJOS és CZIPSZER JÁNOS értek el néhány érdekes eredményt. A reális függvények elméletében CSÁSZÁR ÁKOSnak jelent meg több munkája, amelyek közül kiemelem doktori értekezését. Ebben a függvények növekedési pontjai és szélsőérték helyei fogalmának általánosításával és e pontok eloszlásával foglalkozik.

A felszabadulás után többen vizsgáltak különböző függvényegyenleteket különösen KOLMOGOROV és NAGUMO nyomán a középképzést, valamint a disztributivitás általános fogalmát definiáló függvényegyenleteket. A függvényegyenletek elméletében ACZÉL JÁNOS, FENYŐ ISTVÁN és HOSSZÚ MIKLÓS neveit kell megemlítenünk.

A funkcionálanalízisnek, ennek a modern fizikában is nagy szerepet játszó elméletnek igen jelentős hazai előzményei vannak. E téren RIESZ FRIGYES munkássága alapvető jelentőségű.

A felszabadulás után e téren elsősorban SZŐKEFALVI-NAGY BÉLÁT kell megemlítenünk, aki a perturbáció-elméletben és a Hilbert-tér transzformációját illetően ért el figyelemre méltó eredményeket.

Az analítikus függvények elmélete hazánkban elsősorban TURÁN PÁL munkássága révén fejlődött tovább. Eredményeit az „Analízis egy új módszere és annak egyes alkalmazásairól" című magyarul és németül megjelent könyve tartalmazza. Ebben olyan aritmetikus alapon nyugvó módszert dolgozott ki, amelyben különböző egymástól látszólag távol eső problémákat egységes szempontból képes tárgyalni.

A geometria területén a magyar matematika értékes múlttal rendelkezik. 1952-ben ünnepeltük a magyar tudomány büszkeségének, BOLYAI JÁNOS születésének 150. évfordulóját. Erre az alkalomra jelent meg ALEXITS GYÖRGY-től Bolyai János életének és élete művének ismertetése. Ez a munka a tények ismertetése mellett hű képet ad a nagy magyar lángész munkásságának társadalmi hátteréről, megtisztítja a forradalmian gondolkozó BOLYAI JÁNOS alakját olyan foltoktól, amelyeket korának közönye, sőt sokszor rosszakarata, valamint életrajz íróinál az objektivitás hiánya tapasztott rá. Az évfordulóra jelent meg az Appendix magyarázatokkal és kiegészítésekkel ellátott új kiadása KÁRTESZI FERENC szerkesztésében.

A geometriai axiomatika és az euklideszi-geometria területén ki kell emelni SZÁSZ PÁL munkásságát, aki számos dolgozattal járult hozzá a nemeuklideszi geometria egyszerűsítéséhez és megalapozásához. Meg kell említenünk VARGA OTTÓ azon szép eredményét, hogy a konstans görbületű Riemann-féle tereket mintegy jellemzi a paraszféra, vagyis euklideszi metrikájú bármely vonalelem párhoz hozzáilleszthető felületnek létezése.

A klasszikus elemi geometria, az analítikus geometria, a projektív geometria, valamint az ábrázoló geometria területén végzett munkáik miatt szinte minden matematikusunk nevét meg kellene említenünk. A klasszikus geometriának nincsen olyan ága, amelyet a beszámoló időszakában a magyar matematikusok ne gazdagították volna újabb eredményekkel, érdekes kérdésfelvetésekkel és gondolatokkal. A projektív és ábrázoló geometriában KÁRTESZI FERENC, a geometriai szerkesztések elméletében OBLÁTH RICHÁRD és a két éve elhúnyt SZŐKEFALVI-NAGY GYULA, a több-dimenziós geometriában EGERVÁRY JENŐ, HAJÓS GYÖRGY és SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA nevét kell elsősorban említenünk. Különösen sok új eredménnyel gazdagodott a klasszikus geometriához szorosan kapcsolódó geometriai szélsőértékek, a konvex idomok, a geometriai elhelyezések fejezete. E területen FEJES-TÓTH LÁSZLÓnak vannak jelentős eredményei. Munkásságának szép egybefoglalását adja a két éve német kiadásban megjelent: „Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum" című monográfiájában..

A gráfelméletben ki kell emelnünk GALLAI TIBOR dolgozatát, amely szintézist alkot a gráfok faktorizációja terén elért eredményekből és ezeket az eredményeket továbbfejleszti. HAJÓS GYÖRGY eredménye a négyszintétel problematikája terén jelent előrehaladást.

Örömmel állapíthatjuk meg, hogy a magyar matematikusok által kevéssé művelt topológia terén is megindult a munka. Itt meg kell említenünk BOGNÁR MÁTYÁS eredményeit a topologikus csoportok beágyazása terén.

A differenciálgeometria terén a felszabadulás óta differenciálgeometriai iskoláról beszélhetünk. VARGA OTTÓnak az érdeme, hogy ezt a munkát elindította, megkedveltette és eredményekhez vezette. A Riemann-, Finsler- és a Cartan-féle terek vizsgálatában VARGA OTTÓ mellett RAPCSÁK ANDRÁS, MOÓR ARTUR és SÓS GYULA dolgozott eredményesen. Vizsgálataik kiterjednek a terek speciális fajtáira, jellemzésükre, differenciálinvariánsaik felkutatására, mozgáscsoportjuk, affin csoportjuk vizsgálatára, stb. A klasszikus differenciálgeometria terén elért eredmények alapján megemlíthetjük EGERVÁRY JENŐ, FEJES-TÓTH LÁSZLÓ, HAJÓS GYÖRGY és VINCZE ISTVÁN neveit.

A felszabadulás előtti időkben alig folyt absztrakt algebrai kutatás hazánkban. Közvetlenül a felszabadulás előtt egyedül BAUER MIHÁLY számított a szó szűkebb értelmében algebristának. Annál örvendetesebb tény, hogy a felszabadulás után nagy lendülettel indult meg nálunk is az absztrakt algebrai kutatás. Ennek a munkának a megindítása RÉDEI LÁSZLÓnak, a magyar algebrai iskola fejének vitathatatlan érdeme. Az ő vezetésével és kezdeményezésével alakult meg a szegedi algebristák kutató közössége. Méltó tanítványa volt a nemrég elhúnyt SZELE TIBOR, aki Debrecenre terjesztette ki ezt a munkát. Budapesten FUCHS LÁSZLÓ irányításával most van kifejlődőben egy algebrai kutató centrum. Egészében azonban egyetlen magyar algebrai iskoláról kell beszélnünk.

A klasszikus algebrában a két évvel ezelőtt bekövetkezett haláláig SZŐKEFALVI-NAGY GYULA folytatott eredményes munkásságot. A matematika ezen ágában TURÁN PÁL, SURÁNYI JÁNOS és EGERVÁRY JENŐ értek el szép eredményeket.

Absztrakt algebristáink munkásságáról beszélve első helyen kell említenünk RÉDEI LÁSZLÓ hatalmas anyagot felölelő monográfiáját. E munka megjelent első kötete világviszonylatban is komoly nyeresége az algebrai irodalomnak.

Az algebrai struktúrák közül kutatóink legtöbbet a csoportokkal foglalkoztak. A Minkowski-féle sejtésnek HAJÓS GYÖRGY által adott bizonyítását RÉDEI LÁSZLÓ és SZELE TIBOR tovább egyszerűsítette. Rédei új bizonyítást is adott HAJÓS idevágó csoportelméleti tételére. HAJÓS GYÖRGY a Keller-féle sejtést is átfogalmazta a csoportelmélet nyelvére. Ez a problémakör vetette fel a véges Ábel-féle csoportok faktorizációjának problémáját, amelynek megoldása terén RÉDEI LÁSZLÓ és HAJÓS GYÖRGY értek el eredményeket. SZÉP JENŐ a véges nem-kommutatív csoportok vizsgálatában számolhat be eredményekről. RÉDEI LÁSZLÓnak több dolgozata jelent meg az inverz feladat, a bővítés-probléma területéről. Ezen vizsgálatoknál nagy szerepet játszik az általa bevezetett ferde-szorzat. A bővítés probléma tárgykörében értékes eredményeket ért el STEINFELD OTTÓ, SZÉLPÁL ISTVÁN, SZENDREI JÁNOS és FUCHS LÁSZLÓ. A végtelen Abel-csoportok vizsgálatában a nemrég elhunyt SZELE TIBOR irányító munkásságát, tanítványaival együtt végzett munkáját és jelentős eredményét kell kiemelnünk. Ebbe a munkába kapcsolódott be igen szép eredménnyel KERTÉSZ ANDOR, valamint FUCHS LÁSZLÓ és mások.

A gyűrű-elmélet területén RÉDEI LÁSZLÓ és SZELE TIBOR jelentős eredményei mellett ki kell emelnünk FUCHS LÁSZLÓ munkásságát az ideál-elmélet terén. Ugyancsak ki kell emelnünk RÉDEI LÁSZLÓnak és SZELE TIBORnak azokat a munkáit, amelyek a csoportok és gyűrűk elméletének analógiáit tárják fel.

A hálóelméletben végzett munkásságot illetően FUCHS LÁSZLÓ mellett SZÁSZ GÁBOR nevét kell megemlítenünk.

Az itt csak vázlatosan felsorolt eredmények is bizonyítják, hogy a felszabadulás óta kialakult magyar algebrai iskola komoly munkával és szép eredménnyel járult hozzá a tudomány fejlesztéséhez.

Az analitikus számelméletben TURÁN PÁL eredményei igen jelentősek és a Riemann-sejtés irányában tett erőfeszítések közül a legmesszebbmenők közé tartoznak. A számelméleti kérdéseknek a matematika más ágaival való kapcsolatát illetően figyelemre méltóak TURÁN PÁLnak ERDŐS PÁLlal, valamint EGERVÁRY JENŐvel együtt elért eredményei. Az analitikus számelmélet egy másik központi megoldatlan problémájával a Goldbach-féle sejtéssel RÉNYI ALFRÉD foglalkozott. Elért eredménye nagy előrehaladást jelent a Goldbach sejtés irányában.

Az algebrai számelmélet terén RÉDEI LÁSZLÓ jelentős eredményeket ért el a relatív algebrai számtestek osztálycsoportjának struktúravizsgálatában. A számelmélet terén még további eredményeket is felsorolhatnánk, különösen OBLÁTH RICHÁRD klasszikus számelméleti eredményeit.

A matematikai logikának hazánkban kiváló művelői vannak. A rekurzív függvények elmélete PÉTER RÓZSÁnak sok szép eredményt köszönhet, könyvéről már említést tettünk. A matematikai logika legkiválóbb hazai művelője KALMÁR LÁSZLÓ, akinek eredményes munkássága felöleli a matematikai logika szinte összes alapvető problémáit. Sikeres vizsgálatokat folytatott még e téren kölönösen SURÁNYI JÁNOS, valamint BERECZKI ILONA is.

A magyar matematikusok a felszabadulás előtt JORDAN KÁROLYT és egy-két matematikust kivéve nem igen érdeklődtek a valószínűségszámítás iránt. A felszabadulás e téren is gyökeres fordulatot hozott. Népgazdaságunk és tudományos életünk fejlődésével egyre fokozódó mértékben nyilvánult meg a szükséglet a természettudományok és a technika számos ága részéről a valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazása iránt. A szovjet matematikusok eredményeire támaszkodva és az ő személyes segítségükkel sikerült felszámolni elmaradottságunkat a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika terén. Ma már határozottan beszélhetünk arról, hogy valószínűségszámítási iskolánk van. Ez RÉNYI ALFRÉD kezdeményezésének és vezetésének köszönhető.

A valószínűségszámításnak ma leginkább fejlődő és az alkalmazás szempontjából is legjelentősebb fejezete a sztochasztikus folyamatok elmélete. A sztochasztikus folyamatokra vonatkozó hazai vizsgálatok részben bizonyos Markov-folyamatokra, így pl. a Poisson- és összetett Poisson-folyamatokra, továbbá Markov-folyamatok által származtatott másodlagos, nem Markov-típusú folyamatokra vonatkoztak. A szóban forgó vizsgálatokban nagyszámú matematikus és fizikus vett részt. A Poisson- és összetett Poisson-folyamatokra vonatkozó kutatásokban ACZÉL JÁNOS, JÁNOSSY LAJOS, PRÉKOPA ANDRÁS és RÉNYI ALFRÉD vettek részt. PRÉKOPA ANDRÁS szép eredményeket ért el általánosított sztochasztikus folyamatok és független valószínűségi változókból álló sorok konvergenciájára vonatkozólag. Ki kell itt emelnünk TAKÁCS LAJOS munkásságát, aki részecskeszámlálással kapcsolatos sztochasztikus folyamatok, és az ún. „várakozási idő“ probléma terén ért el figyelemre méltó eredményeket. Igen szép eredményeket ért el valószínűségeloszlások keverékének felbontásával kapcsolatban MEDGYESSY PÁL.

A valószínűségszámítás megalapozásának kérdése körül a matematikában szokatlan élénkségű vita folyik. Ez nem meglepő, ha figyelembe vesszük, hogy e kérdés szorosan összefügg néhány alapvető jelentőségű filozófiai problémával: A véletlen és szükségszerűség kérdésével, a kauzalitás, a természet törvényei objektivitásának kérdésével.

A valószínűségszámítás egy új axiomatikus elméletét dolgozta ki RÉNYI ALFRÉD. Ebben az elméletben a feltételes valószínűség az alapvető fogalom. Az ezzel kapcsolatban felmerült mértékelméleti problémákat CSÁSZÁR ÁKOS oldotta meg sikerrel.

A matematikai statisztika terén a hazai kutatómunka középpontjában a rendezett minták elmélete áll. RÉNYI ALFRÉD új módszert dolgozott ki a rendezett minták elméletében és HAJÓS GYÖRGGYel együtt a rendezett minták elmélete alapvető tényeinek az ismertnél egyszerűbb tárgyalását dolgozta ki. VINCZE ISTVÁN munkatársaival a matematikai statisztikának a tömeggyártás minőségellenőrzésére való alkalmazásával foglalkozott eredményesen.

A felszabadulás óta a matematika terén hazánkban végbement fejlődés egyik legfőbb jellegzetessége, hogy a magyar matematikusok egyre nagyobb érdeklődéssel fordulnak a matematikának a termelésben, valamint más tudományokban való alkalmazásai felé. A magyar matematikusok a felszabadulás utáni években eredményesen megindították a matematika alkalmazására vonatkozó nálunk régebben elhanyagolt kutatást és a szocializmus építése által megkívánt színvonalra emelték. A matematika alkalmazásaira vonatkozó kutatások központja a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete. Az intézet munkájának tapasztalatai is azt mutatják, hogy a gyakorlati problémák jelentős része nem intézhető el meglevő matematikai módszerek sablonos felhasználásával, hanem az ismert módszerek módosítását, sőt sok esetben lényeges továbbfejlesztését, vagy teljesen új módszerek kidolgozását kívánják, tehát kutató munkára van szükség.

Az intézet munkájáról képet ad az intézet közleményeinek eddig megjelent két kötete, amely összesen 63 dolgozatot tartalmaz és előkészületben van a 3. kötet is. Az intézet eredményes munkájáról csak néhány kiragadott példát említünk. EGERVÁRY JENŐ a matrix-számítás elméletében ért el kiemelkedő eredményeket, amelyeket ő és munkatársai eredményesen alkalmaztak különböző mechanikai és elektrotechnikai problémák megoldására. Legújabban EGERVÁRY JENŐ matrix-elméleti kutatásait szép sikerrel felhasználja a lánchidak tervezésével kapcsolatban fellépő szilárdságtani kérdések megoldására is. Az intézet valószínűségszámítási osztályának kutatói a sztochasztikus folyamatok elméletére vonatkozó vizsgálataikat eredményesen alkalmazták gyakorlati problémákra: kémiai reakciók lefolyásának számítására, üzemek energiaszükségletének meghatározására, gépalkatrészek élettartamával kapcsolatos problémáknál, textilgépek leggazdaságosabb fordulatszámának meghatározására, orvosi és biológiai kísérletek kiértékelése, a kőtörés energiaszükségletének meghatározására stb. PÁL SÁNDOR és FREUD GÉZA több elektrotechnikai problémát oldott meg sikerrel. A matematikai fizikában fontos szerepet játszó differenciál- és integrálegyenletekre, valamint a függvénytranszformációkra vonatkozólag FENYŐ ISTVÁN ért el értékes eredményeket.

Az intézet numerikus és grafikus osztálya nomogrammok preciziós kivitelére számos új eljárást dolgozott ki. Az intézet matematikai statisztikai osztálya a minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszereit fejlesztette tovább és több üzemben segítette elő azok bevezetését, ami által selejtcsökkentés volt elérhető.

Az intézet eddig végzett eredményes munkája révén sokkal szorosabbá vált a kapcsolat egyrészt a matematikusok, másrészt a műszaki és természettudományok művelői és a termelésben dolgozó szakemberek között.

Néhány szót matematikai életünkről. Matematikai életünk fejlesztésében központi szerepet visz a Bolyai János Matematikai Társulat, amely a matematika művelőit, oktatóit és kedvelőit egyesíti. Általában a Társulat előadóülésein hangzanak el legelőször a hazai matematika eredményei, amelyeket a résztvevők élénken megvitatnak. A társulat klubestjei a matematikusok baráti együttműködésének és kötetlen eszmecseréinek igen termékeny alkalmai. Fontos szerepet töltenek be a Matematikai Lapok cikkei és feladatrovata, továbbá az évente megrendezett matematikai versenyek. A Társulat az Akadémia támogatásával 1953-ban 3, 1954-ben 4 kollokviumot rendezett, amelyeken a valószínűségszámítás, a geometria, a konstruktív függvénytan, az algebra, a valós függvénytan, a matematikai statisztika, továbbá a differenciál- és integrál, valamint függvényegyenletek körébe vágó újabb eredményeket ismertették és vitatták meg az illető tudományágak kutatói.

Megállapíthatjuk, hogy a magyar matematikusok a felszabadulás óta jelentős mértékben tovább fejlesztették tudományukat és sok elismerést szereztek hazánknak az egész világon. Népgazdaságunk kormánya a matematikusoknak a szocializmus építése érdekében végzett munkáját igen nagyra értékelte, aminek bizonyítéka az, hogy 1948. óta 14 matematikus kapott Kossuthdijat, közülük hatan két ízben is és számos matematikus részesült kormánykitüntetésben.

A továbbiakban a fizika eredményeiről kivánok szólni. Mint bevezetőmben is említettem, fizikusaink felszabadulás óta elért eredményeinek ismertetése még olyan mértékben sem lesz teljes, mint a matematikusoké, hiszen KOVÁCS ISTVÁNnak az ez évi Nagygyűlésen elhangzott előadása után nem szükséges a Központi Fizikai Kutató Intézetben dolgozó fizikusok eredményeinek ismételt ismertetése. A hazai fizika eredményeinek ismertetése előtt rá kell mutatnom arra, hogy a magyar fizikában a felszabadulás előtti időkkel összevetve korszakalkotó változást jelent az elméleti fizika nagyobb mérvű fejlesztése mellett különösen a kísérleti fizika terén megindult nagyarányú kutató munka.

Előbb az elméleti fizikában elért eredményekre kívánok rámutatni. A felszabadulás ezen a téren is nagy változást hozott. Míg a felszabadulás előtt elméleti fizikusaink csak egyénileg dolgozhattak, a felszabadulás utáni tudománypolitika módot nyújtott arra, hogy fiatal kutatókat kapcsoljanak be munkájukba és így iskolát alapítsanak.

A relativitáselmélet kiváló hazai művelője NOVOBÁTZKY KÁROLY körül a felszabadulás után egy iskola alakult ki. NOVOBÁTZKY KÁROLY mutatott rá azon tényre, hogy a relativisztikus négyes erő negyedik komponensének a meghatározására használatos eljárás nem mindig vezet jó eredményre. Az eljárás elektromágneses eredetű erőknél érvényes, de relativisztikus erőknél nem. NOVOBÁTZKY KÁROLY sikerrel foglalkozott a nyugvó és mozgó dielektrikumokra ható erő problémájával, MARX GYÖRGY és GYÖRGY GÉZA szép dolgozatukban a tér által a dielektrikumban kialakuló dipólusra kifejtett erő kifejezését megegyezőnek találták ABRAHAM kifejezéseivel. NOVOBÁTZKY KÁROLY izotrop dielektrikumokra nyert eredményeit MARX GYÖRGY sikerrel általánosította anizotrop anyagokra. MARX GYÖRGY foglalkozott az elektromágneses tér által a permanens mágnesekre kifejtett erő meghatározásával és kimutatta, hogy a Lagrange-függvényből származtatott energiaimpulzustenzor divergenciája megadja a nyugvó és mozgó mágnesekre ható erők törvényét. Ugyanezt a kérdést általánosabb keretben vizsgálta HORVÁTH JÁNOS is. MARX GYÖRGY a súlyos és tehetetlen tömeg arányossága kérdésével is szép sikerekkel foglalkozott. Novobátzky Károly egységes térelméletet dolgozott ki, amely a négydimenziós téridő-geometriában írja le a jelenségeket. HORVÁTH JÁNOS ugyanezen elméleti kérdésekkel foglalkozott a Finsler-geometria alapján. A relativitás elmélettel kapcsolatban a múlt évben elhunyt SELÉNYI PÁL két dolgozata a súlyos és tehetetlen tömeg összehasonlításának egyszerű kísérleti elvét adja meg.

JÁNOSSY LAJOS akadémikus székfoglaló előadásában a relativitáselmélet alapelveinek kutatásával foglalkozik. Felfogása a Lorentz-féle kontrakciós hipotézisnek a fejlesztése. A relativisztikus kinematika területén MÁTRAI TIBOR ért el szép eredményeket. FÉNYES IMRE kimutatta, hogy FARKAS GYULÁnak a mechanika differenciális elveire vonatkozó klasszikus vizsgálatai teljesen egyenértékűek a konvencionális tárgyalásmóddal, de más értelmezésben. A magfizika szempontjából is érdekes eredményekről adhatnak számot SZAMOSI GÉZA és MARX GYÖRGY, akik a relativisztikus dinamikát fejlesztik tovább. A mágneses polusok létezésével kapcsolatban NEUGEBAUER TIBOR végzett vizsgálatokat.

A legkiemelkedőbbek talán azok az eredmények, ahol a magyar kutatók a szigetelő anyagokban haladó elektromágneses sugárzás energia és impulzus viszonyát tárgyalják térelméleti módszerekkel. NOVOBÁTZKY KÁROLY vezetésével rendszeresen feldolgozták ennek a fél évszázada vitatott jelenségkörnek a problémáit és elsőnek mutatták meg, miként lehetséges e terület minden jelenségének egységes felfogás alapján való értelmezése.

A modern fizikának kétségkívül egyik legfontosabb területe a kvantumelmélet. A magyar fizikusok jelentős munkásságot fejtettek ki e területen, főként a kvantumelmélet elvi problémáival, az elvi problémák értelmezésével kapcsolatos kérdésekben. E téren elsősorban NOVOBÁTZKY KÁROLY ért el kiemelkedő eredményeket. Hasonló kérdésekkel foglalkozott más szempontból JÁNOSSY LAJOS valamint FÉNYES IMRE. JÁNOSSY LAJOS különös gonddal vizsgálta meg a felmerülő filozófiai problémákat is. JÁNOSSY LAJOS és FÉNYES IMRE ilyen tárgyú cikkei megjelentek a Szovjetunióban kiadott gyűjtemény filozófiai kötetében. Itt is megnyilvánult az a kapcsolat, amely örvendetesen megerősödött a szovjet kutatók és a magyar fizikusok között. Az erőterek kvantumelméletével, az elemi részecskék spinjével kapcsolatos kérdésekkel MARX GYÖRGY, SZAMOSI GÉZA és ROMÁN PÁL foglalkozott.

Szép eredményekről számolhatunk be a kvantumelektrodinamika területén is. Itt főként MARX GYÖRGY, FARAGÓ PÉTER, ROMÁN PÁL, KÁROLYHÁZI FRIGYES működtek sikerrel.

Az elméleti atommagfizika számos kérdését tették vizsgálat tárgyává fizikusaink. GOMBÁS PÁL akadémikus az atommagok statisztikus elméletét dolgozta ki több dolgozatában, amelyekben az atommag kötési energiáját és a nukleonok sűrűségeloszlását határozza meg. Eredményeinek jelentős nemzetközi visszhangja volt. SZAMOSI GÉZA és munkatársai több dolgozatban az atommag héjszerkezetével kapcsolatos modern problémákat és egyéb kérdéseket vizsgálták. Az atommag gerjesztett állapotainak kérdéseiben MARX GYÖRGY a magerők kutatásában SZAMOSI GÉZA ért el eredményeket. A magerők távolság függésének kérdésével NEUGEBAUER TIBOR foglalkozott sikerrel.

Az atom statisztikus elmélete, a hullámmechanikai közelítő módszerek és alkalmazásaik területén világszerte ismert iskola alakult ki GOMBÁS PÁL vezetésével. E tárgykörben GOMBÁS PÁL „Die statististische Theorie des Atoms und ihre Anvendungen“ és „Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik“ című német nyelven megjelent és a Szovjetunióban két kiadásban is megírt monográfiáit világszerte nagy elismeréssel fogadták. Nagy szerepük van abban, hogy a statisztikus atomfizikai kutatások világszerte újra nagy lendületet vettek. GOMBÁS PÁL már régebben megmutatta, hogy a Pauli-elv az atom statisztikus elméletében egy taszító potenciál alkalmazásával vehető figyelembe és a potenciál analitikus kifejezését is megadja. Újabban sikerült GOMBÁSnak a taszító potenciált oly módon korrigálnia, hogy ezáltal a d állapotú valenciaelektronokra vonatkozó numerikus értékek jelentősen javultak. Az atom statisztikus elmélete terén szép eredményeket ért el FÉNYES IMRE is. GOMBÁS PÁLnak a „kinetikus sajátenergia“ bevezetésével sikerült megoldani azt a nehézséget, hogy az atom statisztikus elméletében a kinetikus energiának úgynevezett inhomogenitási korrekciója túl nagynak bizonyul. Az atom hullámmechanikai és statisztikus elméleteinek kapcsolatait illetőleg GOMBÁS PÁL és GÁSPÁR REZSŐ értek el szép eredményeket. GÁSPÁR

REZSŐnek sikerült megmutatni, hogy statisztikus megfontolások alapján a Hartree—Fock-potenciált jól megközelítő potenciált lehet levezetni és ez bármely elemre azonnal megadható. A statisztikus atommodellnek több értékes alkalmazása származik magyar kutatóktól. GOMBÁS PÁL és GÁSPÁR REZSŐ a Slater-féle félempirikus paraméterek megalapozása során egy új variációs módszert dolgoztak ki atomok energiájának és sajátfüggvényének meghatározására, mely nagyobb rendszámú elemekre is alkalmazható. Ezzel egy több évtizede aktuális problémát sikerült megoldaniok eredményesen. KÓNYA ALBERT a Compton-sáv profilját határozta meg a statisztikus sűrűségeloszlásból nyert impulzuseloszlás felhasználásával. FÉNYES IMRE a W. K. B. módszer divergencia problémáját vizsgálta. Számos további szép eredményt lehetne itt még felsorolni és sok más kutató neve lenne itt megemlíthető.

A molekulák elméletének is jelentős hazai művelői vannak. BUDÓ ÁGOSTON poláris molekulák dielektromos relaxációját vizsgálja és az elméletet kibővíti ellipszoid alakra abban az esetben, amikor a molekulában poláris csoportok foroghatnak szabadon. A molekulák elméletének körébe vágnak KOVÁCS ISTVÁN és BUDÓ ÁGOSTON azon dolgozatai, amelyekben spektroszkópiai felvételek alapján a sávos színképekben fellépő perturbációk elméletét és a perturbációkat okozó molekulatermek állandóinak meghatározására szolgáló eljárásokat fejlesztették tovább. A molekulák elméletében BUDÓ ÁGOSTON, KOVÁCS ISTVÁN és munkatársaiknak számos további szép eredményét említhetnénk még meg. NEUGEBAUER TIBOR sikerrel foglalkozott a hidrogén molekula polarizációs ellipszoidjának kiszámításával és van der Waals kölcsönhatás segítségével biológiai folyamatokat értelmezett.

A molekulák optikai és mágneses tulajdonságaival BERENCZ FERENC és PAUNCZ REZSŐ foglalkoztak és értek el eredményeket. Elméleti fizikusaink sokat foglalkoztak a halogénhidridek vizsgálatával. GÁSRÁR REZSŐ és KÓNYA ALBERT statisztikus atomfizikai módszerrel tárgyalták a HJ molekula kötését, míg hullámmechanikai módszerekkel a HCl és HF molekulák kötését HORVÁTH JÁNOS és NÁRAI ZSOLT vizsgálták. BERENCZ FERENC és PAUNCZ REZSŐ a H_2 molekula elméletét fejlesztették tovább.

A termodinamika terén FÉNYES IMRE közölt több dolgozatot. FÉNYES IMRE a termodinamikának axiomatikus megalapozásával is foglalkozott.

A szilárd testek elmélete terén elsősorban a fémelméleti vizsgálatokat kell kiemelnünk. Igen jelentős GOMBÁS PÁLnak az atom statisztikus elmélete alapján kidolgozott fémelmélete. Ebből a fémelméletből kiindulva annak továbbfejlesztésén dolgoznak MÁTYÁS, TRLIFAJ és ANTONCIK csehszlovák kutatók s köztük és a magyar kutatók között gyümölcsöző együttműködés van kialakulóban. GÁSPÁR REZSŐ GOMBÁS elméletét továbbfejlesztve az aluminiumfém elméletét dolgozta ki. KÓNYA ALBERT és HOFFMANN TIBOR több dolgozatban a molekulaelméletben jólismert LCAO módszert alkalmazták sikerrel a szilárd testek kötésének és felületi tulajdonságainak vizsgálatára.

A kísérleti fizika terén végzett munkákra térek rá.

Egy éve vált önálló intézménnyé a Debreceni Fizikai Kutató Intézet. Az intézet igazgatója SZALAY SÁNDOR és munkatársai könnyű atommagok gerjesztett állapotait határozták meg a gammasugárzás vizsgálatával. A kőzetradiológiai vizsgálatokban SZALAY SÁNDOR ért el szép eredményt. SZALAY SÁNDORnak és munkatársainak sikerült felfedeznie a szerves anyagokban az urán geokémiai feldúsulásának okát. Ezen felismerés alapján remélni lehet, hogy az uránkivonás olcsó módját is ki lehet majd dolgozni és ezáltal ezen kis koncentrációjú előfordulás alapján is elősegíthetjük hazánk energia ellátását.

Nagy erővel megindultak a radioizotópokkal való kutatások, főként amióta a Szovjetunió a kutatásokhoz szükséges radioizotópokat rendelkezésünkre bocsátotta.

A szilárd testek fizikájában jelentősek a kristálynövesztéssel kapcsolatos eredmények. GYULAI ZOLTÁN és munkatársai nagy sikerrel foglalkoztak egyrészt szilárd félvezetők elektromos vezetési kérdéseivel, másrészt kristálynövekedési és rekrisztallizációs vizsgálatokkal. GYULAI ZOLTÁN, TARJÁN IMRE és ZIMONYI GYULA eljárást dolgoztak ki kvarckristályok előállítására, TARJÁN IMRE és munkatársai alkálihaloid kristály színét létrehozó színcentrumokkal foglalkoznak eredményesen. Eljárásokat dolgoztak ki különböző, az atomfizikai kutatásoknál fontos, egykristályok készítésére.

A múlt évben elhunyt SELÉNYI PÁL működésének nagy része a félvezetők területére vonatkozott. Kidolgozta a szelén-egyenirányítók magyarországi gyártásának technikáját, továbbá elméletet adott a szelén egyenirányítók működésére és a szelén egyenirányítókat veszélyeztető káros hatásokra vonatkozóan.

Szilárd testek lumineszcencia-jelenségeinek vizsgálatával SZIGETI GYÖRGY, NAGY ELEMÉR és BODÓ ZALÁN értek el kiemelkedő eredményeket. SZIGETI GYÖRGYöt az utóbbi időkben az elektrolumineszcencia jelensége foglalkoztatta s ezen a területen ért el értékes eredményeket. NAGY ELEMÉR és munkatársai a willemit-foszforok lumineszcenciáját vizsgálták és értek el figyelemre méltó eredményeket. BODÓ ZALÁN a fényporok gyártásánál oly fontos szemcsenagyság meghatározásával és a fénytani sajátságokra való befolyásával foglalkozott. Ezek a fizikai kutatások a fénycsőgyártás gyakorlati kérdéseiben is lényegesek.

A röntgenanalitikai vizsgálatokban NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN és SASVÁRI KÁLMÁN, az akusztikai és ultrahang kutatás területén pedig TARNÓCZY TAMÁS, GREGUSS PÁL és TARY LÁSZLÓ nevét kell megemlítenünk.

A fizikai kutatásokban elért eredményeknek csak egy részéről számoltam be, azonban ezek is tanuskodnak arról, hogy a felszabadulás óta hatalmas fejlődés következett be a hazai fizikában. Ezt a fejlődést elősegítette kormányzatunk nagyarányú anyagi és erkölcsi támogatása.

A nagy kutatógárdával és műszaki felszereléssel rendelkező Központi Fizikai Kutató Intézet mellett a múlt évben megalakult az Akadémiának a kísérleti atommagfizikával foglalkozó Debreceni Fizikai Kutató Intézete és az Elméleti Atomfizikai Kutató csoportja. Az egyetemi fizikai intézetek és tanszékek jelentős céltámogatásban részesülnek, bár az egyetemi fizikai intézetek további fokozott fejlesztésére és támogatására van szükség. Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat olyan szerepet tölt be a fizika területén, mint a matematikában a Bolyai János Matematikai Társulat. A társulat több vándorgyűlést rendezett, a legsikeresebb ezek közül az 1954. évi volt. Ez évben relativitáselméleti kollokvium megrendezésére is sor került, amely igen termékenynek bizonyult. Bizonyára sor kerülhet a közel jövőben kísérleti fizikai kollokvium megrendezésére is.

Kormányzatunk a fizika területén végzett tudományos munkát nemcsak anyagi támogatással segítette elő, hanem az elért eredmények értékelésével is hozzájárult a munka továbblendítéséhez. Számos fizikusunk részesült kormánykitüntetésben és 10 fizikus kapott Kossuth-díjat, köztük ketten két ízben is.

A hazai matematikában és fizikában a felszabadulás óta bekövetkezett fejlődést vázolva, az elért eredmények rövid ismertetése és értékelése után rátérek a további feladatok megjelölésére:

Mind a matematikában, mind a fizikában — de vonatkozik ez a csillagászatra is, amelyről beszámolóm nem szól — további feladat növelni a kutatás iránt érdeklődők számát. A matematika, a fizika, és a csillagászat iránt érdeklődők számának növelésével együtt gondoskodni kell a kutatók számának egészséges növeléséről is, hiszen a ma érdeklődőiből lesznek a holnap kutatói. Ebben a tekintetben jelentős feladatai vannak a Bolyai János Matematikai Társulatnak és az Eötvös Loránd Fizikai Társulatnak.

Megvalósítandó feladat a kutatási terveknek, a tudományos káderutánpótlásnak, aspiránsképzésnek, a könyv- és folyóiratkiadási terveknek, valamint a külföldi kiküldetési terveknek jobb összehangolása. A multban ugyanis ezekben a kérdésekben sok esetben nem volt meg a kívánatos egyeztetés és összhang. Ennek megvalósítása az osztályvezetőségnek, valamint az osztály keretében működő főbizottságoknak a feladata.

A matematikai és fizikai kutatásokban a szép múlttal rendelkező kutatási irányok továbbfejlesztése a feladat, a kialakulóban levő egyes hazai matematikai és fizikai iskolák kutatási lehetőségeinek és káderutánpótlásának nagyobbfokú biztosításával elő kell segítenünk ezen iskolák teljes kibontakozását.

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézetének ez évre tervezett létrehozása az elméleti jellegű kutatások fokozását, a matematika alkalmazásainak fokozottabb elősegítését, valamint mind nagyobb mértékű segítségadást biztosít a népgazdaságban felmerülő matematikai problémák megoldásában.

A fizikában elsőrendű feladat az osztályhoz tartozó fizikai intézetek tudományos profiljának végső kialakítása, a kísérleti atommagfizikai kutatások fokozott fejlesztése, hogy az atomreakció építésében a Szovjetunió adta nagylelkű és önzetlen segítséget népgazdaságunk számára minél előbb gyümölcsözővé tudjuk tenni.

Az akadémiai fizikai kutató intézetek fejlesztése mellett fokozottabb segítséget kell nyújtani az egyetemeken működő fizikai, elsősorban a kísérleti fizikai intézetek részére. Erre vonatkozólag az egyetemeken folyó kísérleti fizikai oktatás és kutatás színvonalának emelése, valamint a fizikus-képzés megjavítása érdekében a Fizikus Főbizottság egy memorandumot dolgozott ki.

A csillagászati kutatásokról nem szóltam, azonban a hazai csillagászat fejlesztése szempontjából igen sürgős és fontos feladatként meg kell jelölnöm a csillagász-utánpótlás fokozottabb biztosítását, a mátrai fiók-csillagvizsgáló intézet mielőbbi felépítését.

Fontos feladat, hogy valamennyi kutatóintézetünk korszerű műszerekkel való ellátottságát messzemenően biztosítsuk.

Befejezésül álljon itt néhány adat az osztály elmúlt egy évi munkájáról.

A legutóbbi Nagygyűlés óta az Akadémia kiadásában 11 könyv jelent meg (6 matematikai, 5 fizikai), folyóirataink közül: az Acta Mathematica-ból megjelent az V. kötet, az Acta Physica-ból a IV. kötet, az Osztályközleményekből a IV. kötet 2 füzete és az V. kötet 2 füzete, a Magyar Fizikai Folyóiratból a II. kötetből 3 füzet és a III. kötetből 2 füzet jelent meg.

A legutóbbi Naggyűlés óta 7 aspiráns védte meg a kandidátusi disszertációját és kapott kandidátusi fokozatot (ebből 3 matematikus és 4 fizikus). Az egyszerűsített minősítés során felszólító levelet nyertek közül 4 matematikus (ebből 1 doktor és 3 kandidátus) és 1 fizikus kandidátus védte meg disszertációját. Rövidített aspirantura keretében 1 matematikus kandidátusi disszertáció megvédésére került sor.

A beszámoló időszakában 16 matematikus, 22 fizikus és 8 csillagász járt külföldön. Ezek közül a Szovjetunióban 8 csillagász és 6 fizikus, a Német Demokratikus Köztársaságban 6 matematikus és 8 fizikus, Csehszlovákiában 3 matematikus és 2 fizikus, Hollandiában 2 matematikus és 3 fizikus, Lengyelországban 2 matematikus és 1 fizikus, Bulgáriában 2 fizikus, Franciaországban 2 matematikus és Kínában 1 matematikus járt.

A kultúrális egyezmények keretében az elmúlt évben 4 fizikus és 3 matematikus járt Magyarországon.

Ez a néhány adat is bizonyítja, hogy tudományos életünk egészségesen fejlődik. Minden erővel törekednünk kell, hogy a múlt eredményeire épülő tudományos munkánkat tovább fokozzuk és a felszabadulás óta elért eredményeket gyarapítva teljes erővel dolgozzunk a tudomány fejlesztése és népi demokráciánk javára való hasznosítása érdekében.

HOZZÁSZOLÁS

DETRE LÁSZLÓ lev. tag

A Szabadsághegyi Csillagvizsgáló Intézet a felszabadulás után

A Szabadsághegyi Csillagvizsgáló Intézet a főváros tudományos intézetei közül elsőnek szabadult fel, 1944 karácsony napján, és azon kevés intézményünk közé tartozik, amelyek semmi háborus kárt sem szenvedtek. A szovjet katonai hatóságok előzékenysége lehetővé tette, hogy a tudományos munka közvetlenül az ostrom után újra megindulhatott. 1945 júniusában pedig a megfigyeléseket is rendszeresen folytathattuk. 1948-ban már lényeges intézkedések történtek az Intézet fejlesztése érdekében. A felszabadulás óta eltelt 10 évre visszatekintve megállapíthatjuk, hogy az Intézet munkakörét sikerült lényegesen bővítenünk, munkánk színvonalát és nemzetközi jelentőségét emelnünk, és a nagyobbarányú fejlesztésnek csak a múlt rendszer hibájából fennállott káderhiány szabott egyelőre határt, de az utóbbi időben ezen a téren is nagy javulás mutatkozik.

Bár az Intézet egyelőre csak régi, kis teljesítő képességű megfigyelőműszereivel folytatja munkáját, megfigyelési programja is a modern asztrofizika fontos kérdéseit öleli fel. Az Intézet munkájában a legrégibb múltra a Cepheidák vizsgálata tekint vissza. Mi a Cepheidák közül főleg azokat vizsgáljuk, amelyekben egyszerre több rezgés lép fel, mert ezek révén lehet legtöbbet megtudni a csillagok szerkezetéről. Munkánk nemzetközi visszhangja igen kedvező, amit különösen az mutat, hogy a Nemzetközi Csillagászati Unió kopenhágai vezetőségi ülésén holland csillagászok ismertették eredményeinket, és ennek hatására ezeket a vizsgálatokat több nagy külföldi obszervatórium is programjába vette. Az utóbbi időben a változócsillagokra vonatkozó munkáink mindjobban kozmogóniai kérdésekre tevődnek át. A kozmogóniai kérdésekben is sikerült több érdekes eredményt elérni, és ezekről alkalmunk volt beszámolni a múlt év októberében rendezett moszkvai kozmogóniai konferencián.

A megfigyelések minőségében nagy haladást jelentett, hogy 1950-ben hazai fizikus-támogatással kifejleszthettük a fotoelektromos mérési módszereket. Azóta ezeket a módszereket állandóan fejlesztettük, és már figyelemre méltó eredményeket értünk el velük.

Az asztrofizika egyik legmodernebb fejezetébe tartoznak turbulenciaelméleti vizsgálataink is. A napfelületi gázok mozgásából meghatároztuk az ún. turbulens-csere együtthatót, kidolgoztuk a vezető gázokban a turbulenciával egyidejűleg fellépő mágneses fluktuációk elméletét, kimutattuk, hogy bevezethető egy turbulens elektromos ellenállás, amely a molekuláris elektromos ellenállásnál több nagyságrenddel nagyobb. Több vizsgálatot végeztünk a mágneses csillagok szerkezetéről.

1948-ban megalakítottuk a napfizikai osztályt, és ezzel ismét felelevenítettük hazánkban a napfelületi jelenségek kutatását. Ezen a téren ugyanis a magyar csillagászat FÉNYInek a protuberanciákra vonatkozó három évtizedes vizsgálatai révén jelentős múlttal rendelkezik. Az osztály számára részben a MÉDOSZ rohammunkájával több új megfigyelőhelyiséget építettünk, és ezekben a napfizikai kutatásokra szolgáló műszereket helyeztünk el. Az osztály a napfoltokról, fáklyákról és protuberanciákról sokirányú vizsgálatokat inditott be, és ezek előreláthatólag értékes eredményekre fognak vezetni. Az Intézet mechanikai műhelyében az idén elkészül egy spektrohelioszkóp és ez majd teljesen korszerű megfigyeléseket tesz lehetővé.

Az Intézetnek igen jó nemzetközi kapcsolatai vannak. A tavalyi szovjet tanulmányutak lényegesen hozzájárultak ezen kapcsolatok kibővítéséhez. Az Intézet tudományos kiadványai révén csereviszonyban áll minden külföldi obszervatóriummal. Könyvtárunk állománya 1945 óta a kétszeresére emelkedett, és ma eléri a 20 000 kötetet. Könyvtárunk fejlesztésében nagy segítséget kapunk a Szovjet Csillagászati Tanácstól, amennyiben több példányban ingyen kapjuk az összes szovjet csillagászati folyóiratokat, valamint a csillagászati, geodéziai és geofizikai könyveket.

A közeljövőben Intézetünk műszerállománya jelentős mértékben bővül. 1952-ben az Akadémia a jénai Zeiss-műveknél megrendelt egy 90 cm átmérőjű, 1:2 nyílásviszonyú Schmidt-teleszkópot, és ennek leszállítása 2 év múlva várható. Ezzel a hazai csillagászat most első ízben jut igazán korszerű, nemzetközi viszonylatban is jelentős megfigyelő műszerhez. A műszer felállításával egyúttal meg kell oldani egy másik, egyre sürgetőbbé vált problémánkat, ti. azt, hogy az Intézet megfigyelő munkáját jelenlegi helyén egyre inkább korlátozza a Szabadsághegy fokozódó beépülése. Ezért ma már elkerülhetetlen, hogy műszereinket por- és füstmentes helyen, nagy városok fényétől távol állítsuk fel. A múlt év folyamán elkészültek a mátrai fiókintézet tervei, és az Akadémia megkapta a fiókintézet számára kijelölt területet a Piszkéstető délkeleti részén. Remélhetőleg mire a Schmidt-teleszkóp megérkezik, addig elkészül az azt befogadó 8 m átmérőjű kupola, hogy a megfigyelések azonnal megindulhassanak.

A MATRIX-ELMÉLET ALKALMAZÁSA LÁNCHIDAK SZÁMÍTÁSÁRA

EGERVÁRY JENŐ r. tag

Előadta 1955. május 26-án a harmadik és hatodik osztály együttes ülésén

A függőhidak MELAN és TIMOSHENKO által megalapozott és mások által továbbfejlesztett eddigi elmélete [1] a következő idealizált szerkezeten: „modellen“ alapul. Egy hajlékony kötél és egy rugalmas gerenda végtelen sok vertikális függesztő rúd által vannak összekötve egymással és meghatározandók valamely tetszőleges vertikális terhelés hatása folytán a szerkezetben létrejövő alakváltozások és feszültségek. Ezen modell matematikai tárgyalása egy lineáris, állandó együtthatós, negyedrendű inhomogén differenciálegyenletre vezet, mely megoldható a Green-függvény alkalmazásával vagy Fourier-kifejtéssel.

Ez a módszer, noha nyilván nem adhatja meg a függesztő rudak feszültségét, mégis a legalkalmasabbnak látszik az olyan hidak matematikai vizsgálatára, melyek *hajlékony kötélre* vannak felfüggesztve. Ha azonban a híd *láncra* van felfüggesztve, akkor a hajlékony kötélnek és végtelen sok függesztő rúdnak a fölvétele egyáltalán nem kielégítő megközelítése a valóságnak, és így természetszerűen felvetődik a kérdés, vajon lehet-e az egész módszert oly módon finitizálni (végszerűsíteni), hogy differenciálegyenlet helyett csupán egy lineáris algebrai egyenletrendszer megoldása legyen szükséges.

Nyilvánvalóan az elméletnek ilyen egyszerűsítése csak akkor lesz lehetséges, ha az élő tehernek egy folytonos eloszlás-függvénnyel való megadását mellőzzük és a függesztő rudak alsó végpontjaiban támadó koncentrált terhelő erők alkalmazására szorítkozunk. Gyakorlatilag ez a közelítés annál inkább megengedhető, mert tudvalevőleg az élő teher pontos eloszlása sohasem ismeretes, elméletileg pedig a „de Saint Venant-féle elv“ garantálja, hogy a folytonos teherelosztásnak a sztatikailag ekvivalens koncentrált terhekkel való helyettesítése a szerkezet alakváltozását kevéssé befolyásolja.

Amennyiben a folytonosan megoszló élő terhet ily módon sztatikailag ekvivalens koncentrált erőkkel helyettesítjük, és a Clapeyron-féle egyenleteket általánosított formájukban alkalmazzuk, valóban lehetővé fog válni láncra függesztett hidak számára egy finitizált számítási módszert megalkotni.

Ez a finitizált módszer az egész problémát egy inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszer megoldására redukálja, vagy ami ugyanazt jelenti, egy matrix invertálására, reciprokának a meghatározására. Ennek a matrixnak a rendszáma azonban egyenlő a függesztő rudak számával és innen következtethető, hogy pl. egy 50 függesztő rudat tartalmazó híd esetében a megoldás az inverz matrix közvetlen kiszámításával rendkívül fáradtságos és hosszadalmas lenne. Szerencsére az invertálandó matrixról ki fog derülni, hogy az racionális függvénye a

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

kontinuáns matrixnak, melynek kanonikus alakja (spektrális felbontása) ismeretes. Ennek a kanonikus alaknak a felhasználásával és a matrix-elmélet néhány ismert tételének az alkalmazásával automatikusan el fogunk jutni a fentemlített lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásának Fourier-kifejtéséhez. A megoldás ezen alakjának alkalmazása mellett a hídszerkezet alakváltozásai és feszültségei számológép segélyével aránylag könnyen kiszámíthatóknak fognak bizonyulni.

I. Egy lánc alakváltozása a csuklóiban ható vertikális erők következtében

Tekintsük a függélyes síkban elhelyezkedő $A_0 A_1 \dots A_n$ láncot, mely az $A_k A_{k+1}$ merev rudakból áll. Jelöljük az $A_k A_{k+1}$ rúd és az Ox tengely közti szöget α_{k+1}-gyel és működjön az A_k csuklóban p_k vertikális erő. Jelöljük továbbá $A_k A_{k+1}$ rúdban beálló húzó feszültséget t_{k+1}-gyel. (l. 1. ábra.)

Ekkor a A_k csuklóra nézve az egyensúly föltételei a következők:

$$t_{k+1} \sin \alpha_{k+1} - t_k \sin \alpha_k + p_k = 0 \tag{1, 1}$$

$$t_{k+1} \cos \alpha_{k+1} - t_k \cos \alpha_k = 0 \tag{1, 2}$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Innen

$$t_k \cos \alpha_k = h = \text{konst.} \quad t_k = \frac{h}{\cos \alpha_k} \tag{2}$$

és ezt (1, 1)-be helyettesítve adódik

$$h(\operatorname{tg} \alpha_{k+1} - \operatorname{tg} \alpha_k) + p_k = 0 \tag{3}$$

vagy

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = -\frac{p_k}{h}, \tag{4}$$

ahol x_k és y_k a A_k csukló koordinátáit jelentik.

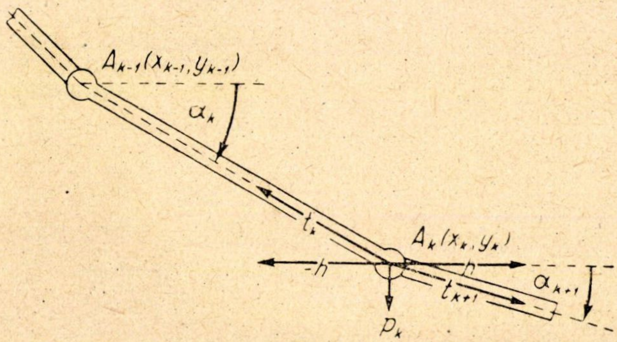
Tegyük fel most, hogy

$$x_{k+1}-x_k=l=\text{konst.}\qquad (k=1, 2, \ldots, n-1)$$

Ekkor a fenti egyenletekből következik:

$$\frac{-y_{k-1}+2y_k-y_{k-1}}{l}=\frac{p_k}{h}\cdot\frac{p_k}{h}. \tag{5}$$

Ez azt jelenti, hogy ha az egyensúlyi helyzetben a p_k vertikális erők ekvidisztánsak, akkor ezek az erők arányosak a csuklóordináták második differenciáival.



1. ábra

Tegyük fel, hogy a láncnak A_0 és A_n végpontjai az x tengelyen vannak. Ekkor $y_0=y_n=0$ és az (5) egyenletek most az alábbi alakot öltik:

$$\begin{aligned} 2y_1-y_2 \qquad\qquad &= l\frac{p_1}{h} \\ -y_1+2y_2-y_3 \qquad &= l\frac{p_2}{h} \\ -y_{n-2}+2y_{n-1} &= l\frac{p_{n-1}}{h} \end{aligned} \tag{5, 1}$$

Ha a

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \ldots 0 \\ -1 & 2 & -1 \ldots 0 \\ 0 & -1 & 2 \ldots 0 \\ . & . & . \quad . \; . \; . \\ 0 & 0 & 0 \ldots 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

matrixokat bevezetjük, akkor a fenti egyenletek a következő matrix-egyenletbe foglalhatók össze:

$$\mathbf{C}\mathbf{y}=\frac{l}{h}\mathbf{p}. \tag{5, 2}$$

A **C** matrix nem-szinguláris, ennélfogva (5, 2)-ből következik:

$$\mathbf{y} = \frac{l}{h}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}. \tag{5, 3}$$

Ez az egyenlet a csuklók y_k ordinátáit megadja, mint a p_k vertikális erők explicit függvényeit.

Abban a speciális esetben, midőn az összes p_k erők egymással egyenlők és közös értékük p, a csuklók a

$$y = \frac{p}{h}\frac{x(nl-x)}{2l}; \quad \left(y_k = \frac{p}{h}\frac{k(n-k)}{2}l\right) \tag{7}$$

parabolán feküsznek.

Ebben az esetben a p teher, a h horizontális feszültség és az első láncszem iránytényezője a következő egyenlet által vannak összekapcsolva

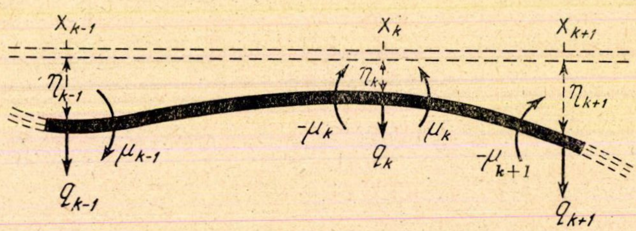
$$h = \frac{n-1}{2}\frac{l}{y_1}p,$$

és a lánc legmélyebb pontjának az ordinátája

$$y_{\max} = \frac{p}{h}\frac{n^2}{8}l \qquad \text{ha } n \text{ páros}$$

$$y_{\max} = \frac{p}{h}\frac{n^2-1}{8}l \qquad \text{ha } n \text{ páratlan}$$

II. Egy gerenda alakváltozása a reá ható koncentrált transzverzális erők következtében



2. *ábra*

Tekintsünk egy homogén prizmatikus gerendát, mely az $(x_0, 0)$, $(x_n, 0)$ végpontjain alá van támasztva és az $(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), \ldots, (x_{n-1}, 0)$ pontokban a $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}$ vertikális erők által van terhelve. Ezen erők hatása alatt azok támadáspontjai η_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ transzverzális elmozdulást szenvednek és a (x_k, η_k) egyensúlyi helyzetekbe jutnak.

Feladatunk meghatározni azt a kapcsolatot, amely a q_k alkalmazott erők és a támadáspontoknak η_k transzverzális elmozdulásai közt fennáll.

Erre a célra fel fogjuk használni a rugalmasságtannak az alábbi jólismert tételeit (l. pl. [6]).

α) Ha a gerenda $(x_k, 0)$ pontjai a q_k transzverzális erőkkel vannak terhelve, akkor a támadáspontokban fellépő μ_k hajlító feszültségek a következő egyenletek által vannak meghatározva:

$$(1) \qquad \frac{\mu_{k+1}-\mu_k}{x_{k+1}-x_k}-\frac{\mu_k-\mu_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}=-q_k.$$

β) Ha a gerenda $(x_k, 0)$ pontjainak η_k transzverzális elmozdulásai adva vannak, akkor az x_k keresztmetszetekben fellépő μ_k hajlító feszültségek a következő egyenletekkel vannak meghatározva:

$$(2) \qquad -\frac{1}{6EJ}\{(x_{k+1}-x_k)\mu_{k+1}+2(x_{k+1}-x_{k-1})\mu_k+(x_k-x_{k-1})\mu_{k-1}\}=$$

$$=\frac{\eta_{k+1}-\eta_k}{x_{k+1}-x_k}-\frac{\eta_k-\eta_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}.$$

Ha ezen (1) (2) egyenletekből a μ_k hajlító feszültségeket elimináljuk, akkor megkapjuk a q_k erők és az η_k elmozdulások közt a keresett összefüggést. Ez az elimináció legcélszerűbben a matrix-technika segélyével hajtható végre. Továbbá az egyenletes lánchidak elméletében ezen egyenleteknek csupán arra a különösen egyszerű alakjára van szükségünk, mely a gerenda ekvidisztans felosztásának felel meg. Ez esetben

$$x_1-x_0=x_2-x_1=\cdots=x_n-x_{n-1}=l$$

és az (1) (2) egyenletek most a $\mu_0=\mu_n=0$ és $\eta_0=\eta_n=0$ kerületi feltételek figyelembevételével a következő alakot öltik:

$$(3) \qquad \begin{aligned} 2\mu_1-\mu_2 \qquad\qquad &= lq_1 \\ -\mu_1+2\mu_2-\mu_3 \qquad &= lq_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -\mu_{n-2}+2\mu_{n-1} &= lq_{n-1} \end{aligned}$$

$$(4) \qquad \begin{aligned} 2\eta_1-\eta_2 \qquad\qquad &= \frac{l^2}{6JE}(4\mu_1+\mu_2) \\ -\eta_1+2\eta_2-\eta_3 \qquad &= \frac{l^2}{6JE}(\mu_1+4\mu_2+\mu_3) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -\eta_{n-2}+2\eta_{n-1} &= \frac{l^2}{6JE}(\mu_{n-2}+4\mu_{n-1}). \end{aligned}$$

Ha bevezetjük az (I. 6.) matrixokon kívül a

$$(5) \qquad \mathbf{K}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{bmatrix}; \quad \eta=\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrixokat, akkor a (3) (4) egyenletek a következő matrix-egyenletekbe foglalhatók össze:

$$\mathbf{C}\cdot\mu = l\cdot\mathbf{q} \tag{3, 1}$$

$$\mathbf{C}\cdot\eta = \frac{l^2}{EJ}\mathbf{K}\cdot\mu \tag{3, 2}$$

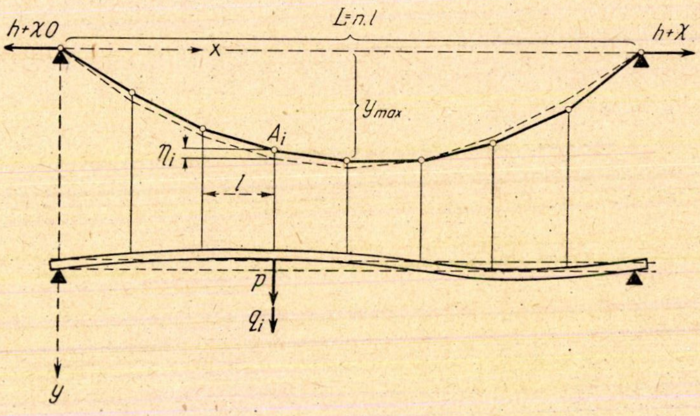
A **C** és **K** matrixok nem-szingulárisak, tehát μ-nek az eliminációja közvetlenül elvégezhető és a következő egyenletekre vezet:

$$\mathbf{q} = \frac{EJ}{l^3}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}\eta \tag{6}$$

$$\eta = \frac{l^3}{EJ}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{q}. \tag{6, 1}$$

Ezen egyenletek megadják az explicit összefüggést a q_k transzverzális erők és az η_k transzverzális elmozdulások között.

III. A lánchíd egyensúlyi egyenlete és annak matrixmegoldása



3. ábra

Mint már fentebb említettük, a hídszerkezetet egy lánc és egy gerenda (merevítő tartó) kombinációjának tekintjük (3. ábra). Ennek a kombinációnak az a sajátossága, hogy ámbár a gerenda deformációját (a rugalmasságtanban szokásos értelmezéssel) kicsinynek tekintjük, a lánc alakváltozása (ti. annak az egyenestől való eltérése) véges nagyságrendű. Ha azonban feltételezzük, — amint az általában szokásos a függőhidak elméletében — hogy a lánc hordozza a saját súlyát, a függesztőrudak súlyát és a gerenda holtsúlyát (önsúly) oly módon, hogy eközben a gerenda egyenes marad, [4] akkor a láncnak és a gerendának az élősúly hatására bekövetkező addicionális alakváltozásai kis mennyiségek, tehát *lineáris* egyenletek segélyével kiszámíthatók.

Alkalmazzuk az alábbi jelöléseket:

α) Legyen a láncszemek száma n (csuklók száma: $n-1$) a szomszédos függesztőrudak távolsága: l.

β) A szerkezet (lánc, függesztőrudak, gerenda) holtsúlya minden egyes függesztőrúdra legyen egyenlő p-vel; az i-dik függesztőrúd alsó végpontjára ható élő teher (hasznos teher): q_i.

γ) A holtsúly hatása alatt bekövetkező láncfeszültség horizontális komponensét jelöljük h-val; az élő teher hatására bekövetkező feszültségnövekedés: χ. A láncnak a kezdeti holt teher hatása alatt felvett egyensúlyi alakját a csuklóknak

$$x_k = kl, \; y_k = \frac{p}{h}\frac{k(n-k)}{2} l \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

koordinátái határozzák meg (az y ordinátát a lánc végpontjait összekötő vízszintestől számítva lefelé pozitívnak minősítjük). A lánccsuklóknak az élőteher hatása folytán bekövetkező vertikális elmozdulásait η_k-val jelöljük. Feltesszük továbbá, hogy a függesztőrudaknak a rugalmas alakváltozása elhanyagolható, ennélfogva a gerenda x_k pontjának vertikális elmozdulása ugyanakkora, mint a k-dik csukló elmozdulása. Ez utóbbi feltevés a függesztőrudak merevségén kívül, azt is implikálja, hogy a csuklók horizontális elmozdulásait figyelmen kívül hagyjuk.

δ) A gerenda keresztmetszetének inercianyomatékát konstansnak tételezzük fel és J-vel jelöljük; a Young-féle modulust E-vel. Legyenek az n láncszemből álló láncnak végpontjai $(0, 0)$ és $(nl, 0)$; továbbá a gerenda végpontjai (alátámasztási pontjai) $(0, m)$ és (nl, m).

A láncnak a kezdeti terhelés hatására felvett egyensúlyi alakját megegyezésben (I. 5)-tel, a

$$\text{(1)} \qquad \frac{-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1}}{l} = \frac{p}{h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

differencia-egyenletek és a

$$\text{(2)} \qquad y_0 = 0, \quad y_n = 0$$

kerületi feltételek határozzák meg.

Az (1) differencia-egyenletek és a (2) kerületi feltételek összefoglalhatók egyetlen matrix-egyenletté:

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{C}\frac{\mathbf{y}}{l} = \frac{p}{h}\mathbf{e},$$

ahol **C** és **y** az I. fejezetben bevezetett (6) matrixokat jelentik és **e** egy oszlop-matrixot jelent, melynek összes elemei 1-gyel egyenlők.

Ha most a kezdeti terheléshez a $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ élőterhek hozzájárulnak, akkor ezen élőtehernek bizonyos, egyelőre ismeretlen $\tilde{q}_i$ részeit a lánc fogja hordozni, a fennmaradó $q_i - \tilde{q}_i$ terheket pedig a gerenda hajlító-szilárdsága. Az élőteher hatása folytán továbbá a horizontális lánc feszültség $h+\chi$ értékre fog növekedni és az y_k ordinátákhoz η_k elmozdulások fognak hozzáadódni. Eszerint az élőteher hatásának figyelembevételével a lánc egyensúlyi feltételeiét a következő egyenlet fogja kifejezni:

$$\mathbf{C}\frac{y+\eta}{l}=\frac{p\mathbf{e}+\tilde{\mathbf{q}}}{h+\chi}. \tag{3, 1}$$

Másrészt a gerenda egyensúlyi egyenlete matrix alakban megegyezésben (II. 6)-tal, a következő lesz:

$$\frac{EJ}{l^3}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}\eta=\mathbf{q}-\tilde{\mathbf{q}} \tag{4}$$

vagy dimenziótlan alakban:

$$\frac{EJ}{l^2 h}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}\frac{\eta}{l}=\frac{\mathbf{q}-\tilde{\mathbf{q}}}{h}. \tag{4, 1}$$

Három ismeretlen mennyiség fordul elő a (3, 1) és (4, 1) egyenletekben, ti. az η és $\tilde{\mathbf{q}}$ vektorok, továbbá a χ skalár parameter.

Tegyük fel egyelőre, hogy χ ismeretes. Ekkor $\tilde{\mathbf{q}}$ értékét a (3, 1) egyenletből a (4, 1) egyenletbe helyettesítve adódik:

$$\frac{EJ}{l^2 h}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}\frac{\eta}{l}+\left(\frac{h+\chi}{h}\right)\mathbf{C}\frac{\mathbf{y}+\eta}{l}=\frac{\mathbf{q}+p\mathbf{e}}{h}. \tag{5}$$

A (3) egyenletnek figyelembevételével ez a következő alakra redukálódik:

$$\left\{\frac{EJ}{l^2 h}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}+\left(1+\frac{\chi}{h}\right)\mathbf{C}\right\}\frac{\eta}{l}=\frac{\mathbf{q}}{h}-\frac{\chi}{h}\frac{p}{h}\mathbf{e}. \tag{5, 1}$$

Ily módon eljutottunk a *lánchidak elméletének alapegyenletéhez.* Ebből az alapegyenletből mindenekelőtt kiolvasható, hogy a $\frac{EJ}{l^2 h}$ és $\frac{p}{h}$ dimenziótlan mennyiségek a terheletlen hídnak karakterisztikus parameterei.

Minthogy továbbá az (5, 1) egyenlet baloldalán a $\{\cdots\}$ zárójelben szereplő matrix nem-szinguláris (lásd erre nézve a IV. fejezetet), tehát az alapegyenlet közvetlenül megoldható a következő alakban:

$$\eta=l\left\{\frac{EJ}{l^2 h}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}+\left(1+\frac{\chi}{h}\right)\mathbf{C}\right\}^{-1}\left(\frac{\mathbf{q}}{h}-\frac{\chi p}{h^2}\mathbf{e}\right). \tag{6}$$

Ez az egyenlet megadja a csuklóknak, valamint a gerendaosztáspontoknak vertikális elmozdulásait, feltéve, hogy a χ láncfeszültség-növekedés már ismeretes.

Felhasználva az η_k elmozdulásoknak ezen értékeit, a gerenda x_k keresztmetszeteiben működő μ_k hajlító feszültségek kiszámithatók a (II. 4, 1) egyenlet segélyével a következő alakban:

$$\mu = \frac{EJ}{l^2}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}\eta = hl\left\{\mathbf{C} + \left(1+\frac{\chi}{h}\right)\frac{hl^2}{EJ}\mathbf{K}\right\}^{-1}\left(\frac{\mathbf{q}}{h} - \frac{\chi p}{h^2}\mathbf{e}\right). \tag{7}$$

A (6) és (7) egyenletek megadják a lehajlások és a hajlítófeszültségek egzakt és explicit értékeit tetszőleges élőtehereloszlás mellett. Azonban, mint már a bevezetésben hangsúlyoztuk, a (6) egyenletben előforduló

$$R = \left\{\frac{EJ}{l^2 h}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C} + \left(1+\frac{\chi}{h}\right)\mathbf{C}\right\}^{-1} \tag{8}$$

inverz matrixnak az effektív kiszámítása nagyszámú függesztőrúd esetén annyira hosszadalmas, hogy a nyert megoldást a (6) alakban nem lehet gyakorlati számításra alkalmasnak minősíteni.

Avégből tehát, hogy eredményeinket gyakorlatilag használható alakra hozzuk, transzformálni fogjuk a (6) és (7)-ben fellépő matrixokat kanonikus alakjukra.

Azon szerencsés körülmény folytán, hogy a **K** matrix a **C** kontinuáns matrixnak lineáris függvénye, ki fog derülni, hogy a (8) „rezolvens" matrixnak kanonikus előállítása aránylag egyszerű számításokat tesz szükségessé és a megoldást automatikusan Fourier-kifejtés alakjában szolgáltatja.

IV. A horizontális láncfeszültség növekedésének kiszámítása

Két esettel foglalkozunk. Először a láncot nyújthatatlannak tételezzük fel, másodszor figyelembe vesszük a lánc rugalmas és termikus nyúlását is; ez utóbbi esetben jelöljük a rugalmassági modulust E-vel és a hőtágulási együtthatót β-val.

A k-adik láncszemnek l_k hosszúsága a kezdeti állapotban a következő egyenlettel van megadva:

$$l_k^2 = (x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 \tag{1}$$

a (ξ_k, η_k) elmozdulások után pedig a láncszem Δl_k megnyúlását a következő egyenletből nyerjük:

$$(l_k + \Delta l_k)^2 = (x_k + \xi_k - x_{k-1} - \xi_{k-1})^2 + (y_k + \eta_k - y_{k-1} - \eta_{k-1})^2. \tag{1, 1}$$

Innen, a kis-mennyiségeknek négyzeteit és szorzatait elhanyagolva, nyerjük, hogy:

$$l_k \Delta l_k = (x_k - x_{k-1})(\xi_k - \xi_{k-1}) + (y_k - y_{k-1})(\eta_k - \eta_{k-1}). \tag{2}$$

Nyújthatatlan lánc esetében $\Delta l_k = 0$.

Ha $x_k - x_{k-1}$ helyébe két szomszédos függesztőrúdnak közös l távolságát behelyettesítjük és ezután a (2) egyenleteket összegezzük, azt kapjuk, hogy:

$$\sum_{k=1}^{n} l_k \Delta l_k = l \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \xi_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})(\eta_k - \eta_{k-1}) = 0.$$

A lánc végpontjai rögzítve vannak: $\xi_0 = \xi_n = 0$ és $\eta_0 = \eta_n = 0$; eszerint $\sum_{1}^{n} (\xi_k - \xi_{k-1}) = 0$ következésképpen

(3) $$\sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})(\eta_k - \eta_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1})\, \eta_k = 0.$$

De a kezdeti terhelési állapotban a (I. 7) egyenlet szerint

$$-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1} = \frac{l}{h} p \neq 0,$$

eszerint nyújthatatlan lánc esetében az η_k vertikális elmozdulások algebrai összegének el kell tűnnie, vagyis

$$\sum_{k=1}^{n-1} \eta_k = 0$$

vagy matrix alakban

(4) $$\mathbf{e}^* \eta = 0.$$

Helyettesítsük most ebbe az egyenletbe η-nak (III. 6) értékét. Azt nyerjük, hogy

(5) $$\mathbf{e}^* \mathbf{R} \left(\frac{\mathbf{q}}{h} - \frac{\chi p}{h^2} \mathbf{e} \right) = 0.$$

A χ láncfeszültség-növekedés ebben az egyenletben látszólag csupán lineárisan fordul elő és ilyenképpen χ kifejezhető belőle a következő alakban:

(5, 1) $$\chi = \frac{h}{p} \frac{\mathbf{e}^* \mathbf{R} \mathbf{q}}{\mathbf{e}^* \mathbf{R} \mathbf{e}}.$$

A valóságban azonban ez egy magas fokszámú algebrai egyenlet χ-re nézve, mert χ az $\mathbf{R}$-ben is előfordul. Avégből, hogy egy első közelítést kaphassunk $\mathbf{R}$-ben $1 + \frac{\chi}{h} \approx 1$-et helyettesítünk, elhanyagolván ily módon χ-t h-hoz viszonyítva. Ezután χ-t kiszámítjuk az ily módon egyszerűsített (5, 1) egyenletből és, amennyiben szükséges, korrigáljuk $\mathbf{R}$-nek az értékét és megismételjük a számítást.

Ha a lánc nyújtható, akkor a k-dik láncszemben a χ horizontális feszültségnövekedés és a ϑ hőmérsékletnövekedés folytán bekövetkező relatív nyúlást az alábbi egyenlet adja meg:

(6) $$\frac{\Delta l_k}{l_k} = \frac{\chi}{EQ} \frac{l_k}{l} + \beta \vartheta.$$

Itt Q a lánc-keresztmetszet területét jelenti és $\chi \frac{l_k}{l}$ a k-dik láncszem totális feszültség növekedése. Ha ezt a (2) egyenletbe helyettesítjük, adódik:

$$\frac{\chi}{EQ}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{l_k}{l}\right)^3+\beta\vartheta\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{l_k}{l}\right)^2=\frac{p}{hl}\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k=\frac{p}{hl}\,\mathbf{e}^*\eta_i.$$

Felhasználva η_i-nak (III. 6) értékét, ismét kapunk egy egyenletet, melyből χ a fenti módon közelítőleg kiszámítható.

V. A megoldás Fourier-kifejtése

A (III. 6)-ban szereplő **R** rezolvens matrix a **C** és **K** matrixoknak racionális függvénye. Minthogy $\mathbf{K}=\mathbf{E}-\frac{1}{6}\mathbf{C}$ (**E** = egységmatrix) tehát **R** racionális függvénye a **C** kontinuáns matrixnak:

$$\mathbf{R}=\varphi(\mathbf{C});\ \varphi(x)=\frac{1-\frac{x}{6}}{\frac{EJ}{l^2h}x^2+\left(1+\frac{\chi}{h}\right)x\left(1-\frac{x}{6}\right)}.$$

Másrészt, mint ismeretes, a **C** matrix kanonikus alakja a következő:

$$\mathbf{C}=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^*=$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left(4\sin^2\frac{K\pi}{2n}\right)\frac{2}{n}\begin{bmatrix}\sin\frac{k\pi}{n}\\ \sin\frac{2k\pi}{n}\\ \vdots\\ \sin\frac{(n-1k\pi}{n}\end{bmatrix}\left[\sin\frac{k\pi}{n},\sin\frac{2\pi}{n},\ldots,\sin\frac{(n-1)k\pi}{n}\right].$$

Ismeretes továbbá, hogy a **C** matrixnak bármely $\varphi(\mathbf{C})$ racionális függvénye a következő kanonikus alakkal bír:

$$\varphi(\mathbf{C})=\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(\lambda_k)\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^*;$$

Ezen tételek felhasználásával a **R** rezolvens matrix számára közvetlenül az alábbi kanonikus alakot nyerjük:

$$\mathbf{R}=\frac{\mathbf{E}-\frac{1}{6}\mathbf{C}}{\frac{EJ}{l^2h}\mathbf{C}^2+\left(1+\frac{\chi}{h}\right)\mathbf{C}\left(\mathbf{E}-\frac{1}{6}\mathbf{C}\right)}=\tag{1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-\frac{\lambda_k}{6}}{\frac{EJ}{l^2h}\lambda_k^2+\left(1+\frac{\chi}{h}\right)\lambda_k\left(1-\frac{\lambda_k}{6}\right)}\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^*$$

és ezt felhasználva (III. 6)-ból adódik:

(2) $$\eta_l = l \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-\frac{\lambda_k}{6}}{\frac{EJ}{l^2 h}\lambda_k^2 + \left(1+\frac{\chi}{h}\right)\lambda_k\left(1-\frac{\lambda_k}{6}\right)} \mathbf{u}_k \left(\frac{\mathbf{u}_k^* \mathbf{q}}{h} - \frac{\chi p}{h^2}\mathbf{u}_k^* \mathbf{e}\right).$$

Ez a formula nyilván csak akkor válik alkalmazhatóvá, ha előbb a χ feszültségnövekedés közelítő értékét a nyújthatatlan lánc esetén érvényes

(3) $$\mathbf{e}^* \eta_l = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_0(\lambda_k)(\mathbf{e}^* \mathbf{u}_k)\left(\frac{\mathbf{u}\mathbf{q}}{p} - \frac{\chi}{h}\mathbf{u}_k^* \mathbf{e}\right) = 0$$

egyenletből kiszámítottuk, ahol $\varphi_0(\lambda)$ jelenti $\varphi(\lambda)$-nak az értékét $x=0$ helyettesítés után.

Figyelembe véve, hogy

$$\mathbf{e}^* \mathbf{u}_{2k} = 0, \quad \mathbf{e}^* \mathbf{u}_{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{n}} \operatorname{cotg}\left(\frac{2k+1}{2}\frac{\pi}{n}\right),$$

az előbbi egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\chi = \frac{h}{p} \left\{\sum \varphi_0(\lambda_{2k+1})(\mathbf{u}_{2k+1}^* \mathbf{q})(\mathbf{u}_{2k+1}^* \mathbf{e})\right\} : \left\{\sum \varphi_0(\lambda_{2k+1})(\mathbf{e}^* \mathbf{u}_{2k+1})^2\right\}$$

Ha χ-nek ezt az értékét a (2) egyenletbe helyettesítjük, akkor onnan az η_{lk} vertikális elmozdulások kiszámíthatók, továbbá a (III. 7) egyenletnek a felhasználásával a μ_k hajlítófeszültségek is kiszámíthatókká válnak.

VI. A numerikus számítás elrendezése

Mindenekelőtt kiszámítjuk a következő mennyiségeket:

1. $\frac{EJ}{hl^2}$ (A híd merevségi parametere.)

$\frac{p}{h}$ (A híd mértani vagy alaki parametere.)

$\lambda_k = 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$. (A **C** matrix sajátértékei.)

$\mathbf{u}_k^* = \sqrt{\frac{2}{n}}\left|\sin\frac{k\pi}{n}, \sin\frac{2k\pi}{n}, \ldots, \sin\frac{(n-1)k\pi}{n}\right|$. (A **C** sajátvektorai.)

2. Az egyenletes terhelés Fourier-együtthatói:

$$\mathbf{e}^* \mathbf{u}_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sin\frac{\nu k\pi}{n} \quad \begin{cases} 0, \text{ ha } k \text{ páros szám,} \\ \frac{2}{n}\operatorname{ctg}\frac{k}{2n}, \text{ ha } k \text{ páratlan szám.} \end{cases}$$

3. A tetszőlegesen előírt $\mathbf{q}^* = [q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}]$ élő teher Fourier-együtthatói:

$$\mathbf{q}^* \mathbf{u}_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu \sin \frac{\nu k \pi}{n}.$$

4. A $\varphi_0(\lambda)$ függvény értékei a $\lambda_k = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}$ helyen:

$$\varphi_0(\lambda_k) = \frac{1 - \frac{\lambda_k}{6}}{\frac{EJ}{l^2 h} \lambda_k^2 + \lambda_k \left(1 - \frac{\lambda_k}{6}\right)}.$$

A χ horizontális feszültségváltozás közelítő értéke ezek felhasználásával az V. (4.) egyenletből kiszámítható. Az így kapott χ értéket $\varphi(\lambda)$-ba behelyettesítve a $\varphi(\lambda_k)$ értékek is kiszámíthatók. Végül kiszámítandók a következő szorzatok:

$$l\varphi(\lambda_k)\left(\frac{\mathbf{u}_k^* \mathbf{q}}{h} - \frac{p\chi}{h^2} \mathbf{u}_k^* \mathbf{e}\right); \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

az így nyert számok az $[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}]$ lehajlási vektor Fourier-együtthatói. Hasonlóan számíthatók a μ_k hajlító nyomatékok is.

IRODALOM

[1] J. MELAN: Eisenbrückenbau. 1925.

[2] S. TIMOSHENKO: „Steifigkeit von Hängebrücken." *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 8 (1928) 1.

[3] TH. VON KÁRMÁN—M. BIOT: *Mathematical methods in engineering.* 1940. 277 o.

[4] K. KÖPPEL—K. H. LIE: „Lotrechte Schwingungen von Hängebrücken." *Ingenieur-Archiv* 13 (1942—43) 211.

[5] A. D. DE PATER: „Some new points ef view in calculating suspension bridges." *Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering* 11 (1951) 41.

[6] „HÜTTE" Des Ingenieurs Taschenbuch, I. kötet, 1949, 680. o.

HAZAI VIZSGÁLATOK A VÉGES CSOPORTOK ELMÉLETÉBEN

RÉDEI LÁSZLÓ r. tag

Előadta az 1955. május 26-án tartott nyilvános osztályülésen

Az Akadémia III. Osztályának vezetőségétől nyert megtisztelő megbízás alapján be fogok számolni a véges csoportok elméletébe vágó újabb hazai vizsgálatokról. FUCHS LÁSZLÓnak a végtelen csoportokat illető, egyébként hasonló célzatú előadása és saját előadásom együttesen hivatva lesznek képet adni a hazai összes csoportelméleti kutatások állásáról.

Hadd szenteljek néhány szót SZELE TIBOR elhunyt kiváló tudósunk emlékének, akit a hirtelen halál nemrég ragadott el tőlünk tudományos életünknek rendkívüli kárára s az algebra művelőinek mélységes bánatára. Pótolhatatlan az az űr, amelyet SZELE TIBOR az élők sorából történt váratlan eltávozásával hátrahagyott s vígasztalan a fájdalom, amelyet elvesztése miatt barátai és munkatársai éreznek. Ő volt algebrai tudományunk egyik fő értéke, s mert fiatal élete derékban tört ketté, lemérni sem tudjuk a veszteség nagyságát, hogy alkotó tevékenysége ily korán megszakadt. Emlékezésünk tovább kiséri őt s üstökösszerű pályája tudományos életünk egét örökké bevilágítja.

A csoportelméletnek a véges és végtelen csoportokat illető részei közül az előbbinek a művelése jóval korábban indult meg s így sokkal teljesebb kiépítettségnek örvend, mégis főleg az utóbbi évtizedekben a végtelen csoportok elmélete egyre inkább behozza eddigi hátrányát, úgyhogy ma már szinte az elválasztó határok leomlását tapasztaljuk. Az egybeolvadás mértékéről képet ad A. G. KUROS kitűnő Csoportelmélet c. könyve, amely egyetemesen kiterjeszkedik az egész csoportelméletre, s e tekintetben úttörő jellegű. Feltűnő jellegzetessége a könyvnek, hogy nincs benne külön a véges csoportokról szóló fejezet, amivel a szerző mintegy a jövő fejlődési irányát is kitűzi a véges és végtelen csoportok elméletének további egységesítése felé. Míg egyrészt e folyamat erőteljes megindulása igen örvendetes, másrészt kétségtelen, hogy ennek dacára a részletvizsgálatokban továbbra is megmarad a véges csoportok elméletének bizonyos fokú különállása.

Hazai csoportelméleti vizsgálatainkban meglehetősen éles a véges és végtelen csoportokra való elkülönülés. A legtöbb vizsgálat ugyanis olyan, hogy vagy csak a véges csoportokról szól, vagy érvényes ugyan az összes csoportokra, de a véges esetre vonatkozólag régen ismert vagy triviális eredményt nyújt. Mindamellett vannak olyan csoportelméleti kutatási eredményeink is, amelyek a véges és végtelen csoportokat illetően egyformán érdekesek. FUCHS LÁSZLÓval a vitás esetek kiküszöbölése céljából abban egyeztünk meg, hogy ő azokat a vizsgálatokat fogja ismertetni, amelyek kifejezetten a végtelen csoportokra vonatkoznak abban az értelemben, hogy bennük éppen a csoport végtelen volta döntő, nekem jut a többi csoportelméleti vizsgálat ismertetése.

Könnyítés céljából ezután „csoporton" a véges csoportokat fogom érteni. Általában nem fogom külön megjegyezni azokat az eseteket, amelyekben a végtelen csoportokra is érvényes kutatásokról lesz szó, mert ez a legtöbb esetben a vizsgálat természetéből magától is kiviláglik. Egyes esetekben a végtelen csoportokra is szóló érvényességre fel fogom hívni a figyelmet.

Mintegy az utolsó tizenöt év vizsgálatairól fogok beszámolni, amelyek közel 50 dolgozatban láttak napvilágot. A kutatások általában komoly érdekességű kérdésekről szóltak, egy részük kiemelkedő eredménnyel zárult. A kutatásokat FARAGÓ TIBOR, FUCHS LÁSZLÓ, HAJÓS GYÖRGY, POLLÁK GYÖRGY, STEINFELD OTTÓ, SZÁSZ GÁBOR, SZELE TIBOR, SZÉLPÁL ISTVÁN, SZENDREI JÁNOS, SZÉP JENŐ és referens végezték. Az egyes kutatások ismertetésénél többször röviden meg fogok említeni olyan külföldi kutatásokat is, amelyek azokat folytatták.

A vizsgálatoknák nagyobb s egyben legfontosabb része a csoportok faktorizációját illető kérdésekkel foglalkozott, a többi vizsgálat igen változatos kérdésekkel. Mint hiányosságot jegyzem meg, hogy ábrázoláselméleti kutatások nem történtek.

A faktorizációs vizsgálatok két élesen elkülönült problémát tárgyaltak. E problémák egyike az Abel-csoportoknak komplexusok szorzatára való felbontását illeti, a másik a ferde csoportoknak főleg két, kisebb részben több részcsoport szorzatára való faktorizációit. E két problémakör közül az első teljesen magyar eredetű, igen nagy részben a második is. Mégpedig az Abel-csoportok faktorizációját illető vizsgálatok HAJÓS GYÖRGY nevéhez fűződnek, a ferde csoportokra vonatkozó újszerű vizsgálatokat SZÉP JENŐ indította meg. Mindkét problémakörbe számos további kutató is belekapcsolódott.

Mielőtt a részletes ismertetésre térnék, előrebocsátok néhány jelölést és definíciót.

Egy H véges halmaz elemeinek a számát (H)-val jelöljük. G jelöljön egy adott csoportot. Eszerint (G) a G rendje. Az a csoportelem rendjét $o(a)$-val jelöljük. Egy $G=A_1\dots A_n$ $(A_1,\dots,A_n\subseteq G)$ egyenletet a G faktorizációjának nevezünk, ha G minden eleme egyértelműen $a_1\dots a_n$ alakban írható $(a_i\in A_i, i=1,\dots,n)$. Ha egyértelműséget nem követelünk meg, akkor tágabb értelmű faktorizációról beszélünk. p jelentsen prímszámot.

a) Az Abel-csoportok faktorizációjának vizsgálata

Míg mást nem mondunk, jelöljön G Abel-csoportot. Szimplexnek nevezünk minden olyan komplexust, amelynek elemei $\alpha^0 (=\varepsilon), \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{e-1}$ $(o(\alpha) \geqq e \geqq 2)$. Ez a szimplex nyilván akkor és csak akkor csoport (G-nek részcsoportja), ha $o(\alpha) = e$.

Emlékeztetek MINKOWSKI alapvető tételére, amely szerint a

$$-1 \leqq a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ |a_{ik}| = \pm 1)$$

valós együtthatós egyenlőtlenségrendszernek van nem-triviális megoldása, s arra az ezzel kapcsolatos, hosszú ideig bizonyítás nélkül maradt sejtésére, hogy tétele „$\leqq$“ helyett „$<$“-vel is igaz, ha egyik egyenlőtlenség sem egész együtthatós. Számos kutató sikertelen fáradozása után HAJÓS 1938-ban bebizonyította, hogy a sejtés az alábbi tétellel ekvivalens, s 1941-ben e tételét is bebizonyította. Ez a nevezetes HAJÓS-féle tétel így szól: A G Abel-csoport szimplex tényezőkre való faktorizációjában legalább egyik tényező szükségképpen csoport.

E tétel nemcsak fenti kapcsolata folytán, hanem a csoportelméleten belül is rendkívüli jelentőségű, s külön érdekessége, hogy látszólagos könnyűségével ellentétben bizonyítása váratlanul nehéz. Főleg feltűnő, hogy a bizonyítás céljára az Abel-csoportok alaptétele mindeddig hatástalannak bizonyult, s így HAJÓS tétele mintegy megfosztotta az alaptételt eddigi túlzott tekintélyétől. A tétel sok további vizsgálatot is megindított, amelyekről alább több ízben szó lesz.

Igen érdekes a tétel bizonyítása, amelyet HAJÓS az egész számok gyűrűje fölött képezett $I(G)$ csoportgyűrűben végzett el, leglényegesebb része az $I(G)$-ben egy finom zérusosztóvizsgálat. Kecsegtető gondolat ezt a vizsgálatot az I alaptartományról egy felbontási testre való áttéréssel könnyebbé tenni, de ez út nem bizonyult járhatónak.

HAJÓS bizonyítását referens, majd újabb lényeges lépéssel SZELE egyszerűsítette.

Referens újabban HAJÓS tételére második bizonyítást nyert, amely p-csoportok esetére meglepően egyszerű, de a bizonyításnak az általános esetre való kiterjesztése nehézkes. A p-csoportokról szóló rész bizonyítása a következő önmagában is érdekes tételen nyugszik. Ha a G Abel-csoport rendje p^n s az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(\in G)$ elemek G-t generálják, továbbá közülük bármely k számú elem legalább p^k rendű részcsoportot generál $(1 \leqq k \leqq n-1)$, akkor az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ elemeket alkalmas hatványra emelve, majd e hatványokat alkalmas sorrendben írva, olyan $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sorozat áll elő, hogy az első k tag által generált csoport rendje éppen p^k $(1 \leqq k \leqq n)$. E könnyen bizonyítható tételből az $I(G)$ gyűrű felhasználásával korolláriumként nyerhető HAJÓS tételének a p-csoportokat illető része. SZELE TIBOR hívta fel referens figyelmét az $I(G)$ mellőzésére, ami valóban lehetséges, de csak az egyszerűség rovására.

HAJÓS tételének más úton való bizonyítási kísérlete referenst bizonyos újtípusú zéta-függvények felfedezésére vezette, amelyek ugyan szoros kapcsolatban állnak a tétellel, de ennek várt újabb bizonyítását eddig nem eredményezték, viszont önmagukban becses újszerű tényeket szolgáltattak (lásd *c)* alatt). FÁRY ISTVÁN HAJÓS tételét a topologikus csoportok elméletében alkalmazta. SZELE sejtése szerint HAJÓS tétele a végtelen Abel-féle torziócsoportokra is igaz, s e sejtést bizonyos speciális esetekben bebizonyította.

A MINKOWSKI-féle sejtés geometriai alakja tudvalevően kimondja, hogy az n-dimenziós euklideszi térnek úgynevezett kockaráccsal való minden egyszerű lefedése oszlopozott (azaz tartalmaz teljes lappal illeszkedő kockákat). FURTWÄNGLER sejtése szerint hasonló volna érvényes a „k-szorosan térfedő kockarácsokra", azonban HAJÓS ezt a sejtést ugyancsak csoportelméleti úton megcáfolta. Egyrészt ugyanis példa megszerkesztésével bebizonyította a következőt: Ha a G Abel-csoportnak szimplexekre való $G = S_1 \ldots S_n$ tágabb értelmű faktorizációja olyan, hogy G minden eleme pontosan k-szor áll elő $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ alakban ($\sigma_i \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$), akkor ebből ($k > 1$ esetén) nem következik, hogy $S_1, \ldots, S_n$ valamelyike csoport. Másrészt kimutatta HAJÓS, hogy e negatívum egyértelmű FURTWÄNGLER sejtésének téves voltával. Érdekes történeti adat, hogy FURTWÄNGLER sejtése is MINKOWSKI sejtésének bizonyítását célozta, s az elmondottak megmagyarázzák, hogy ez az út miért volt járhatatlan.

HAJÓS a MINKOWSKI-sejtésnek egy KELLERtől származó élesítését is csoportelméletileg átfogalmazta, de a KELLER-féle sejtés kivizsgálása eddig nem történt meg.

Szintén HAJÓStól való annak a kérdésnek a felvetése, hogy a ciklikus csoport faktorizációja esetén vajon akkor is fellép-e csoporttényező, ha a tényezők számára most már nemcsak szimplexeket, hanem bármilyen komplexusokat megengedünk. HAJÓS érdekes geometriai meggondolással bebizonyította, hogy a felelet a p^e rendű csoportok esetén igenlő, a többi rendszám esetén tagadó, kivéve a $p^e q^f, p^e qr, pqrs$ alakú rendszámokat (p, q, r, s különböző prímszámok; $e, f \geqq 1$). A megmaradt kétes esetek közül a pq, pqr rendszámok esetére referens igenlő választ nyert viszonylag fáradságos úton. A még fennmaradt eseteknek egy részét BRUIJN két dolgozatában elintézte, s így jelenleg már csak a $p^2q^2, p^2qr, pqrs$ esetek kétesek.

A HAJÓS-féle problémakör termékeny voltának további érdekes adatát szolgáltatja referensnek egyik dolgozata, amelyben bebizonyítja, hogy a p^2 rendű nemciklikus Abel-csoportnak csak olyan kéttényezős faktorizációja van, amelyben az egyik tényező csoport. A bizonyítás meglepően nehéz, s több önmagában érdekes megállapítást tartalmaz. Ilyen a következő: A $p (\neq 2)$ karakterisztikájú prímtest fölött az $f(x) = x^{p-1} + \gamma x^{\frac{p-1}{2}} + \cdots$ alakú (hézagos) polinomok közül csakis az

$$f(x) = x^{\frac{p-1}{2}i}\left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)^k \left(x^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)^l \qquad (i + k + l = 2)$$

polinomok esnek szét csupa lineáris tényező szorzatára. Egyéb mellékeredményként kiderülnek a GAUSS-féle összegeknek bizonyos (oszthatóságbeli) maximáltulajdonságai.

BRUIJN a legtöbb további nem-ciklikus Abel-csoportról kimutatta, hogy van olyan faktorizációjuk, amelyben egyik tényező sem csoport, s ugyancsak talált olyan esetet, amikor ez nem lehetséges, végül bizonyos esetek még kétesek maradtak.

b) A ferde csoportok faktorizációinak vizsgálata

Az alábbiakban jelöljön G ferde csoportot. (Az Abel-csoportokat nem kell kizárnunk, de mondanivalóink erre az esetre nem érdekesek.) A G-nek faktorizációi és tágabb értelmű faktorizációi közül most csak olyanokat tekintünk, amelyekben mindegyik tényező csoport. Legtöbb esetben a tényezők száma kettő lesz.

Tekintsünk egy

$$G = AB$$

faktorizációt. Minthogy ebből $G = BA$ következik, azért G minden eleme egyértelműen ab, valamint $b'a'$ alakban írható ($a, a' \in A$; $b, b' \in B$). Minthogy eszerint az $ab = b'a'$ egyenletnek adott a, b esetén egyetlen a', b' pár tesz eleget, azért minden b-hez tartozik A-nak egy önmagába való $a \to a'$ leképezése. Ez a leképezés nyilván A-nak permutációja, amelyet π_b-vel jelölünk, s ezek egy Π_B csoportot alkotnak. Hasonlóan definiálhatunk egy Π_A permutációcsoportot, amely B-nek bizonyos permutációiból áll.

SZÉP a $G = AB$ faktorizációkat főleg a Π_B, Π_A permutációcsoportokon keresztül vizsgálja. 1949-ben megjelent első idevágó dolgozatában mindenekelőtt megállapítja a

$$B \sim \Pi_B \qquad (b \to \pi_b)$$

homomorfizmust, s hogy e homomorfizmus magja G-nek B-ben foglalt normálosztói közül a maximális. (Ez a végtelen csoportokra is igaz.) Alkalmazásként nyeri többek között a következő tételt: Ha B-nek van (A)-nál magasabb rendű prímszámhatványrendű eleme, akkor G nem egyszerű, s A tartalmazza G-nek olyan normálosztóját, amelynek rendje p-vel osztható.

SZÉP a $G = AB$ faktorizációt félig automorf összetételűnek nevezi, ha a π_b permutációk A-nak automorfizmusai, s automorf összetételűnek, ha hasonló teljesül A, B helyett a B, A párra is. Bebizonyítja, hogy az egyszerű csoportoknak nincs félig automorf összetételű faktorizációja.

SZÉP egy további vizsgálatában megállapítja, hogy ha egy $G = AB$ faktorizációban $((A), (B)) = 1$, akkor G-nek minden normálosztója $A'B'$ alakú, ahol A' az A-nak, B' a B-nek részcsoportja. Korolláriumként következik, hogy ha az előbbi feltevésen kívül A, B egyszerűek, akkor G is egyszerű.

SZÉPnek referenssel közösen írt egyik dolgozatában szerepel a következő tétele: Ha érvényes egy $G=AB$ tágabb értelmű faktorizáció s az $A \cap B$ metszet tartalmazza A-nak (vagy B-nek) egy valódi normálosztóját, akkor G nem egyszerű. Ebből speciális esetként adódik, hogy ha $G=AB, A \cap B \neq 1$ és A (vagy B) Abel-féle, akkor G nem egyszerű. Ezeket a tételeket más úton már korábban ORE is nyerte.

BURNSIDE ismert tétele szerint minden olyan csoport feloldható, amelynek rendje csupán két különböző prímszámmal osztható. Ez úgy is mondható, hogy ha a $G=AB$ faktorizációban A p-csoport, B q-csoport (p, q különböző prímszámok), akkor G feloldható. Ennek fontos és úttörő jelentőségű analogonja SZÉPnek következő tétele: Ha a $G=AB$ tágabb értelmű faktorizációban A, B Abel-csoportok, akkor G nem egyszerű, s ha emellett még $((A),(B))=1$ is teljesül (tehát „szűkebb értelmű" faktorizációról van szó), akkor G feloldható, sőt akkor is, ha A, B közül csak az egyik Abel-féle, a másik p-csoport. Továbbá ha a $G=AB$ tágabb értelmű faktorizációban a tényezőknek van centruma s az egyik tényező p-csoport, akkor G nem egyszerű.

E tételek közül főleg a feloldható csoportokra vonatkozó esetek jelentősek, azokat többen általánosították. Így pl. ITÔ SZÉP eredményeinek felhasználásával nyerte, hogy ha egy $G=AB$ tágabb értelmű faktorizációban a tényezők egyike Abel-féle, másika nilpotens, akkor G feloldható. Hasonlót nyert GRUENBERG arra az esetre, amikor a tényezők egyike p-csoport, másika nilpotens. Egyes speciális esetekben ITÔ és HUPPERT hasonló eredményt nyertek nem nilpotens (feloldható) A, B tényezőkre vonatkozóan. Például ITÔ szerint ha a $G=AB$ tágabb értelmű faktorizációban a tényezők diedercsoportok, akkor G feloldható. Bizonyítatlan sejtés, hogy ehhez elegendő, ha a tényezők nilpotensek. WIELANDT a $G=A_1 \ldots A_n$ többtényezős tágabb értelmű faktorizációról kimutatta, hogy ha ebben a tényezők páronként felcserélhető nilpotens csoportok és bármely kettőnek szorzata feloldható, akkor G is feloldható.

SZÉP egy további vizsgálatában bebizonyítja, hogy ha a $G=AB$ faktorizációban $((A),(B))=1$ és A, B maximális részcsoportok, egyik sem prímszámrendű, akkor G nem egyszerű. Hasonló eredményt nyer még a $G=AB$ tágabb értelmű faktorizációról is, ha A Abel-féle, B-nek van centruma és $(A) \geqq (B)$.

Végül SZÉPnek a $G=AB$ faktorizációról nyert tételei között igen nevezetes, hogy a G centrumelemeit ab ($a \in A$, $b \in B$) alakban írva, az ezekben szereplő összes a, b tényezők Abel-csoportot generálnak. Ebből folyik az érdekes korollárium, hogy ha G centruma Z és létezik olyan $G=AB$ faktorizáció, amelyben A, B centrummentesek, akkor (Z) négyzete kisebb mint (G).

A csoport faktorizációinak elméletébe tartozik még a REMAK-féle felbontásnak következő általánosítása. SZÉP egy $G=N_1 \ldots N_n$ tágabb értelmű faktorizációt G normális felbontásának nevez, ha mindegyik N_i normálosztó, egyik sem törölhető, s egyik sem bontható fel két valódi normálosztójának szorzatára. SZÉP és referens a normális felbontásokról bebizonyítanak egy tételt, amely felhasználja a KRULL—SCHMIDT-féle tételt, s ennek általánosítását nyújtja.

Szintén a csoport faktorizációinak problémakörébe tartozik, hogy G. ZAPPA még SZÉP előtt megoldotta a csoport faktorizációjának úgynevezett inverz problémáját, amelyről közelebbit az itt következőkben mondok.

c) Egyéb vizsgálatok

Legyen G, Γ két adott csoport. Tudvalevően a SCHREIER által megoldott bővítési probléma azoknak a $\mathfrak{G}$ csoportoknak meghatározásáról szól, amelyeknek alkalmas Γ^* részcsoportjára a

$$\mathfrak{G}/\Gamma^* \approx G, \qquad \Gamma^* \approx \Gamma$$

izomorfizmusok teljesülnek (persze kell, hogy Γ^* a $\mathfrak{G}$-nek normálosztója legyen). Ezzel analóg a ZAPPA által megoldott bővítési probléma, amely ugyanis a

$$\mathfrak{G} = G^*\Gamma^*, \; G^* \cap \Gamma^* = 1, \; G^* \approx G, \; \Gamma^* \approx \Gamma$$

feltételek teljesülését kívánja. Referens elvégezte a SCHREIER- és ZAPPA-féle csoportbővítések szintézisét a következő módon.

Jelöljék G, Γ elemeit latin illetve görög kisbetűk, speciálisan az egységelemet e illetve ε. Az (a, α) elempárok halmazában

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha \beta^\alpha, a^b \alpha^b \beta)$$

által definiálunk egy szorzást, ahol $b^\alpha, \beta^\alpha, a^b, \alpha^b$ kétváltozós függvények, alávetve a

$$b^\alpha, \beta^\alpha \in G, \; a^b, \alpha^b \in \Gamma, \; \varepsilon^\alpha = e, \; e^\alpha = \varepsilon$$

feltételeknek. Ezáltal egy $G \circ \Gamma$ (nem szükségképpen asszociatív) multiplikatív struktúra áll elő. Az ilyen és hasonló jellegű konstrukciók lényegében véve HAMILTONtól erednek. Ezeket referens röviden ferdeszorzatoknak nevezi. Megállapította annak szükséges és elegendő feltételét, hogy a G, Γ csoportoknak fenti $G \circ \Gamma$ ferdeszorzata maga is csoport legyen, továbbá kimutatta, hogy a

$$b^\alpha = b, \; \beta^\alpha = e \quad \text{illetve} \quad \beta^\alpha = e, \; a^b = \varepsilon$$

speciális eset éppen a G, Γ csoportokhoz tartozó SCHREIER-féle illetve ZAPPA-féle bővítéseket szolgáltatja. Ezekben az esetekben tehát a szorzás szabálya így szól:

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b \alpha^b \beta) \quad \text{illetve} \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha, \alpha^b \beta).$$

Az utóbbi bizonyos formális előnnyel jár a csoport faktorizációinak vizsgálatában, amit referens felhasznált a fenti SZÉP-féle tételek egy részének levezetésére, miközben kevés általánosítás is előállt.

KOCHENDÖRFFER kimutatta, hogy bizonyos további speciális esetek is visszavezethetők a mondott két esetre.

FUCHS elvégezte a $G \circ \Gamma$ ferdeszorzatnak operátorcsoportokra való általánosítását.

A. STÖHR és referens megvizsgálták az

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (a^{\beta} b, \alpha^{b} \beta)$$

analóg esetet. Kiderült, hogy ez a ZAPPA-féle bővítésnek az a speciális esete, amelyet SZÉP automorf összetételűnek nevezett (l. fent).

Referens a SCHREIER-féle csoportbővítést általánosította arra az esetre, amikor G egységelemes félcsoport. Ez az általánosítás nem jár újabb bonyodalommal.

STEINFELD és referens közös dolgozatukban meghatározták a kölcsönös SCHREIER-féle bővítéseket, azaz azokat a $\mathfrak{G}$ csoportokat, amelyekre

$$\mathfrak{G}/\Gamma^* \approx G, \quad \mathfrak{G}/G^* \approx \Gamma, \quad G^* \approx G, \quad \Gamma^* \approx \Gamma.$$

(Ebből a $G^* \cap \Gamma^* = 1$ eset triviális, mert akkor $\mathfrak{G}$ a G, Γ csoportok direkt szorzata.)

Referens a csoport holomorfjának és a karakterisztikus részcsoportnak fogalmát átültette a gyűrűelméletbe. Ezt követően SZENDREI egységes definíciót adott a holomorf fogalmára, amely csoportokra és gyűrűkre, sőt egyéb struktúrákra is vonatkozik.

SZÉP és referens egy megjelenés előtt álló dolgozatukban általánosították a ZAPPA-féle bővítést, amely általánosítás abban áll, hogy fenti $\mathfrak{G} = G^* \Gamma^*$ tágabb értelmű faktorizáció is lehet. Ebből azt az esetet, amikor $G^* \cap \Gamma^*$ $\mathfrak{G}$-nek normálosztója, már korábban G. CASADIO elintézte.

A SCHREIER-féle csoportbővítés keretében referens meghatározta az elsőfokban nemkommutatív csoportokat, így nevezve azokat a nemkommutatív csoportokat, amelyeknek minden valódi részcsoportja kommutatív. Ezek p-csoportok vagy p-csoportnak q-csoporttal való széteső SCHREIER-féle bővítései. Már MILLER és MORENO is vizsgálták ezeket, majd O. J. SCHMIDT általánosabban az első fokban nem-nilpotens csoportokat, de a nevezett két típus közül az utóbbi, érdekesebb eset nem volt teljesen kivizsgálva. Ezek a véges testek segítségével nyernek egyszerű leírást. (Elsőfokban nemkommutatív végtelen csoportok létezéséről mindmáig mitsem tudunk.)

Egyszerű alkalmazásként referens megállapította, hogy bizonyos rendszámok esetén egy csoport Sylow-csoportjainak kommutativitásából hasonló az adott csoportra is következik, s megadta azokat a rendszámokat, amelyekhez csak kommutatív csoport tartozik. E tételek SZÉP korábbi tételeinek általánosításai. SZELE megállapította, hogy egy rendszámhoz akkor és csak akkor tartozik csupán egy csoport (ez ciklikus), ha $(n, \varphi(n)) = 1$.

Referens vizsgálta a másodfokban nemkommutatív egyszerű csoportokat s azt nyerte, hogy páros rendszám esetén csak az ikozaédercsoport lehetséges. („Másodfokban nemkommutatív" azt jelenti, hogy a maximális részcsoportok között előfordul nemkommutatív, de ezek maximális részcsoportjai kommutatívok.) E tétel alapján ITÔ bizonyos elégséges feltételt adott a feloldható csoportok számára, amelyet ITÔ és SZÉP megjelenés előtt álló közös dolgozatukban általánosítottak.

I. A. GOLFAND és referens egymástól függetlenül meghatározták az elsőfokban nem-nilpotens csoportokat. Utóbbinak eredménye valamivel teljesebb, erről szóló dolgozata nyomás előtt áll.

Egy G csoportot n-edfokban nemkommutatívnak nevezünk, ha minden $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n$ részcsoport-láncban G_n kommutatív, de G_{n-1} nem mindegyikben kommutatív. SZÉLPÁL bebizonyította, hogy e csoportok rendjének minimuma $3 \cdot 2^n$.

FUCHS egy igen jelentős dolgozatában mintegy a SCHREIER-féle csoportbővítés analógiájára célul tűzi ki (véges vagy végtelen) struktúrák szubdirekt összegeinek vagy szorzatainak az adott struktúrák („komponensek") belső tulajdonságai által való leírását, amely explicitebb eljárást nyújt a szubdirekt összegek meghatározására, mint ezeknek Birkhoff-féle jellemzése. Eljárása csoportokon kívül gyűrűkre (algebrákra) és BOOLE-féle algebrákra is alkalmas. Többek között azt nyeri, hogy ha vesszük két adott A, B csoportnak egy-egy A_0, B_0 normális részcsoportját, úgy hogy $A/A_0 \approx B/B_0$, s mindjárt veszünk még a faktorcsoportok között egy megfelelő izomorfizmust, végül képezzük az összes olyan (a, b) párokat $(a \in A, b \in B)$, amelyekben a, b összetartozó osztályokba tartoznak, akkor e párok az A, B csoportoknak egyik szubdirekt szorzatát alkotják s fordítva, ezen az úton mindegyik szubdirekt szorzat előáll. FUCHS e vizsgálatait G. PICKERT kvázicsoportokra általánosította.

Referens kimutatta, hogy ha $a_1, \ldots, a_n$ egy $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ p-csoportnak minimális generátorrendszere, akkor a $G = \{a_1, \ldots, a_n, a_1^p, \ldots, a_n^p\}$ egyenlet jobboldalából az $a_1, \ldots, a_n$ elemek egy-egy részének törlésével 2^n számú különböző részcsoport áll elő. Megfelelő tétel érvényes a nilpotens csoportokra. E tételeket SZÉP és referens közös dolgozatban, majd ITÔ és LYNDON nagy mértékben élesítették, kiterjeszkedve a magasabbrendű kommutátorok vizsgálatára is.

SZELE a következő nevezetes tételt nyerte. Egy $G (\neq 1)$ csoportot perfektnek nevez, ha kommutátorcsoportja is G. Kimutatja, hogy ha egy véges vagy végtelen csoportnak van perfekt részcsoportja, akkor ezek között van normális részcsoport is (amely persze esetleg maga G).

ITÔ és SZÉP egyik közös tétele kimondja, hogy ha egy véges vagy végtelen G csoport H részcsoportjának összes konjugáltjai $H, H', \ldots$, akkor a $HH' \ldots$ szorzat G-nek (normális) részcsoportja.

FUCHS igen érdekes vizsgálatokat végzett a G (véges vagy végtelen) csoportnak H, K részcsoportok szerint való $G = HK + HaK + \cdots$ DEDEKIND-féle osztályozásáról. Többek között megállapítja, hogy az osztályok (a komplexusszorzás szerint) mikor alkotnak csoportot.

FUCHS az ABEL-csoportok alaptételére rövid bizonyítást nyert egy minimális generátorrendszer segítségével, amely bizonyítás a minimális generátorrendszerrel bíró Abel-féle torziócsoportokra is alkalmas.

SZELE meghatározta bármely G Abel-csoport mindama részcsoportjait, amelyek G-ben direkt összeadandók. Eredményeinek egy részét korábban PRÜFER és SHODA is nyerték.

Az Abel-csoportokat illetően referens bizonyos újszerű vizsgálatokat végzett, amelyekre HAJÓS tétele indította. Jelöljön $n(>0)$ egész számot s legyen N az $1, \ldots, n$ számok halmaza. Tekintsük egy G Abel-csoport bármilyen $A_1, \ldots, A_n$ részcsoportjait. Bármely $M(\subseteq N)$ halmaz esetén jelölje A_M az $A_i (i \in M)$ részcsoportok szorzatát. Az

$$(A_M) \qquad (M \subseteq N)$$

rendszámok rendszere ($n \geqq 3$ esetén) igen nehezen áttekinthető. Avégből, hogy e rendszerről felvilágosításokat nyerjen, referens bevezette a

$$\varrho(z) = \varrho(z; A_1, \ldots, A_n) = \sum_{M \subseteq N} (-1)^{(M)} (A_M)^{-z}$$

függvényt z komplex változóval. Ennek meglehetősen összetett vizsgálata, amelyben segítséget nyújt a MÖBIUS-féle függvénynek DELSARTE által újabban felfedezett általánosítása, többek között a

$$0 \leqq \varrho(z) < 1 \qquad (z = 1, 2, \ldots)$$

egyenlőtlenségekre vezetett. Ebben feltűnő, hogy ha z bármely, az egész számoktól különböző, 1-nél nagyobb pozitív szám, akkor $\varrho(z)$ sem alulról, sem felülről nem korlátos (amennyiben az összes G és ennek bármilyen $A_1, \ldots, A_n$ részcsoportjai versenyeznek). Bizonyos esetekben $\varrho(z)$ az $A_1, A_2, \ldots$ végtelen rendszerekre is definiálható, s lehetséges egyéb struktúrákra való kiterjesztés is. A megfelelő $\zeta(z) = \varrho(z)^{-1}$ függvények a RIEMANN-féle zeta-függvénynek (a DEDEKIND-féléknek is) általánosításai, amiért referens az itt nevezett $\zeta(z)$ függvényeket is zeta-függvényeknek nevezi. HAJÓS tétele ekvivalens azzal, hogy bizonyos speciális zeta-függvényeknek a $z = 1$ helyen való pólusos voltából következik, hogy ugyanazoknak a $z = 2, 3, \ldots$ helyeken is pólusa van. Figyelemre méltó, hogy akárcsak HAJÓS tétele, a fenti eredmény is független az Abel-csoportok alaptételétől.

Referens meghatározta azokat a csoportokat, amelyeknek minden részcsoportja direkt felbonthatatlan.

Referens rövidebbé tette az A_n ($n \geqq 5$) n-edfokú alternáló csoport egyszerűségének BAUER MIHÁLYtól származó bizonyítását.

POLLÁK ugyanerre a tételre lényegesen új bizonyítást adott, amely n-ről $n+1$-re való indukcióval történik.

SZÉP az A_n-ről ($n \geqq 5$) kimutatta, hogy ha n nem prímszám, akkor A_n-nek nincs prímszám indexű részcsoportja.

SZELE KALMÁR LÁSZLÓnak egy régebbi dolgozatához kapcsolódva nála egyszerűbben bebizonyítja, hogy az A_n ($n \geqq 5$) csoportnak nincs prímszám-indexű normálosztója. (KALMÁR jegyezte meg, hogy a Ruffini—Abel-féle tételt ezen az úton is be lehet bizonyítani.)

Végül beszámolok még a következő axiomatikai vizsgálatokról, amelyek több-kevesebb összefüggésben állnak a csoportelmélettel.

Az egész algebra szempontjából elvi fontosságú SZÁSZnak egy vizsgálata, amelyben kimutatja, hogy az asszociativitásaxiómák általában függetlenek. Pontosan a következő tételről van szó. Minden legalább négy elemű S halmazban definiálható olyan szorzás, hogy az

$$(ab)c = a(bc) \qquad (a, b, c \in S)$$

egyenletek egyik tetszésszerintinek a kivételével teljesülnek. Bizonyos módosulással hasonló megállapítást tesz a kommutatív szorzással kapcsolatban.

FARAGÓ megvizsgálta, hogy mi a hatása annak, ha a szokásos csoportaxiómákban az $(ab)c = a(bc)$ asszociativitásfeltételt $(ab)c = b(ca)$-ra vagy $a(bc) = a(cb)$-re stb. változtatjuk.

MAGYAR KUTATÓK EREDMÉNYEI A VÉGTELEN CSOPORTOK ELMÉLETÉBEN

FUCHS LÁSZLÓ a matematikai tudományok doktora

Előadta az 1955. május 26-án tartott nyilvános osztályülésen

Magyar kutatók számottevő eredményekkel gazdagították a végtelen csoportok elméletét; 60-nál is több azon dolgozatok száma, amelyekben kutatóink a végtelen csoportok különféle osztályainak szerkezetével, vagy pedig kimondottan végtelen csoportokra vonatkozó problémákkal foglalkoztak. Az elért eredmények szinte kivétel nélkül a felszabadulás utáni időszakra esnek. E kutatásokban vezető szerepet vitt a SZELE által alapított debreceni algebrai iskola, de a debrecenieken kívül több más kutató is ért el érdemleges eredményeket. A vizsgálatok a végtelen csoportok elméletének sok ágában folytak, de mind a dolgozatok számát, mind pedig az elért eredmények legjavát tekintve, a végtelen Abel-csoportok elméletét kell a fő kutatási területnek tekintenünk. Eredményeinket külföldön is nagyra értékelik; e tény alátámasztására elegendő A. G. KUROS szovjet akadémikusnak könyve magyar kiadásához írt előszavából idézni: „A magyar algebristák vizsgálatai számos kérdésben, különösen pedig az Abel-csoportok elméletében, nagy lendületet vettek az utóbbi évek során, és tanúi vagyunk annak, miként alakul ki Magyarországon az algebrai kutatásnak egy új nagy központja." Úgy vélem, nem véletlen, hogy KUROS éppen az Abel-csoportok elméletében végzett kutatásainkat emeli ki. Valóban, az elmúlt évtizedben a végtelen Abel-csoportok elméletében a szovjet kutatók mellett elsősorban a magyar kutatók eredményei jelentenek komoly előrehaladást e csoportok szerkezetének feltárása felé.

Az alábbiakban rövid áttekintést igyekszünk adni azokról az eredményekről, amelyeket magyar kutatók értek el a végtelen csoportok elméletének különféle területein. Ismertetésünkben természetesen nem törekedhetünk teljességre, hiszen e keretek közt az eredmények részletes ismertetése keresztülvihetetlen. — Viszont igyekeztünk számot adni az eredmények eddigi külföldi visszhangjáról.[1]

[1] Ennek során nem teszünk külön említést azokról a cikkekről, amelyeket KUROS idéz könyvében.

I. Az Abel-csoportok szerkezetének vizsgálatában elért eredmények[2]

A magyar matematikusoknak a végtelen Abel-csoportok elméletében végzett kutatásai két főirányban folytak. Az egyik irányt az Abel-csoportok általános struktúrájára vonatkozó kutatások jelentik, a másik irányba pedig azok a vizsgálatok tartoznak, amelyeknek célja bizonyos speciális követelményeket kielégítő Abel-csoportok teljes leírása.

Az első témakörbe eső eredmények közül elsőnek SZELE TIBORnak ciklikus vagy kváziciklikus direkt összeadandó exisztenciájára vonatkozó tételét említjük meg. E szerint minden nem-torziómentes[3] G Abel-csoport feltétlenül tartalmaz vagy egy ciklikus vagy egy kváziciklikus direkt összeadandót, azaz ily G csoport felbontható a

$$G = A + B \sim C(p^k) + B \qquad (1 \leqq k \leqq \infty)$$

direkt összegre, ahol $C(p^k)$ jelenti véges k esetén a p^k-adrendű ciklikus csoportot, míg $C(p^\infty)$ a Prüfer-féle vagy kváziciklikus csoportot jelöli; ez tudvalevőleg izomorf a p-, p^2-, ...-edik komplex egységgyökök multiplikatív csoportjával. (p itt s a továbbiakban prímszámot jelöl.) SZELE e tételének következő általánosítását is bebizonyította: Legyen A a G csoportnak oly alcsoportja, mely ugyanannyiadrendű, mondjuk r-edrendű ciklikus csoportok direkt öszszege; *annak szükséges és elégséges feltétele, hogy A a G-nek direkt összeadandója legyen, az, hogy*[4] $A \cap rG = 0$ *teljesüljön.* E tételnek következménye igen sok eddig ismert eredmény, köztük KUROSnak a minimum-feltételű[5] Abel-csoportokra vonatkozó struktúra-tétele, KULIKOVnak az a tétele, hogy a torzió- és a vegyes csoportok közt csak a $C(p^k)$ $(1 \leqq k \leqq \infty)$ csoportok direkt felbonthatatlanok, továbbá FOMIN ama tétele, mely szerint ha egy vegyes Abel-csoport torzióalcsoportjában[6] az elemek rendje korlátos, akkor a torzióalcsoport direkt összeadandó stb.

[2] Az Abel-csoportokat szokás szerint additíve írjuk. Ebben s a következő fejezetben csak Abel-csoportokról lesz szó, ezért ha röviden „csoportot" mondunk, e két fejezetben ezen is mindig Abel-csoportot kell érteni.

[3] Egy csoportot *torziócsoport*nak nevezünk, ha minden eleme véges rendű, *p-csoport*nak, ha minden elemének rendje egy s ugyanazon p prímszám valamely hatványa. *Torziómentes* egy csoport, ha a 0 elemén kívül nem tartalmaz más végesrendű elemet; *vegyes* a csoport, ha sem nem torziócsoport, sem nem torziómentes.

[4] rG-vel jelöljük G-nek azon alcsoportját, mely az rg $(g \in G)$ alakú elemekből áll (r racionális egész).

[5] G alcsoportjairól akkor mondjuk, hogy a *minimum-feltétel*nek tesznek eleget, ha nem létezik az alcsoportoknak végtelen hosszú, szigorúan monoton csökkenő lánca. Analóg definíció érvényes a *maximum-feltétel*re.

[6] Egy vegyes Abel-csoport végesrendű elemei alcsoportot alkotnak, ez a csoport *torzióalcsoport*ja.

A p-csoportok elméletében ismert eredmény, hogy végtelen magasságú[7] elemeket nem tartalmazó G Abel-féle p-csoport minden eleme befoglalható a csoportnak egy véges direkt összeadandójába. E tétel általánosításaként ERDÉLYI MÁRIA bebizonyította, hogy tetszőleges G Abel-féle p-csoport valamely a eleme akkor és csak akkor van benne a csoport egy véges direkt összeadandójában, ha az a elem által generált $\{a\}$ ciklikus csoport nem tartalmaz végtelen magasságú elemet.

A végtelen Abel-csoportok elméletében fontos probléma annak megállapítása, hogy egy csoport mikor bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére. Mint ismeretes, ez az eset forog fenn a véges, illetve általánosabban a végesen generált csoportok esetén. R. RADOnak a végesen generált Abel-csoportok alaptételére adott bizonyításából kiindulva, SZELE TIBOR általános kritériumot adott a ciklusösszegre való bonthatóságra vonatkozóan. Bebizonyította, hogy G ciklusösszegre bontható, ha tartalmaz oly generátorrendszert, melynek minden $a_1, \ldots, a_k$ véges részrendszerére vonatkozóan igaz a következő: G nem tartalmaz oly $b_1, \ldots, b_k$ részhalmazt, melyre[8] $\{a_1, \ldots, a_k\} = \{b_1, \ldots, b_k\}$ és $\min\limits_i O(b_i) < \min\limits_i O(a_i)$. Egy PONTRJAGINtól származó elégséges feltételre adott SZELE új bizonyítást a tétel következő átfogalmazásában: Egy megszámlálható torziómentes G Abel-csoport akkor és csakis akkor ciklusösszeg, ha minden véges r-re teljesül az, hogy G-nek r-edrangú[9] alcsoportjai eleget tesznek a maximum-feltételnek.

A p-csoportok ciklusösszegre való bonthatóságára vonatkozóan egészen alapvető eredmény H. PRÜFERnek az a tétele, hogy egy megszámlálható p-csoport akkor és csakis akkor bontható fel ciklikus csoportok direkt öszszegére, ha nem tartalmaz végtelen magasságú elemet. Meglepő, hogy ez a tétel érvényét veszti megszámlálhatónál nagyobb számosságú csoportok esetén. Erre már PRÜFER maga is rámutatott egy kontinuum számosságú csoport példáján, újabban pedig SZELE adott rá igen egyszerű bizonyítást, felhasználva KUROS példáját. E példa a következő: tekintsük a $p, p^2, \ldots$ rendű ciklikus csoportok komplett direkt összegét, vagyis azon $\langle b_1, b_2, \ldots \rangle$ alakú „végtelen vektorok" csoportját, ahol b_n p^n-edrendű ciklikus csoport eleme. E csoport végesrendű elemei csoportot alkotnak, mely kontinuum számosságú p-csoport

[7] A G p-csoport a elemét *végtelen magasságú* elemnek mondjuk, ha a $p^k x = a$ egyenlet tetszőleges nemnegatív egész k-ra megoldható G-ben. Az a elem *magassága* h, ha $k = h$-ra az előbbi egyenlet megoldható, de $k = h + 1$-re már nem.

[8] $O(x)$ jelöli az x elem rendjét, $\{x_1, x_2, \ldots\}$ pedig a zárójelbe foglalt elemek által generált alcsoportot.

[9] A torziómentes G csoport $a_1, \ldots, a_k$ elemeit *függetlenek*nek nevezzük, ha az $n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k = 0$ (n_i racionális egészek) egyenletből $n_1 = \cdots = n_k = 0$ következik. A G csoport független elemeinek maximális számát G *rang*jának mondjuk. A függetlenség fogalma értelmezhető tetszőleges G Abel-csoportban, amennyiben a felírt egyenletből $n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k = 0$ következését követeljük meg, vagyis $n_i = 0$, ha $O(a_i)$ végtelen, és $O(a_i) \mid n_i$, ha $O(a_i)$ véges.

s nem bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére. SZELE rámutatott, hogy e csoportnak van oly $\aleph_1$ számosságú alcsoportja is, mely ugyanazzal a tulajdonsággal bír. (A konstrukcióból világos, hogy végtelen magasságú eleme nincs a szóban forgó csoportnak.)

PRÜFER előbb idézett tételét KULIKOV általánosította, szükséges és elégséges feltételt adva meg egy tetszőleges számosságú p-csoport ciklusösszegre való bonthatóságára. E tétel így szól: a G Abel-féle p-csoport akkor és csakis akkor bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére, ha G egyesítése oly $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots$ növekvő alcsoportláncnak, ahol G_n mindegyikében az elemek magassága fix véges korlát alatt marad (mely korlát n-től függhet). KULIKOV ezen alapvető eredményének lényegét ragadva meg, KERTÉSZ ANDOR továbbfejlesztette e kritériumot, számos érdekes további kutatásnak nyitva utat. KERTÉSZ legmesszebbmenő eredménye e téren a következő. Nevezzük a G p-csoport B alcsoportjának P maximális független rendszerét B *tartórendszerének*, ha P-nek egyetlen eleme sem cserélhető ki nagyobb magasságú B-beli elemmel a függetlenség megsértése nélkül. Mármost *egy G p-csoport akkor és csakis akkor bontható fel ciklikus és kváziciklikus csoportok direkt összegére, ha* 1. *G-nek minden végtelen magasságú eleme belefoglalható G-nek egy $C(p^\infty)$ típusú alcsoportjába és* 2. *G tartalmaz oly B alcsoportot, melynek van tartórendszere s a G/B faktorcsoport ciklusösszeg.* E tétel speciális esetként magában foglalja PRÜFER s KULIKOV említett tételein kívül DIEUDONNÉnak egy újabb eredményét is, s ezenkívül több érdekes korolláriumot.

KERTÉSZ említett tételének egyik korolláriumából kiindulva, sikerült FUCHS LÁSZLÓnak két, egymáshoz duális, oly szükséges és elégséges feltételt megadni, melyek egy tetszőleges Abel-csoport ciklusösszegre való bonthatóságára vonatkoznak. Ezek az első ilyen irányú eredmények az irodalomban, amelyek mindennemű megszorítás nélkül (pl. megszámlálhatóság, torziómentesség stb.) érvényesek s ezek közül az egyik feltételnek az az előnye is megvan, hogy szinte valamennyi eddig ismert szükséges és elégséges, ill. elégséges feltétel e tétel korolláriumaként adódik. A tételek megfogalmazásához szükség van egy új fogalomra, amelynek segítségével bizonyos esetekben összehasonlítást tudunk tenni két végtelen rendű elem rendje közt. Legyen S a G Abel-csoport tetszésszerinti független rendszere, továbbá a és b végtelen rendű elemek G-ben. Akkor mondjuk, hogy *a relatíve nagyobb rendű b-nél* (S-re vonatkozóan), ha vagy $a \in S$, vagy $b \in S$, és emellett fennáll

$$ra = sb + t_1c_1 + \cdots + t_kc_k \qquad (c_i \in S;\ a, b \neq c_i),$$

ahol

$$|r| > |s| > 0$$

(r, s, t_i racionális egészek). Mármost a két tétel így szól: *G akkor és csakis akkor bontható fel ciklikus csoportok direkt összegére, ha* 1. *tartalmaz oly B maximális független rendszert, melynek egyetlen eleme sem cserélhető ki G-nek egy nagyobb vagy relatíve nagyobb rendű elemével (B-re vonatkozóan) a füg-*

getlenség megsértése nélkül; *vagy* 2. *tartalmaz oly B minimális generátorrendszert, melynek egyetlen eleme sem cserélhető ki G-nek egy kisebb, vagy relatíve kisebb rendű elemével úgy, hogy újból generátorrendszert kapjunk* (itt S-nek a tekintett elemet mint egy-elemű független rendszert kell tekinteni.)

Azon p-csoportok szerkezetére vonatkozó vizsgálatokban, melyek nem bonthatók ciklikus csoportok direkt összegére, alapvető szerepet játszik a KULIKOV által bevezetett *bázisalcsoport* fogalma. A tetszőleges számosságú p-csoportok szerkezetének vizsgálata ma szinte elképzelhetetlen e fogalom nélkül. SZELE a bázisalcsoport fogalmára egy új, a réginél természetesebbnek tűnő definíciót adott: A G p-csoport bázisalcsoportjának nevezi G-nek oly B alcsoportját, mely ciklikus csoportok direkt összege: $B = B_1 + B_2 + \cdots$ (B_n p^n-edrendű ciklikus csoportok direkt összege), de úgy, hogy $B_1 + \cdots + B_n$ a G-nek oly maximális direkt összeadandója, mely legfeljebb p^n-edrendű elemeket tartalmaz. Ez a definíció ekvivalens a Kulikov-félével, amely B-től a következő tulajdonságokat kívánja meg: 1. B ciklusösszeg; 2. B a G-nek szerváns alcsoportja abban az értelemben, hogy ha a $p^n x = a$ $(a \in B)$ egyenletet egy G-beli x elem kielégíti, akkor van ezen egyenletnek oly megoldása is, mely B-hez tartozik; 3. a G/B faktorcsoport kváziciklikus csoportok direkt összege. — SZELÉnek a bázisalcsoporttal foglalkozó dolgozatában a főeredmény az, hogy *minden G p-csoport homomorf módon leképezhető az ő B bázisalcsoportjára.* E tételnek már eddig is számos fontos következményét ismerjük, pl. azt, hogy egy G p-csoportnak és bázisalcsoportjának ugyanazok a ciklusösszegre bontható csoportok a homomorf képei; vagy azt a tételt, hogy ha H homomorf képe a G p-csoportnak, akkor H-nak bázisalcsoportja homomorf képe G bázisalcsoportjának.

A megszámlálható p-csoportok struktúráját teljesen feltárják PRÜFER, ULM és ZIPPIN tételei. Ha G tetszőleges p-csoport, akkor ebben a végtelen magasságú elemek egy G^1 alcsoportot alkotnak; G^1-nek azon elemei, melyek magában G^1-ben is végtelen magasságúak, G^1-nek egy G^2 alcsoportját alkotják stb. Általában, G-ből kiindulva képezhetjük a G^α alcsoportsorozatot a következőképpen. Legyen $G^0 = G$; ha α oly rendszám, amelyre $\alpha - 1$ létezik, akkor G^α álljon $G^{\alpha-1}$ azon elemeiből, melyek magában $G^{\alpha-1}$-ben végtelen magasságúak; ha pedig α limesz rendszám, úgy definiáljuk G^α-t mint az összes $G^\beta (\beta < \alpha)$ alcsoportok metszetét. El kell jutni oly legkisebb τ rendszámig, mely nem haladhatja meg G számosságát s melyre $G^{\tau+1} = G^\tau$ teljesül. Ezen G^τ alcsoportról közvetlenül belátható, hogy kváziciklikus csoportok direkt összege s ezenfelül G-nek direkt összeadandója. Így a továbbiakban elegendő a $G^\tau = 0$ esetre szorítkozni, mikor is G-t *redukált* csoportnak nevezzük, s τ-t a G *típus*ának mondjuk. A $G^\alpha / G^{\alpha+1} = G_\alpha$ ún. *Ulm-faktorok* a G csoportnak egyértelműen meghatározott

$$G_0, G_1, \ldots, G_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \tau)$$

Ulm-sorozatát definiálják. Ezek a G_α csoportok nem tartalmaznak végtelen magasságú elemeket s bennük az elemek rendje nem lehet korlátos, kivéve az Ulm-sorozat esetleg létező utolsó tagját, $G_{\tau-1}$-et. — Mármost ha G megszámlálható, akkor típusa is megszámlálható rendszám és valamennyi G_α is megszámlálható, tehát PRÜFER idézett tétele értelmében G-nek minden Ulm-faktora ciklusösszeg. ULM bebizonyította, hogy két megszámlálható redukált p-csoport izomorf, ha Ulm-sorozatuk azonos; másszóval a megszámlálható redukált p-csoportoknál az Ulm-sorozat teljes invariáns-rendszert alkot. Végül ZIPPIN azt mutatta meg, hogy az Ulm-sorozat lényegileg tetszésszerinti módon írható elő (természetesen a τ-ra és G_α-ra vonatkozó említett feltételeket ki kell elégíteni).

Sokkal nehezebb a helyzet, ha eltekintünk a csoport megszámlálhatóságától. Már említettük, hogy ekkor a végtelen magasságú elemek hiánya nem biztosítja a ciklusösszegre való bonthatóságot, s így ebben az esetben a G_α-k nem lesznek szükségképpen ciklusösszegek. De be lehet bizonyítani, hogy *a G_α-k előállíthatók ciklikus csoportok ún. interdirekt összegeként*; e felbontásnál még egy további, könnyen kielégíthető feltétel mellett az is biztosítható, hogy *a direkt összeadandók rendjei egyértelműen meg legyenek határozva.* Tetszőleges számosság esetén az Ulm-tétel megfelelője sem áll, sőt az is előfordulhat, hogy két csoport ugyanazon Ulm-sorozattal különböző számosságú! A Zippin-tétel megfelelőjét újabban KULIKOVnak sikerült megtalálni. Tőle függetlenül, egy évvel később FUCHS is megkapta e tételt s bizonyítása KULIKOVénál sokkalta rövidebb s egyszerűbb.

A torziómentes Abel-csoportok elméletében az ún. végesrangú csoportok szerkezetét teljesen ismerjük KUROS, MALCEV és DERRY munkái alapján. Az 1-rangúak a racionális számok additív csoportjának alcsoportjaival izomorfak; ezekre adnak igen explicit jellemzést RÉDEI LÁSZLÓ és SZELE TIBOR. A másodrangú csoportokról először PONTRJAGIN mutatta meg, hogy ezek nem mindig bonthatók fel 1-rangúak direkt összegére. BOGNÁR MÁTYÁS igen egyszerű példát talált direkt felbonthatatlan másodrangú torziómentes csoportra. Példája a következő: tekintsük a komplex számok additív csoportjában az

$$\frac{1}{3^n}, \ \frac{i}{5^n} \ (n=1,2,\ldots) \ \text{és} \ \frac{1+i}{2}$$

elemek által generált alcsoportot. Erről könnyű kimutatni, hogy direkt felbonthatatlan. Hasonló elv alapján konstruálható kontinuumnál nem nagyobb, egyébként tetszőleges rangú torziómentes Abel-csoport. Érdekes, hogy mindezideig nem ismeretes kontinuumnál nagyobb számosságú direkt felbonthatatlan torziómentes csoport; SZELE sejtése szerint ilyen nincs is.

R. BAERnek vannak igen mélyreható vizsgálatai a torziómentes Abel-csoportok struktúrájára vonatkozóan. A teljes redukálhatóságon, vagyis 1-rangúak direkt összegére való bonthatóságon kívül BAER részletesen vizsgálta a részleges redukálhatóságot is, amelyen a G torziómentes Abel-csoport oly

$G = \sum_{\nu} G_\nu$ direkt felbontásának exisztenciáját érti, ahol minden egyes ν-re a G_ν-ben levő nemzérus elemek azonos típusúak. Itt egy a elem típusán azon p^k hatványok összességét értjük, amelyekre a $p^k x = a$ egyenlet a csoportban megoldható, s két elemet azonos típusúnak tekintünk, ha a hozzájuk rendelt prímhatvány-halmazok legfeljebb végessok elemben térnek el egymástól. BAER számos kritériumot adott a részleges redukálhatóságra végesrangú csoportok esetén; ERDŐS JENŐ végesrangú csoportokról oly csoportokra terjesztette ki BAER egyes eredményeit, amelyekben az elemek típusaiból alkotott részben rendezett halmaz a maximum-feltételnek tesz eleget. ERDŐS J. további eredményekre is jutott.

Nagy jelentőségű elméletet állított fel SZELE TIBOR az Abel-csoportok elméletében; ez az elmélet analogonja a testek jólismert s immár klasszikusnak mondható Steinitz-féle elméletének, s jelentősége a nyert új eredményeken kívül abban áll, hogy számos, eddig egymástól látszólag távol álló eredményt s módszert hoz egymással szoros kapcsolatba. Egyismeretlenű „algebrai" egyenleten a G csoportban az $nx = a$ ($a \in G$, x a G ismeretlen eleme, n racionális egész) egyenletet érti s erre a definícióra építi a további fogalmakat, mint pl. az algebrai és transzcendens bővítés, az algebrailag zárt csoport fogalmát stb. STEINITZ mindkét alaptételének sikerült megtalálni a megfelelőit a csoportelméletben: 1) *tetszőleges G Abel-féle csoport minden H bővítése (azaz $G \subset H$) felbontható egy tiszta transzcendens, majd egy utána alkalmazott algebrai bővítésre;* 2) *tetszőleges G Abel-csoportnak van — izomorfizmustól eltekintve egyértelműen meghatározott — algebrailag zárt*[10] *algebrai bővítése.* A SZELE által bizonyított ezen, s további analóg tételek meglepőek azért, mert sok igen lényeges eltérés van a testek s a csoportok elmélete közt.

A Szele-féle elméletben algebrailag zárt az olyan csoport, melyben minden $nx = a$ algebrai egyenlet megoldható. GACSÁLYI SÁNDOR azt a kérdést vizsgálta, hogy mi a helyzet „algebrai" egyenletrendszer esetén. Arra az eredményre jutott, hogy *algebrailag zárt csoportban minden, $n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k = a (\in G)$ alakú egyenletekből álló egyenletrendszer is megoldható, hacsak a nyilvánvalóan szükséges kompatibilitási*[11] *feltételek teljesülnek.* GACSÁLYI eredményében meglepő az, hogy sem az egyenletek, sem az ismeretlenek számosságára vonatkozóan nem kell semminemű megszorítást tenni. Tételéből az az új eredmény is következik, hogy a ferdetestek feletti lineáris egyenletrendszerek a kompatibilitási feltételek teljesülése esetén mindig megoldhatók (e tényt PICKERT felvette a lineáris algebráról szóló enciklopédia-cikkébe).

[10] Az algebrailag zárt csoportok szerkezete igen egyszerű: ezek a racionális számok additív csoportjával vagy valamely kváziciklikus csoporttal izomorf csoportok direkt összegére bonthatók. — SZELE ezen eredményére igen sok hivatkozás történik az irodalomban.

[11] Egy rendszert *kompatibilis*nek mondunk, ha a baloldalak közti lineáris összefüggések a jobboldalakra is érvényesek.

A G csoport H alcsoportját *szervánsnak* nevezzük, ha az $nx=h$ $(h \in H)$ egyenletnek G-beli megoldhatóságából következik a megoldhatóság H-ban is, más szóval: H a „G-ben algebrailag zárt". GACSÁLYI kimutatta, hogy ha egy végessok ismeretlent tartalmazó egyenletrendszernek (a jobboldalon álló csoportelemek természetesen H-hoz tartoznak) van megoldása G-ben, akkor van megoldása a H szerváns alcsoportban is. Érdekes, hogy ez általában már nem igaz, ha végtelen sok ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert is megengedünk: azon A alcsoportok, amelyekre tetszésszerinti számosságú ismeretlent tartalmazó A-beli egyenletrendszernek G-ben való megoldhatóságából következik a megoldhatóság A-ban is, megegyeznek G direkt összeadandóival.

II. Egyéb vizsgálatok az Abel-csoportok elméletében

A végtelen Abel-csoportok struktúrájának a kérdése viszonylag csak igen kevés esetben tekinthető megoldott problémának, így a legfontosabb csoportosztályok közt a ciklusösszegre bontható s az algebrailag zárt csoportokon kívül csak a megszámlálható p-csoportok s a végesrangú torziómentes csoportok szerkezete ismert. Bár az Abel-csoportok szerkezetére vonatkozó vizsgálatok világviszonylatban is a csoportelméleti kutatások egyik fontos központi területe és egyre több eredményt érnek el a kutatók napjainkban is a struktúraelméletben, mégis azt kell mondanunk, hogy még igen távol vagyunk a struktúra-probléma teljes megoldásától. Különösen áll ez a vegyes csoportokra, ahol mind a mai napig szinte teljesen nélkülözzük a hatásos módszereket. Éppen ezért a kutatók újabban oly módon igyekeznek közelférkőzni az általános vegyes csoportok struktúrájához, hogy egyes speciális feltételeket kielégítő csoportok szerkezetét igyekeznek feltárni. Az ilyen irányú vizsgálatok nemcsak sok érdekes eredményre vezetnek, hanem az a hasznuk is megvan, hogy megoldásuk közben oly problémák merülnek fel és oly módszerek kovácsolódnak ki, amelyek közelebb visznek sokkal általánosabb csoportosztályok szerkezetének megismeréséhez is.

SZELE TIBOR és KERTÉSZ ANDOR, részben FUCHS LÁSZLÓval közösen, több speciális követelménynek eleget tevő Abel-csoport szerkezetét adták meg explicit módon. A vizsgált problémákat a következőképpen lehet röviden jellemezni. Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ a G csoportból valamely előírt módon származtatható két csoportosztály, pl. G összes alcsoportjainak, szerváns alcsoportjainak, direkt összeadandóinak vagy összes homomorf képeinek stb. halmaza. Izomorf csoportokat csak egyszer veszünk számításba. Az említett vizsgálatok mármost oly G Abel-csoportok szerkezetének felderítését célozzák, amelyekre $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ vagy $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. E vizsgálatokba külföldről is bekapcsolódtak (E. SĄSIADA). Legutóbbi eredményük azon csoportok szerkezetének megadása explicit módon, amelyekben minden alcsoport endomorf kép.

KERTÉSZ egyik munkájában a végtelen ciklikus csoportok direkt összegére bontható (más szóval a szabad Abel-féle) csoportok és az algebrailag zárt csoportok dualitásából kiindulva, bizonyos feltételeknek eleget tevő csoportokat vizsgál. A jelzett dualitásban a szabad s az algebrailag zárt csoportok, valamint az alcsoportok s a faktorcsoportok az egymásnak megfelelő fogalmak; ennek illusztrálására álljon itt a következő két tétel: minden Abel-csoport alcsoportja (ill. faktorcsoportja) egy alkalmas algebrailag zárt (ill. szabad) Abel-féle csoportnak; ha minden oly G Abel-csoportnak van H-val izomorf alcsoportja (ill. faktorcsoportja), amelynek az adott H csoport faktorcsoportja (ill. alcsoportja), akkor H szabad (ill. algebrailag zárt). KERTÉSZ a következő, önduális tételt is bebizonyítja: minden, a H csoporttal izomorf endomorf képpel bíró Abel-csoportnak, akkor és csakis akkor van H-val izomorf direkt összeadandója, ha H direkt összege egy algebrailag zárt és egy szabad csoportnak (az egyik direkt tag eltűnhetik).

SZÁSZ FERENC és SZÉLPÁL ISTVÁN a ciklikus, ill. a kváziciklikus csoportoknak adták egy-egy jellemzését. SZÁSZ FERENC bebizonyította, hogy egy multiplikatíve írt G csoport akkor és csakis akkor ciklikus, ha a $G^k (k=1,2,\ldots)$ csoportokon és az egységalcsoporton kívül nem tartalmaz más alcsoportot; itt G^k jelenti a G csoport elemeinek k-adik hatványai által generált alcsoportot. Megjegyzendő, hogy ezen eredmény G kommutativitásának előzetes feltétele nélkül is érvényes. SZÉLPÁL eredménye szerint a kommutatív csoportok közt a kváziciklikusokat az jellemzi, hogy oly végtelen csoportok, melyeknek minden valódi alcsoportja véges. Ez utóbbi munkára hivatkozás történik W. A. SCOTT egyik cikkében.

SZELE vizsgálta a ciklikus csoportok ún. *egyesített alcsoportú direkt összegét* s ezek szerkezetére vonatkozóan tett elég explicit jellegű megállapításokat.

Itt említjük meg az Abel-csoportok *endomorfizmusgyűrűjé*re[12] vonatkozó eredményeket is. E területen elsősorban SZELE TIBOR munkássága emelendő ki. Egyik dolgozatában azt mutatta meg, hogy egy csoport endomorfizmusgyűrűje akkor és csak akkor test, ha a csoport vagy p-edrendű ciklikus, vagy pedig az összes racionális számok additív csoportjával izomorf. Ezt az eredményt J. P. SERRE általánosította operátorcsoportokra. SZELE egy másik dolgozatában azt mutatta ki, hogy a nem-torziómentes csoportok közt egyedül a p-edrendű ciklikus és a kváziciklikus csoportoknak van nullosztómentes endomorfizmusgyűrűjük. Egy további, SZÉLPÁLlal közös dolgozata azon csoportokról szól, melyeknek minden endomorfizmusa a csoportot vagy önmagára vagy 0-ra képezi le; kiderül, hogy e csoportok éppen a p-edrendű ciklikus, a kváziciklikus és a racionális számok additív csoportjával izomorf csoportok. (SZÉLPÁLnak egy analóg eredménye szerint az első két típusú csoportoknak s

[12] Egy Abel-csoport *endomorfizmusai*, vagyis önmagába való homomorf leképezései gyűrűt alkotnak, ezt nevezik a csoport endomorfizmusgyűrűjének.

csak ezeknek van meg az a tulajdonságuk, hogy minden homomorf képük vagy 0, vagy izomorf magával a csoporttal.) SZÉLPÁL a tormentes endomorfizmusgyűrűjű csoportokat jellemezte, megmutatva, hogy e G csoportok a következő struktúrájúak: $G = A + B$, ahol A algebrailag zárt torziócsoport, B pedig oly torziómentes csoport, mely eleget tesz a $pB = B$ egyenletnek minden oly p-re, mely p előfordul A-ban mint valamely elem rendje.

Érdekes vizsgálatok fűződnek SZELE TIBOR és SZENDREI JÁNOS nevéhez *a kommutatív endomorfizmusgyűrűjű csoportokat* illetően. Vizsgálataik nyomán teljesen ismerjük a kommutatív endomorfizmusgyűrűjű torziócsoportok szerkezetét, valamint az ilyen tulajdonságú vegyes csoportoknak két, meglehetősen széles osztályát. A *torziócsoportok* közt az említett tulajdonsággal *éppen a kör összes végesrendű forgásaiból álló C csoport és ennek alcsoportjai* bírnak (C nyilván izomorf az összes komplex egységgyökök multiplikatív csoportjával). A vegyes csoportokra vonatkozó eredményeik közül hadd említsük meg itt azt, amelyik a $G = T + U$ direkt összegre bontható csoportokra vonatkozik, ahol T a G-nek torzióalcsoportja, s így U torziómentes. Ilyen G-nek endomorfizmusgyűrűje pontosan akkor kommutatív, ha T az imént említett C csoportnak oly alcsoportja, mely nem tartalmaz kváziciklikus alcsoportot, U pedig oly torziómentes, kommutatív endomorfizmusgyűrűjű csoport, mely eleget tesz a $pU = U$ egyenletnek olyan p prímekre, melyek T-ben mint elemrendek előfordulnak. SZELE és SZENDREI vizsgálataik eredménye alapján azt a sejtést mondják ki, hogy minden kommutatív endomorfizmusgyűrűjű csoport legfeljebb kontinuum számosságú és izomorf a kör összes (véges és végtelen rendű) forgásaiból álló csoport valamely alcsoportjával.

Az endomorfizmusgyűrűkre vonatkozó legújabb magyar vizsgálatok közül megemlítendő KERTÉSZnek az a még publikálatlan eredménye, hogy egy torziócsoport endomorfizmusgyűrűjének Jacobson-radikálja pontosan akkor tűnik el, ha G prímszámrendű ciklikus csoportok direkt összege.

Külön említésre méltók azok a vizsgálatok, melyek több csoportelméleti eredmény kiterjesztését jelentik az *operátormodulusok* különböző kategóriáira, és ilyen módon több esetben nevezetes gyűrűelméleti alkalmazásokhoz vezetnek. Különösen vonatkozik ez KERTÉSZ ANDOR legújabb vizsgálataira, amelyek egyebek közt a féligegyszerű gyűrűk egészen új, meglepő tulajdonságainak felfedezését és a végtelen lineáris egyenletrendszerek elméletének igen messzemenő általánosítását eredményezték. Messze vezetne, ha ezeket a fontos eredményeket itt ismertetni akarnók, csupán a főeredményt említjük meg: *egy R gyűrű feletti minden lineáris egyenletrendszerre akkor és csakis akkor érvényes a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete* (*vagyis a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele a rendszer kompatibilitása, és a megoldások a jobboldalak s tetszőleges paraméterek lineáris kombinációjaként állíthatók elő*), *ha R féligegyszerű.*

Az operátormodulusokkal kapcsolatos SZELÉnek egyik postumus cikke, amely a minimum- és maximum-feltételnek eleget tevő modulusokról szól, továbbá SZÉLPÁLnak az operátormodulusok rendjére vonatkozó megjegyzése.

III. A nem-kommutatív csoportok elméletében elért eredmények

A végtelen nem-kommutatív csoportokra vonatkozó hazai eredmények egy része már szerepelt RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus beszámolójában, minthogy azok a véges esetben is hasonlóan nehéz problémát jelentenek. Így speciálisan a csoportok *faktorizáció*jának problémája terén elért eredményeink a végtelen csoportok elméletében is komoly előrehaladást jelentenek. Az ott ismertetett eredményekhez kiegészítésül meg kell említenünk RÉDEInek azon dolgozatát, melyben két ciklikus csoport Zappa—Szép-féle szorzatait vizsgálta. Két csoport összes Zappa—Szép-féle szorzatainak megadása ekvivalens azzal, hogy megadjuk a ZAPPA által megállapított feltételeket kielégítő összes kétváltozós függvénypárokat. E probléma rendkívüli nehézségét mutatja az a tény is, hogy ZAPPA feltételei még akkor is igen bonyolultak maradnak, ha a két faktor ciklikus csoport. RÉDEInek a szóbanforgó dolgozatban csak azt az esetet sikerült maradéktalanul elintézni, mikor a két ciklikus csoport egyike végtelen, másika véges. Arra az esetre vonatkozóan, midőn mindkét csoport végtelen ciklikus, RÉDEI csak részeredményekre jutott. E dolgozatának folytatása, amelyben két véges ciklikus csoport Zappa—Szép-szorzatairól lesz szó, még nem készült el.

A véges csoportok elméletének több területén jutnak szerephez a Q_n ún. *általánosított kvaterniócsoportok.* Ezek olyan $2^n\,(n \geqq 3)$ rendű csoportok, amelyeknek a, b generátorai az

$$a^{2^{n-1}} = e, \quad bab^{-1} = a^{-1}, \quad b^2 = a^{2^{n-2}} \quad (e \text{ az egységelem})$$

definiáló relációkat elégítik ki. SZELE megmutatta, hogy létezik oly minimális Q_∞ végtelen csoport, mely alcsoportként tartalmazza valamennyi Q_n csoportot. Ez a csoport, melyet SZELE *végtelen kvaterniócsoport*nak nevezett el, oly $b, a_1, a_2, \ldots$ elemekkel generálható, amelyekre vonatkozó definiáló relációk a következők:

$$a_1^2 = e, \quad a_{k+1}^2 = a_k, \quad ba_kb^{-1} = a_k^{-1} \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad b^2 = a_1.$$

E csoport oly végtelen p-csoport ($p = 2$), amelynek egyetlen 2-odrendű alcsoportja van, ti. az a_1 által generált alcsoport. SZELE sejtése szerint Q_∞ az egyetlen oly végtelen p-csoport a nem-kommutatív csoportok közt, melynek csak egyetlen p-edrendű alcsoportja van. (A kommutatív csoportok közt a kváziciklikusaknak, de csak ezeknek van meg még az említett tulajdonságuk.)

GÁSPÁR GYULA a végtelen permutációcsoportoknak adta egy általánosítását. A természetes számok minden π permutációjához hozzárendelt oly M

végtelen mátrixot, melyben az (i, k) indexű helyeken rendre egy fix A csoport $a_1, a_2, \ldots$ elemei vagy 0-ok állnak aszerint, hogy $\pi i = k$ vagy $\pi i \neq k$. E mátrixot $(a_1, a_2, \ldots; \pi)$-vel jelölve, e mátrixnak a $(b_1, b_2, \ldots; \varrho)$ mátrixszal vett szorzatát mint az $(a_1 b_{\pi 1}, a_2 b_{\pi 2}, \ldots; \pi\varrho)$ mátrixot értelmezve, egy $S_\infty(A)$ csoportot kapunk. GÁSPÁR e csoport szerkezetét vizsgálja s megállapítja, miként kell kezdődniök e csoport kompozícióláncainak. A dolgozatban még megállapítást nyer $S_\infty(A)$ centruma, valamint automorfizmusai. Két további dolgozatában az előbb említett mátrixokból készült végtelen szorzatok s sorok konvergenciáját vizsgálja.

A nem-kommutatív csoportok szerkezetének vizsgálatában mélyebb eredményeket mind ez ideig csak olyan esetekben sikerült elérni, mikor a vizsgálandó csoportokat valamilyen további kikötésnek vetették alá. A kirótt követelmények többnyire olyanok, melyek a vizsgálandó csoportoknak vagy a véges csoportokhoz, vagy pedig a kommutatív csoportokhoz való közelségét biztosítják valamilyen formában. Így pl. B. H. NEUMANN szisztematikus tárgyalását adta az olyan csoportoknak, amelyekben minden elemnek csak végessok konjugáltja van. Ezek az ún. *véges osztályú csoportok.* NEUMANN igen messzemenően felderítette e csoportok szerkezetét. ERDŐS JENŐnek sikerült NEUMANN elméletét nagymértékben leegyszerűsíteni, egyszerű közvetlen bizonyítást adva az elmélet főtételére, mely szerint véges osztályú csoport kommutátoralcsoportja mindig torziócsoport. E tétel számos következménye közül megemlítjük R. BAER következő tételét: ha egy csoportban a centrum indexe véges, akkor a csoport kommutátoralcsoportja véges. ERDŐS tárgyalásából egyszerű bizonyítás adódik JU. G. FJODOROV következő érdekes tételére: ha egy végtelen G csoport bármely nem-triviális alcsoportja véges indexű, akkor G végtelen ciklikus csoport.

SZELE meghatározta azokat a csoportokat, amelyek nem tartalmaznak különböző, de egymással izomorf alcsoportokat. Bebizonyította, hogy egy csoportnak akkor és csakis akkor van meg az említett tulajdonsága, ha izomorf az összes komplex egységgyökök C csoportjának valamely alcsoportjával. SZELE ezen vizsgálataihoz kapcsolódva, FUCHS megadta mindazon csoportok szerkezetét, melyek nem tartalmaznak végtelen sok, egymással izomorf, de egymástól különböző alcsoportot: ezek éppen azok a csoportok, amelyek centrumukban tartalmaznak oly véges indexű alcsoportot, mely az előbb említett C csoport valamely alcsoportjával izomorf. Érdekes, hogy ugyanezen csoportok adódnak, ha az egymással izomorf alcsoportok számosságától (végesség helyett) *korlátosságot* követelünk meg. FUCHS azt is bebizonyította, hogy az összes csoportok közt csak két vagy három ugyanazon p prímszámrendű csoport direkt összege bír azzal a tulajdonsággal, hogy bennük az egymással izomorf nem-triviális, különböző alcsoportok száma mindig ugyanazon, 1-nél nagyobb véges szám.

A csoport fogalma általánosításának elméletébe vág FUCHSnak az a dolgozata, melyben A. SZUSKEVICSnek a véges félcsoportok szerkezetére vonatkozó eredményeit általánosítja oly végtelen félcsoportokra,[13] amelyekben minden elemnek van relatív inverze és léteznek egyoldali minimális ideálok. Egy S félcsoport a elemének relatív inverzén CLIFFORD nyomán oly a' elemet értünk, mely kielégíti az $e_a a = a e_a = a$, $aa' = a'a = e_a$ egyenleteket a félcsoport valamely (szükségképpen idempotens) e_a elemére; S-nek A részhalmazáról pedig akkor mondjuk, hogy baloldali ideál, ha $SA \subseteq A$ teljesül. FUCHS bebizonyította, hogy a minimális baloldali ideálok egyesítése megegyezik a jobboldali ideálok egyesítésével (csak az egyik oldali minimális ideálok exisztenciáját kell feltételezni), s ez az egyesítés S-nek oly kétoldali ideálja, mely diszjunkt izomorf csoportok egyesítési halmaza. Analóg vizsgálatokat végzett GREEN amerikai és Št. SCHWARZ csehszlovák matematikus is; utóbbi ugyanazon eredményre jutott gyengébb feltételek mellett.

IV. Eredmények a csoportelmélet egyéb ágaiban

Kutatóink egészen a legutóbbi időkig nem foglalkoztak a *topologikus csoportok* elméletével, de ma már itt is beszámolhatunk néhány értékes eredményről. Mindenekelőtt ki kell emelnünk BOGNÁR MÁTYÁS komoly figyelemre számot tartó vizsgálatait, amelyek véges dimenziójú topologikus csoportoknak az euklideszi térbe való beágyazhatóságára vonatkoznak. Tétele szerint *minden lokálisan kompakt, megszámlálható bázissal rendelkező n-dimenziós Abel-féle topologikus csoport topologikus tere beágyazható az $n+2$-dimenziós euklideszi térbe.* A bizonyítás (PONTRJAGIN struktúra-tétele alapján lehet a kompakt esetre szorítkozni) D. VAN DANTZIG szolenoid konstrukciójának általánosításán alapszik. BOGNÁR azt is megállapította, hogy az említett csoportoknak *az $n+1$-dimenziós euklideszi térbe való beágyazhatóságának szükséges és elégséges feltétele a 0 elem komponensének lokálisan összefüggő volta.* (Ez K. KODAIRA és M. ABE egy régebbi tételének általánosítása a kompaktság előzetes feltételezése nélkül.) A bizonyítás a következő, önmagában is érdekes lemmára támaszkodik: Minden, az adott feltételeket kielégítő, nem lokálisan összefüggő komponensekkel rendelkező topologikus csoport topologikus terének van oly altere, mely homeomorf egy 1-rangú torziómentes nem-ciklikus diszkrét Abel-csoport karaktercsoportja topologikus terének és egy $n-1$-dimenziós kockának topologikus szorzatával.

BOGNÁRnak egy másik eredménye szerint egydimenziós, kompakt, összefüggő és szeparálható Abel-féle topologikus csoportok akkor és csak akkor izomorfak (topologikusan is), ha topologikus terük homeomorf.

[13] *Félcsoport* oly halmaz, amelyben egy asszociatív operáció van értelmezve.

KERTÉSZ és SZELE egyik közös cikkükben azzal a kérdéssel foglalkoztak, hogy bevezethető-e minden végtelen Abel-csoportba nem-diszkrét topológia, vagyis megadható-e a 0 környezeteinek oly Σ rendszere, hogy a következő feltételek teljesüljenek: 1. Σ elemeinek metszete 0, de $0 \notin \Sigma$; 2. ha $U \in \Sigma$ és $V \in \Sigma$, akkor van oly $W \in \Sigma$, hogy $W \subseteq U \cap V$; 3. minden $U \in \Sigma$-hoz található oly $V \in \Sigma$, hogy $V + (-V) \subseteq U$; 4. ha $U \in \Sigma$ és $a \in U$, akkor van oly $V \in \Sigma$, hogy $V + a \subseteq U$. Kiderül, hogy tetszőleges végtelen G Abel-csoportba bevezethető ilyen topológia, sőt, ha G alcsoportjai nem tesznek eleget a minimum-feltételnek, akkor a Σ környezetrendszer úgy is megválasztható, hogy csupa alcsoportból álljon.

SZELE élete utolsó előadásában az endomorfizmusgyűrűk topologizálásának kérdésével foglalkozott.

A *folytonos csoportok* elméletéhez közelálló eredmények találhatók ACZÉL JÁNOS és HOSSZÚ MIKLÓS több dolgozatában. Ezek bizonyos függvényegyenletek megoldásaira vonatkoznak. Messze vezetne, ha ezen eredményekre itt észletesebben kitérnénk, ezért elégedjünk meg ACZÉLtól a következő tétel megemlítésével: a valós számokon értelmezett minden monoton, folytonos és asszociatív operáció „izómorf“ az összeadással, s így kommutatív. HOSSZÚ eredményei közül pedig hadd említsük meg azt, mely szerint ha egy tetszőeges M halmazon értelmezett binér $*$ operáció tranzitív (azaz $(x*t)*(y*t) = x*y$) és eleget tesz a baloldali egyszerűsítési szabálynak (azaz $x*y_1 = x*y_2$-ből $y_1 = y_2$ következik), akkor ezen $z = x*y$ operációnak van inverze: $x = z \circ y$, mely eleget tesz a csoportaxiómáknak.

A *rendezett csoportok* elméletének különféle kérdéseivel foglalkozott FUCHS LÁSZLÓ több dolgozatában. Mint ismeretes, egy G csoportról akkor mondjuk, hogy (részben) rendezett, ha bizonyos elempárjaira értelmezve van egy reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív $\geqq$ reláció, mely kielégíti a következő követelményt:[14] $a \geqq b$ fennállásából $x+a+y \geqq x+b+y$ következik a csoport tetszőleges x, y elemeire. FUCHS egyik dolgozatában a rendezett csoportok rendezést tartó homomorfizmusaival foglalkozott; itt a mag oly N normálosztó, mely konvex abban az értelemben, hogy $a \geqq x \geqq b$, $a, b \in N$-ből $x \in N$ következik. Rámutat azon analógiákra és eltérésekre, melyek az absztrakt és a rendezett csoportok homomorfizmusai közt fennállanak. Foglalkozik a rendezett csoportok Schreier-féle és Zappa—Szép-féle bővítéseivel (az előbbire támaszkodik F. LOONSTRA egyik újabb cikkében), az abszolút érték fogalmának kiterjesztésével, s többek közt bebizonyítja a következő tételt: ha egy rendezett csoportnak a triviális alcsoportjain kívül egyáltalán nincs más konvex alcsoportja, akkor e csoport kommutatív, mégpedig izomorf a valós szá-

[14] Bár az additív írásmódot a csoportelméletben csak az Abel-csoportoknál szokás használni, rendezett csoportok esetén a nem-kommutatív csoportok operációját is célszerű összeadásnak írni, minthogy így a tulajdonságok jobban emlékeztetnek a valós számokra vonatkozó egyenlőtlenségek ismert tulajdonságaira.

mok additív csoportjának valamely alcsoportjával. (E tételre új bizonyítást adott T. MICHIURA.) FUCHSnak egy másik eredménye szerint egy kommutatív csoport rendezése akkor és csakis akkor terjeszthető ki tetszőlegesen előírt módon lineáris rendezéssé, ha a csoport eredeti rendezése normális abban az értelemben, hogy $na \geqq 0$-ból (n pozitív egész) $a \geqq 0$ következik. E tételnek speciális esete az az F. LEVItől származó eredmény, hogy minden torziómentes Abel-csoport lineárisan elrendezhető. FUCHS utoljára említett cikkében foglalt eredményekhez külföldi kutatók kapcsolódtak, többek közt C. J. EVERETT, M. OHNISHI, O. NAKADA, K. ISÉKI, T. MICHIURA.

* * *

Úgy véljük, az ismertetett eredmények mindennél jobban bizonyítják, hogy milyen nagy fejlődésen mentek keresztül a végtelen csoportok elméletében végzett kutatásaink az elmúlt tíz évben.

MAGFIZIKAI GYORSÍTÓ BERENDEZÉSEK TERVEZÉSÉNEK ÉS KIVITELEZÉSÉNEK NÉHÁNY PROBLÉMÁJA

SIMONYI KÁROLY

Minthogy ma már üzemben van olyan berendezés, amely nehéz részeket néhányszor 10^9 eV energiára tud felgyorsítani, felmerül a kérdés, van-e értelme egyáltalán néhányszor 10^6 eV energiájú részecskéket adó készülékeket építeni. Az alábbiakban ezzel kapcsolatban bevezetőül éppen egy készüléktípus használhatóságának megítélésénél felmerült szempontokat szeretném megemlíteni.

Hogy egy készülék használhatóságának — bár igen fontos — de nem egyetlen jellemzője a részecskék végenergiája, mutatja az a körülmény, hogy a kozmikus sugarak akár 10^{15} eV energiájú részecskéket is adnak a kísérletező kezébe: ilyen szempontból tehát a kozmotron építése is megkérdőjelezhető. A válasz természetesen könnyű: a kozmotron 10^9 részecske/sec intenzitású, míg a kozmikus sugárzás intenzitása ennél sok milliószor kisebb. A másik ok: a mesterségesen gyorsított részecskék energiája, minősége kézben tartható, szabályozható, tehát beállítható a bennünket érdeklő ionféleségre és energia tartományra.

Tisztán fizikai szempontból tehát a következő szempontok döntőek egy készülék használhatóságának megítéléséhez:

1. A készülékkel elérhető energia-tartományban elvégezhetők-e akár gyakorlati, akár elvi szempontból jelentős kísérletek.

2. Azonos energia tartományban dolgozó készülékek közül melyik intenzitása legnagyobb.

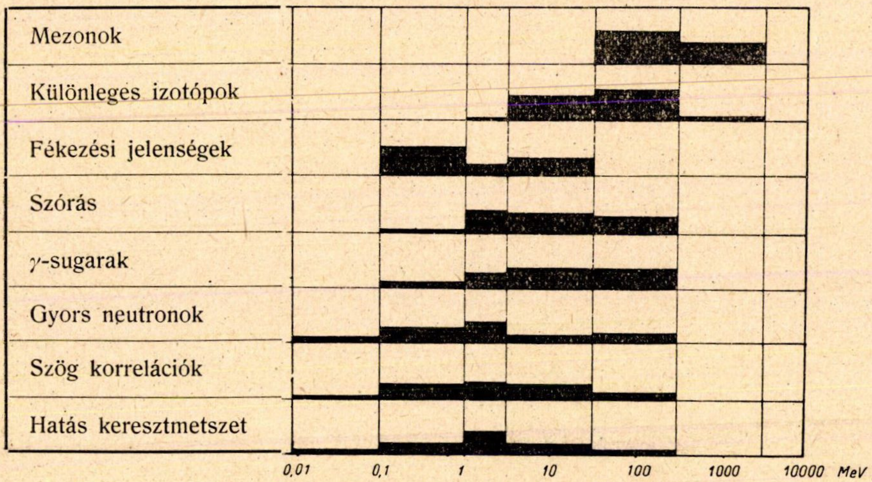
3. Melyik energiája tartható legjobban kézben, tehát melyik szabályozható legpontosabban, melyik energiája a leghomogénebb.

Végül természetesen figyelembe kell vennünk a gazdasági és gazdaságpolitikai kérdéseket is: melyik milyen költséggel milyen külföldi ill. belföldi anyagokkal, illetve segédberendezésekkel valósítható meg. A tudományos irodalomból megállapítható, hogy akár gyorsított elektron, akár nehéz részecske nyalábbal 0,1 MeV energiától fel, akármekkora energiaértékig mind elméleti, mind gyakorlati szempontból igen érdekes kérdések vizsgálhatók.

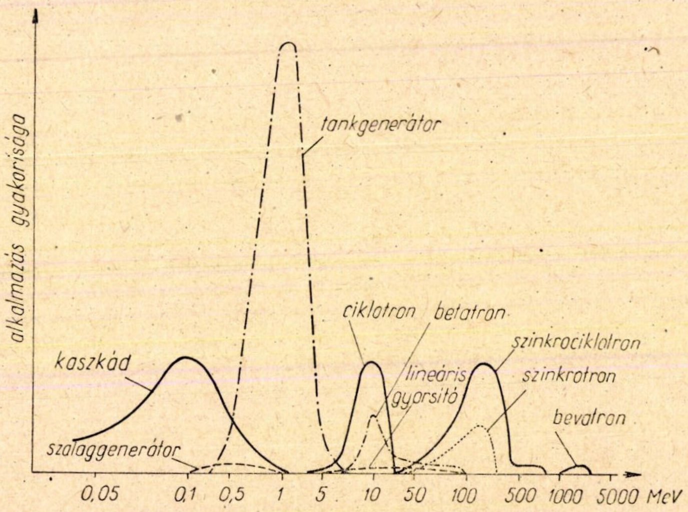
A mellékelt táblázatban megtalálhatjuk az utolsó évek érdekesebb problémáit (1. ábra).

Látjuk, hogy éppen a viszonylag alacsony energiatartomány nyújt nagyon sokrétű kutatási lehetőséget. Természetesen az egészen nagy energiákat adó készülékektől sokkal fontosabb elvi jelentőségű eredmények várhatók.

A diagramból pontosan leolvashatók az egyes készülék-típusok használhatóságának tartományai (2. ábra). Ebből a diagramból fogjuk a későbbiekben egy atomfizikai intézet legcélszerűbb berendezéseit megállapítani.



1. ábra. A gyorsító berendezésekkel végzett különféle vizsgálatok megoszlása az egyes energia tartományokban.



2. ábra. A különböző gyorsító berendezések alkalmazásának gyakorisága az előállított energia függvényében.

Néhány MeV energiákig csak a közvetlen gyorsítók jöhetnek számításba azoknak is négy típusa: a szabadtéri, illetve nyomás alatti Van de Graaff és a szabadtéri, illetve nyomás alatti kaszkádgenerátor.

A Van de Graaff gyorsítók típusai, illetve feszültségtartományuk ma már meglehetősen kikristályosodott. Szabadtéri Van de Graaff feszültségforrás egyszerű, olcsó, minden műszaki nehézség nélkül előállítható. Gyorsító berendezésével természetesen éppen annyi probléma van, mint bármelyik másik gyorsítóval. Ma már mint feszültségforrásnak elsősorban az a szerepe, hogy oktató intézeteknél kiszorítja a régi elektrosztatikus gépeket.

A nyomás alatti Van de Graaff generátor az 1—5 MeV tartományban jelenleg egyik leghasznosabb típusú készülék. A feszültsége igen stabillá tehető, tehát a szabályozás követelményeinek leginkább felel meg az összes berendezések közül. Áramerőssége nagy: néhány száz μA minden nehézség nélkül elérhető vele. Hátránya műszaki bonyolultsága és ennek megfelelő magas ára. Feszültségének racionális felső határa 6 MV.

A szabadtéri kaszkádgenerátor legfontosabb jellemzője a nagy áramerősség: elvileg néhány mA. Viszonylag nem túlságosan bonyolult. Biztos üzeme miatt az 1 MV határ alatt egyik legnagyobb elterjedettségnek örvendő készüléktípus. Racionális felső határa 1,5 MV körül van, de inkább alatta, mint felette. Mint az alább látni fogjuk értékét, teljesítőképességét erősen túlbecsülik.

A nyomás alatti kaszkád új típus. Elvileg erős versenytársa lehet a nyomás alatti Van de Graaffnak, bár az elektromos tér messze nem alakítható ki olyan kedvezően. A feszültségérték racionális felső határa így majdnem biztosan alacsonyabb, mint a nyomás alatti Van de Graaff generátoroké.

A kaszkádgenerátorok terhelés alatt nagy feszültségingadozást adnak, ami elvileg kiküszöbölhető, de erre vonatkozóan gyakorlati adataink nincsenek.

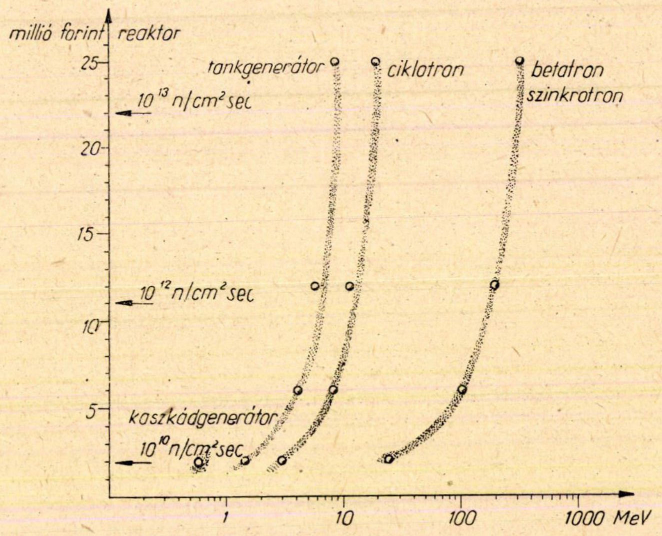
Az irodalomban leírt készülékek teljesítőképességének gyors megítélését megnehezíti az a körülmény, hogy általában csak a feszültségforrás üzemi (sőt néha maximális) adatai szerepelnek. (1 MV, 4 mA.) Már többet mond a feszültségforrás feszültségének és az ionforrás ionáramának megadása. Természetesen a fizikai vizsgálatok szempontjából egyetlen jellemző az *összetartozó gyorsító* feszültség és targetáram megadása. Ilyenkor az derül ki, hogy a cikk címében megadott szám inkább csak *neve* a berendezésnek és nem műszaki adata. Így például az 1MV—150 μA adatú szabadtéri Van de Graaff generátorunk 1,2 MV maximális feszültség mellett 0,7 MV feszültséget adott, ha a gyorsító cső is rá volt kapcsolva, 0,6 MV-ra esett vissza, ha gyorsítottunk, üzemszerűen 0,3—0,4 MV gyorsító feszültség mellett 10 μA targetáram volt mérhető. Ezek természetesen csak az előkísérletek igen rossz, javítható és javított adatai, de rávilágítanak arra, hogy a valóban gyorsító feszültség a generátor üzemi feszültségénél jóval kisebb. A táblázatban néhány, az irodalomból vett adatot láthatunk a fentiek illusztrálására (3. ábra).

Mint említettük, az összetartozó feszültség és targetáram az, ami a fizikus számára jellemző, nem pedig a feszültségforrás feszültsége és belőle kivehető maximális áram. A feszültségforrások méretezése viszonylag egyszerűbb villamosmérnöki feladat.

A teljes gyorsító berendezés feszültségmaximumát a vákuum-átütés szabja meg, a targetáramot pedig nem az ionforrásból kivihető áram, hanem a fokuszálási nehézségek. Az utóbbiak növekvő feszültségnél a megnövekedet úthossz miatt, növekvő áramerősségnél a megnövekedett tértöltés miatt hatványozottan nőnek. Neutronforrásként tehát a viszonylag kis feszültségű és nagy áramerősségű készüléket célszerű építeni.

Névleges feszültség MV	Maximális feszültség MV	Gyorsítási adatok		Évszám
		MV	μA	
0,8	—	0,7	10	1932
0,4	—	0,37	600	1941
		0,3	900	
1,5	1,1	0,8	100	1951
1,4	1,2	0,9	300	1952
1,5	1,28	—	250	1952

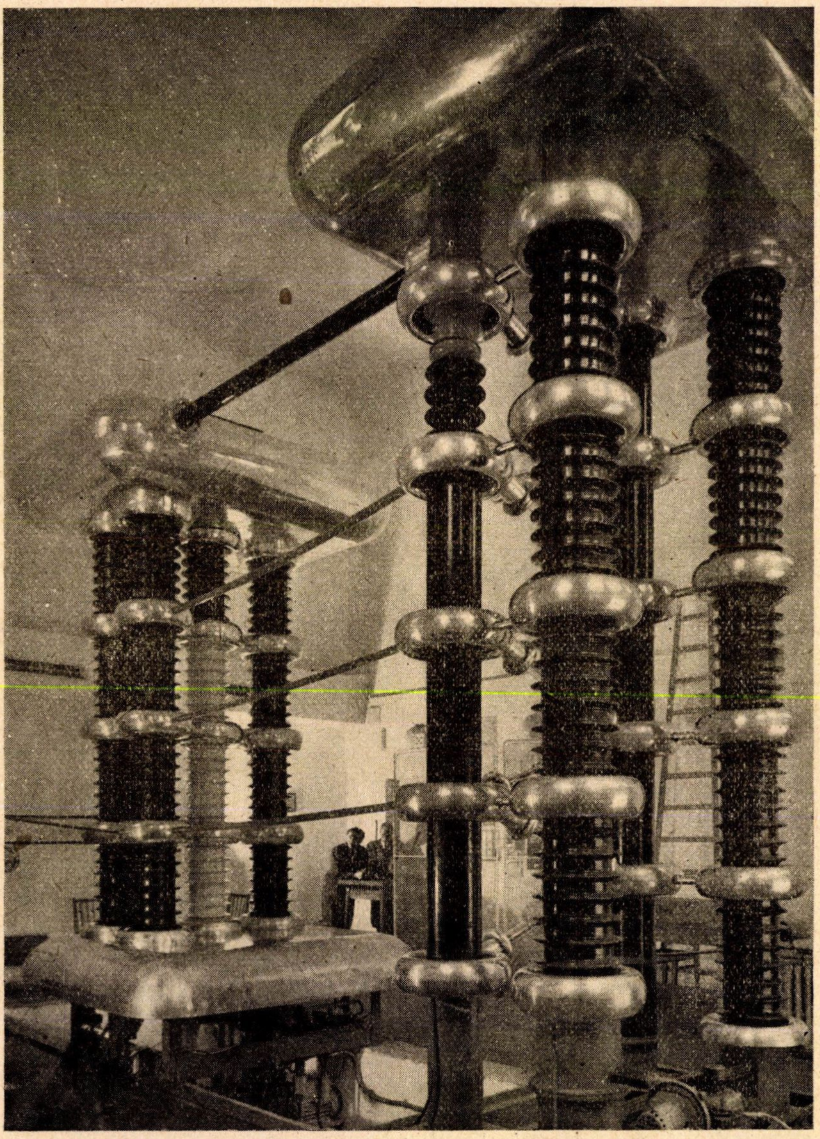
3. ábra. Az irodalomban található különböző generátorok névleges és gyorsítási adatainak összehasonlítása.



4. ábra. Különböző generátorok előállítási költsége az elérendő energia függvényében. Az ábra bal oldalán látható nyilak összehasonlítás céljából megadják egy adott neutronfluxushoz tartozó reaktorok költségét is.

Az eddigiek alapján tehát a következőket mondhatjuk: Legolcsóbb és mégis igen sokoldalúan használható egy kaszkád-típusú gyorsító néhány százezer volt feszültséggel, mint neutronforrás. Ha ezt a berendezést egy 2—4 MV tankgenerátorral egészítjük ki, mint a 2. ábrából láthatjuk, akkor ma a világon folyó magfizikai kutatás legnagyobb részébe be lehet kapcsolódni. Erősen kérdéses egyetlen 1 MV körüli kaszkádgyorsító használhatósága.

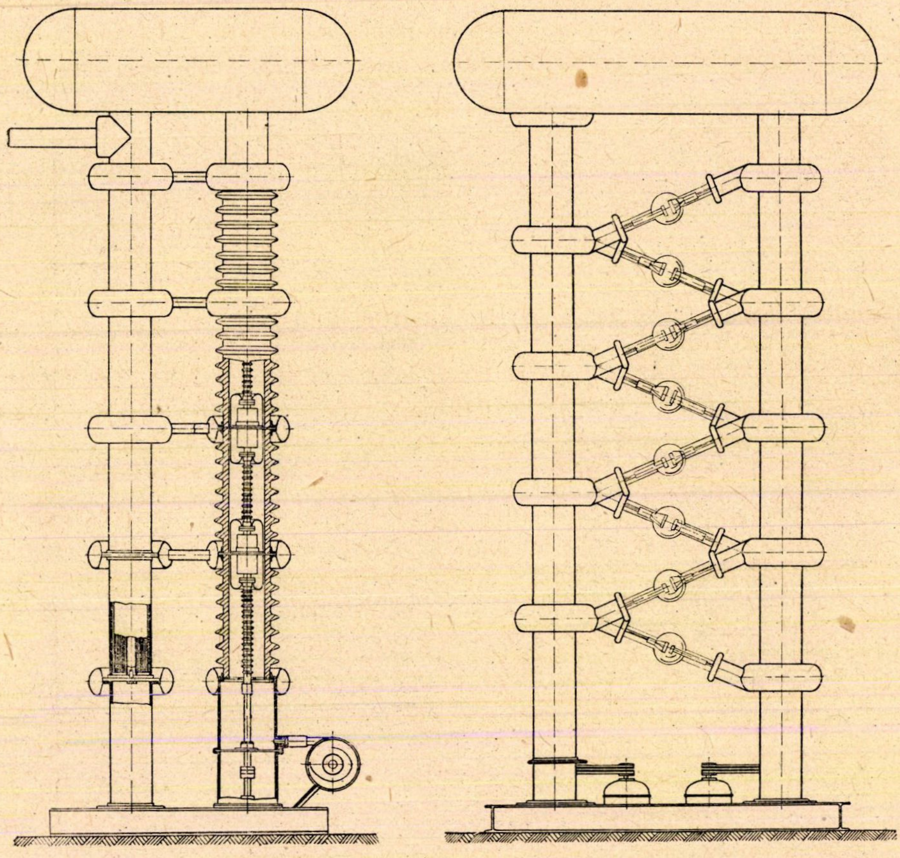
Bár a ciklikus gyorsítókról nem beszéltünk, megemlítjük, hogy a normál ciklotron 15—25 MeV tartományon egyes izotóp gyártása miatt is fontos.



5. ábra. A KFKI Atomfizikai Osztályán épült 800 kV-os gyorsító berendezés fényképe.

A 4. ábra az árakról is némi felvilágosítást nyújt. Ebből megállapíthatjuk, hogy elektronok gyorsítása összehasonlíthatatlanul egyszerűbb. Nagyjából azonos anyagi áldozattal és szellemi energiával majdnem két nagyságrenddel nagyobb elektron energiák valósíthatók meg.

A KFKI Atomfizikai Osztályán nem követtük kezdetben az itt leírt elveket: most utólag igyekezünk minél jobban alkalmazkodni ahhoz. A szabadtéri szalag-generátorokkal való bevezető és lényegében költségmentes kísérletezés után, amelynek eredményeképpen 1951 végén a Soproni Egyetem Elektrotechnikai Tanszékén először valósítottunk meg hazánkban gyorsított nehéz részekkel atommagreakciót, az Atomfizikai Osztályon először egy 800 kV-os kaszkád, majd egy 4MV-os tankgenerátor építését kezdtük meg. Csak most térünk vissza a 600 kV-os, egészen modern kivitelezésű, új kaszkád gyorsítóhoz az előbb említett másik két gyorsító mellett.



6. ábra. A gyorsító berendezés feszültségét szolgáltató 800 kV-os kaszkád generátor rajza.

Mindegyik készülék az Atomfizikai Osztály saját konstrukciója és kivitelezése, eltekintve az egészen nagyméretű daraboktól. A méretezést természetesen az irodalomból ismert konstrukciók nyomán végeztük.

A kaszkádgenerátor egy fokozata két 0,01 μF kapacitású régebbi Meirowsky gyártmányú kondenzátorból és két Siemens vákuumventilcsőből áll 120 watt fűtőteljesítménnyel és 230 kV zárófeszültséggel (6. ábra). A transzformátorhoz csatlakozó kondenzátor kapacitása 0,02 μF. Egyetlen fokozat maximális feszültsége 200 kV. A transzformátor primer feszültségét forgó átalakító szolgáltatja. Ez a hálózatról egyenirányított gerjesztőfeszültség változtatásával szabályozható 0—300 V-ig. A feszültségesés csökkentése érdekében a frekvencia 500 c/sec. A transzformátor szekunder feszültségének csúcsértéke 100 kV. Ezekkel az adatokkal a feszültségesés 8400 V/mA, a hullámosság pedig 2000 V/mA.

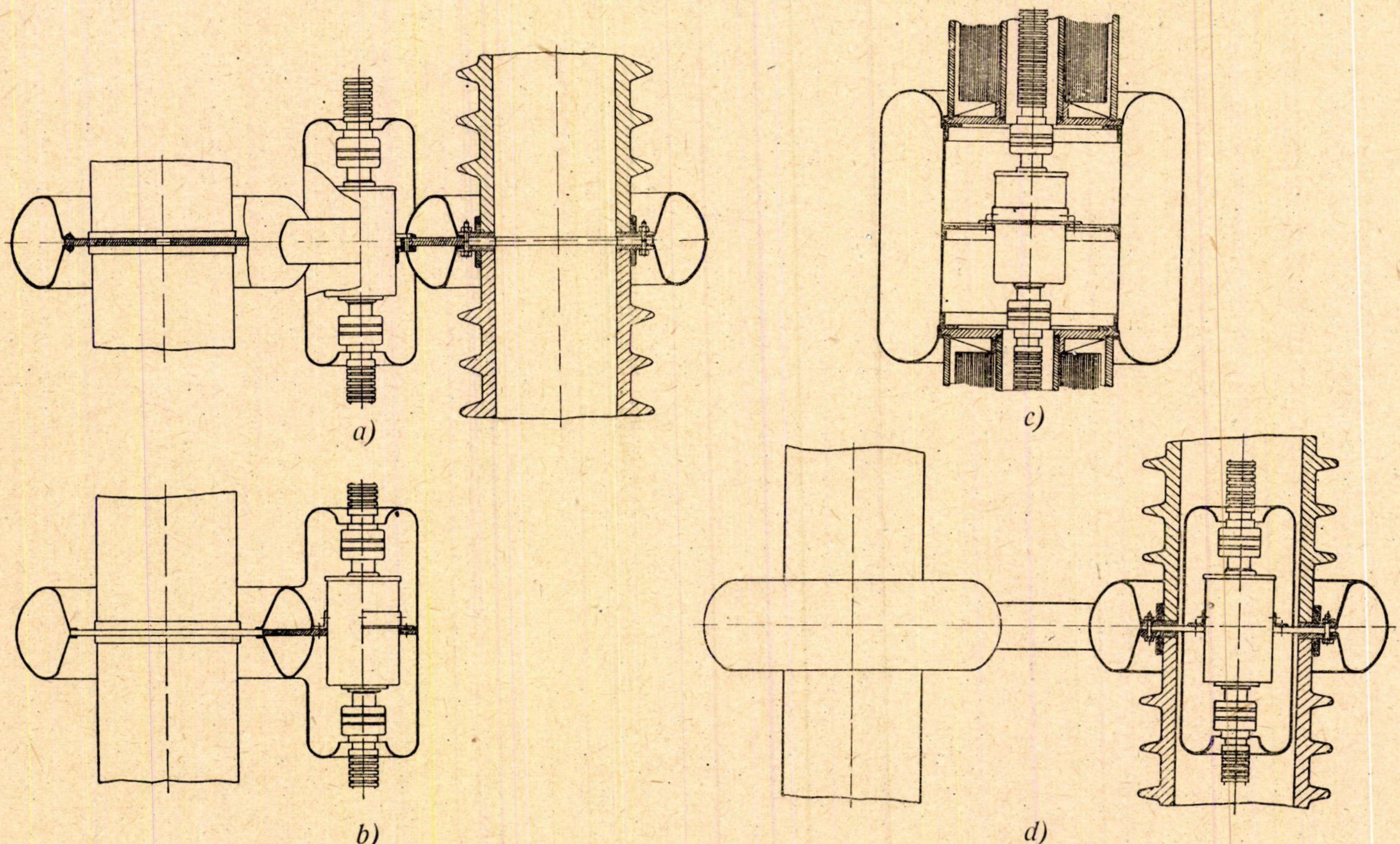
Az irodalomban leírt kaszkádgenerátorok elsősorban a nagyfeszültségű tér kialakításában, másodsorban a csővek fűtésének megoldásában különböznek egymástól. Ma már majdnem kizárólag a Philips gyár által bevezetett felső védő elektródás kivitel használatos a külön befejező elektródával szemben. Ez utóbbi megoldás jóval kisebb építési magasságot ad, az előbbi azonban sokkal homogénebb teret szolgáltat. Kisebb feszültségeknél ez utóbbi mutatkozik előnyösebbnek.

A ventilcsövek fűtése szigetelt tengellyel meghajtott dinamókkal, vagy a kondenzátor oszlopokon felvitt nagyfrekvenciás teljesítménnyel történhet. A legújabb megoldásnál a szárazegyenirányítók alkalmazásával ez a probléma teljesen elesik.

Műszakilag legegyszerűbben a dinamókkal való fűtés valósítható meg. Az Osztályon elkészült ugyan újabb egy nagyfrekvenciás fűtéssel dolgozó 600 kV-os kaszkádgenerátor is; az ezzel kapcsolatban szerzett tapasztalatainkról azonban majd másutt számolunk be.

A dinamók szerelése és a szigetelő tengelyek elhelyezése a 7. ábrán látható módon történhet. A készülék mechanikai stabilitása miatt általában egy fokozatot két-két paralel kapcsolt kondenzátor ad, így az egész berendezés eleve négy oszlopból áll. Ilyenkor a fűtődinamók természetes helye a két oszlop között van. A dinamókhoz könnyen hozzá lehet férni, nem emeli a szerkezet magasságát. Hátránya, hogy viszonylag zajos és a ventilcsöveket közvetlenül rázza. Egyedülálló a Siemens-megoldás. A koncentrikus hengerként kiképezett kondenzátor belsejében felmenő tengely zajtalan üzemet, egyszerű, stabil mechanikai konstrukciót biztosít. A szerkezeti magasságot azonban kissé megemeli, és talán a javítás, vagy csere lehetősége sincs egyszerűen adva. A 7/c konstrukció mechanikai stabilitása nem kielégítő, de igen egyszerű. Szerelése a legömbölyítések kényes helyen való megbontását követeli. A ventilcsöveket rázásra igénybe veszi.

Az általunk választott konstrukció a mechanikai stabilitás, a viszonylag csendes járás, a külön hűtési lehetőség követelményeit kielégíti, de szerelhetőség szempontjából nem mondható szerencsésnek. A dinamók szabályozó berendezése ugyan a legömbölyítések megbolygatása nélkül hozzáférhető, a dinamókon a javítás, a tisztogatás csak a teljes szétszerelés után végezhető. Ez a dinamók garantált hosszú élettartama miatt nem látszik veszélyesnek, minthogy az évenkénti teljes szétszerelés úgyis tervbe van véve. Ez eddig (kb. másfél éves üzemi idő) elégnek is bizonyult. Ha szükségesnek látszik, minden különösebb nehézség nélkül át lehet építeni a 3/a típusúra, amelyet az eddigi tapasztalatok szerint a legjobbnak tartok.



7. *ábra.* A fűtő dinamók elhelyezésének különböző megoldásai.
(Az általunk épített berendezésnél a „d“ megoldás nyert alkalmazást.)

Az elektromos tér számítása csak meglehetősen durva, különböző oldalról történő megközelítéssel lehetséges. Az így kiadódó méreteket egy fokozat felépítésével kisérletileg ellenőriztük.

A generátor egyetlen fokozatának feszültségét 1640 $M\Omega$ értékű, olajban elhelyezett 250 kV-ig használható Ingelen-gyártmányú műszer ellenállással mérjük. Ennek hitelesítését 15, illetve 75 cm átmérőjű gömbszikraközzel végeztük közvetlenül a mérési feszültség tartományában, miután részleteiben kisebb feszültségnél hitelesítettük. Ellenőrzésül a primer oldal feszültség és gerjesztő árama, valamint egy, az egész generátor feszültségét mérő, kisebb feszültségen az ellenállásos feszültség-mérővel közvetlenül összehitelesített rotációs voltmérő szolgál.

A feszültségmérés pontossága 2—3%. Egyelőre nem is törekszünk ennél pontosabb értékek megvalósítására.

A gyorsító berendezés

A felső elektróda három tartóoszlopa között foglal helyet maga a gyorsító cső a 8. ábra szerinti elrendezésben. A tartó oszlopok egyikében egy eredetileg mérőellenállásnak szánt ellenállás a felső elektróda földelését biztosítja. A második oszlopban a szabályozást végző selyem zsinórok vannak. A harmadik oszlop pedig a felső elektróda energia ellátására szolgáló dinamó hajtószalagját foglalja magában. Ez a szigetelő szalag igen hajlamos arra, hogy mint öngerjesztő Van de Graaff generátor működjék. Ezáltal a felső elektróda a kaszkádgenerátor tápláló feszültségének kikapcsolása esetén is komoly — néhány száz kV-nagyságú feszültségre tehet szert, ami tekintettel a kondenzátorokra, komoly üzemi balesethez is vezethet, ha meggátlására kellő gondot nem fordítunk.

A gyorsító cső evakuálására 1500 l sec szívósebességű olajdiffúziós pumpa szolgál, természetesen mindennemű kifagyasztó nélkül. Ennek megfelelően azonban a gyorsító cső belseje hosszabb üzem után olaj-bevonatot kap.

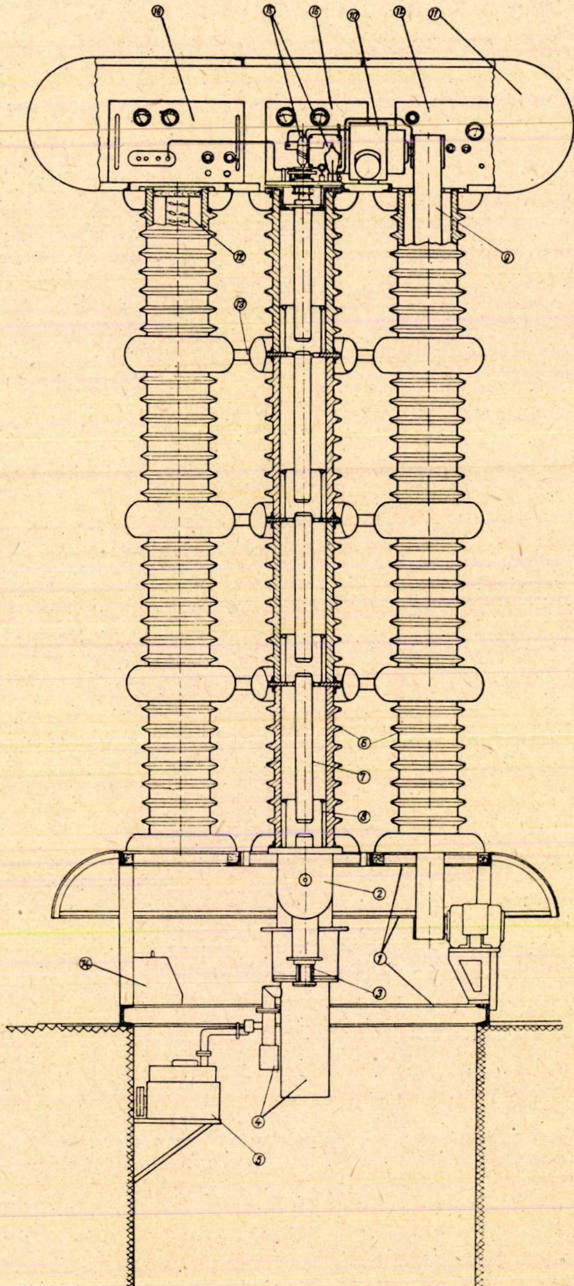
A fokuszálási problémák csak a leggondosabb szereléssel voltak megvalósíthatók. A 9. ábra szerint az elektróda tartó lemez külön beerősítése látszott célszerűnek. Ugyancsak fontos az egyes elektródák tengelyirányú elmozdíthatósága és billenthetősége.

Ionforrásul a nagyfrekvenciás ionforrást választottuk kis energia szórása és nagy atomion tartalma miatt. (10. ábra.)

Az elért maximális target áram 300 μA volt, 600 kV feszültségen üzemszerűen 100—200 μA érték valósítható meg.

A 11. ábrán a nagyfrekvenciás kaszkádgenerátort is bemutatjuk, erről részletesen azonban itt nem beszélünk.

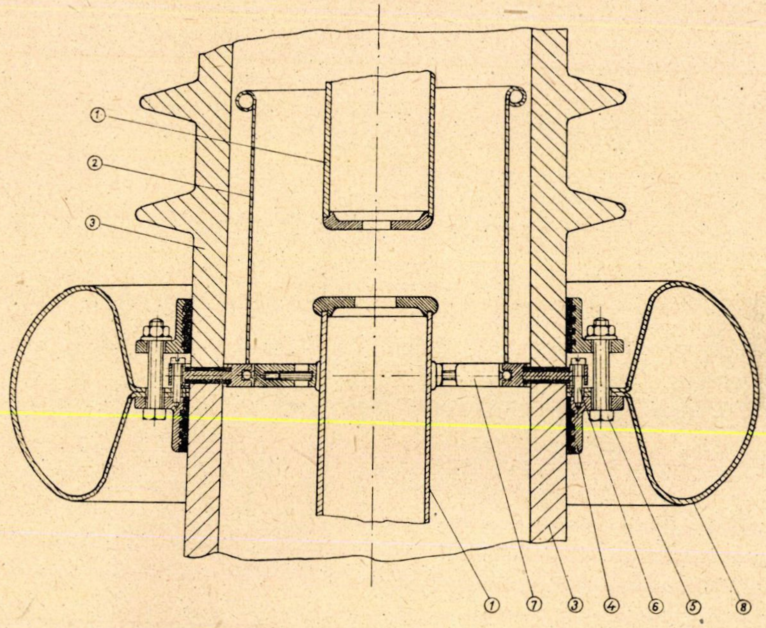
Az osztály minden nagyobb berendezésének tervezésénél részletes előzetes vizsgálatokat végeztünk az ionforrás optimális viszonyainak megállapítására, a vakuumátütés mechanizmusának tisztázására, stb.



1. Tartó vasszerkezet.
2. Leszívó csonk.
3. Céltárgy helye.
4. Diffuziós szivattyúk.
5. Elővákuum szivattyú.
6. Szigetelő porcelánok.
7. Gyorsító elektródák.
8. Árnyékoló serleg.
9. Generátor meghajtó szalag.
10. Generátor.
11. Felső elektróda.
12. Olajba helyezett ellenállás lánc.
13. Elektromos összekötések.
14. Vákuum-mérő.
15. Ionforrás és oszcillátor.
16. Kihúzó feszültség anódpótló.
17. Oszcillátor anódpótlója.
18. Előfokuszáló feszültség anódpótlója.

8. ábra. A gyorsító rész felépítése.

A nagy tankgenerátor konstrukciója a 12. ábrán, fényképe a 13. ábrán látható. Lényegében az alsó rész kialakításától eltekintve az MIT ismert konstrukcióját követi. Itt csak egyetlen részletkérdésre szeretnék kitérni: általában az elektródák és a tartály fala közötti tér homogenizálására közbeeső elektródákat szokás tenni és még ma is cikkek jelennek meg arról, hogyan és hány közbülső elektródával lehet a homogén teret legjobban megvalósítani. Én ezt az irányt két okból is elhibázottnak tartom: először is a belső elektróda min-



1. Gyorsító elektródák. 3. Porcelán szigetelő. 5. Összekötő csavar. 7. Gömbcsuklós állító csavar.
2. Árnyékoló serleg. 4. Összekötő gyűrű. 6. Közgyűrű rögzítő csavar. 8. Árnyékoló test.

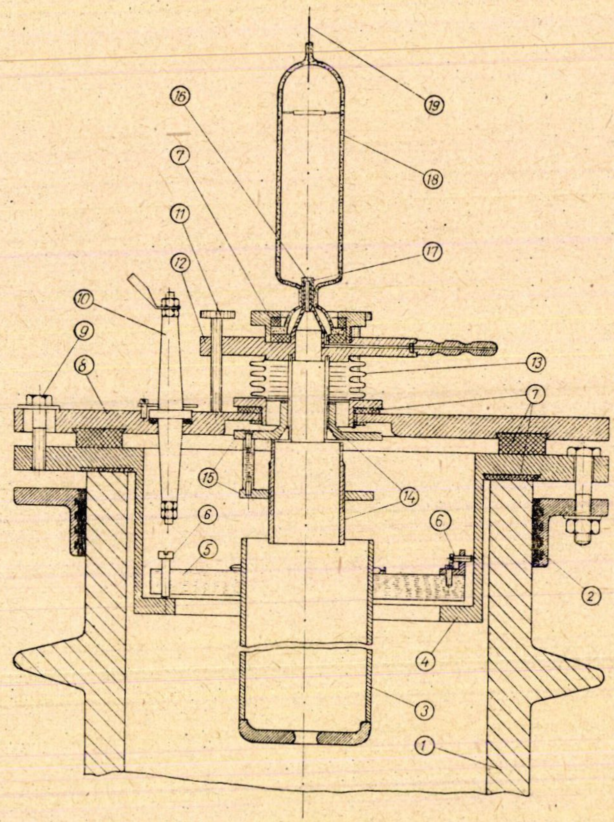
9. ábra. A gyorsítást és fokuszálást végző egyik elektromos lencse kialakítása.

denképpen nagyobb térerőt bír ki, minthogy annak teljes simasága technológiailag könnyen biztosítható, másodszor a feszültséget nem az elektródák közötti átütés határolja, hanem a szalagon vagy a tartó oszlopokon való átkúszás. Ha az átütés az elektródák között következik be, a nyomásnak még ésszerű határok közötti növelésével a töltő gáz átütési szilárdsága úgy megnövelhető, hogy a maximális feszültséget végül is a kúszó út szabja meg. Legcélszerűbbnek a 15—20 kg/cm^2 üzemi nyomású $N_2 + SF_6$ töltésű *egyetlen* elektródából álló generátor típust látom.

A generátoron 0,5 mA rövidzárási áramot és 4,4 MV maximális feszültséget mértünk. (14. ábra.)

Szeretném hangsúlyozni, hogy a készüléknek csak a feszültségforrás része készült el, a gyorsító cső kikisérletezése és beépítése még hátra van.

Végezetül szeretném megemlíteni, hogy az Atomfizikai Osztály a készüléképítés időszaka alatt igyekezett elsajátítani mindazokat az ismereteket, amelyek ezen készülékek felhasználásához a magfizikai vizsgálatoknál szükségesek. Ugyanakkor a jövő kutatók képzéséhez nyújt segítséget a 15. ábrán



1. Porcelán szigetelő.
2. Összekötő gyűrű.
3. Első gyorsító elektróda.
4. Tartó serleg.
5. Elektróda tartó lap (plexiből).
6. Elektróda állító csavarok.
7. Vákuum tömítő gyűrűk.
8. Fedőlap.
9. Fedőlap rögzítő csavar.
10. Nagyfeszültségű bevezetők.
11. Ionforrás állító csavar.
12. Ionforrás tartó lemez.
13. Tombak csőmembrán.
14. Előfokuszáló lencse hengerei.
15. Hengereket tartó tárcsák.
16. Ionforrás kiszívó csúcs.
17. Kvarc-csövecske.
18. Ionforrás.
19. Wolfram elektróda.

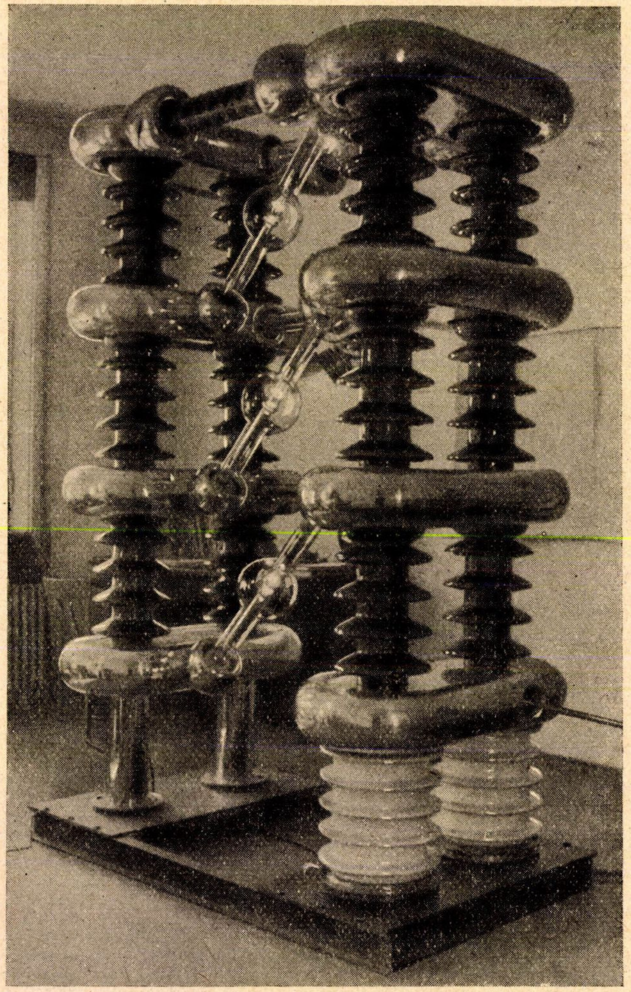
10. ábra. Az ionforrás és előfokuszáló rendszer szerkezeti rajza.

látható 700 kV-os szabadtéri elektrongyorsítóval, amelyet a Műegyetemi Elméleti Villamosságtan Tanszéke állított üzembe kizárólag hallgatói mérések céljára.

Végül köszönetemet szeretném kifejezni azoknak, akik közreműködtek az itt bemutatott készülékek létrejöttében. Erő János és Schmidt György az első gyorsítási kisérleteknél segédkeztek. Erő János kisérletezte ki az ionforrást. Mérey Imre a kaszkádgenerátor tervezésében, kivitelezésében, Pásztor Endre, Roosz József, Siegler Jánosné a gyorsító megvalósításában, Kosztka

PÁL a tankgenerátor felépítésében és mérésében vett részt, KÁLMÁN GÁBOR és VARGA LÁSZLÓ tervezte a 600 kV-os nagyfrekvenciás fűtésű generátort.

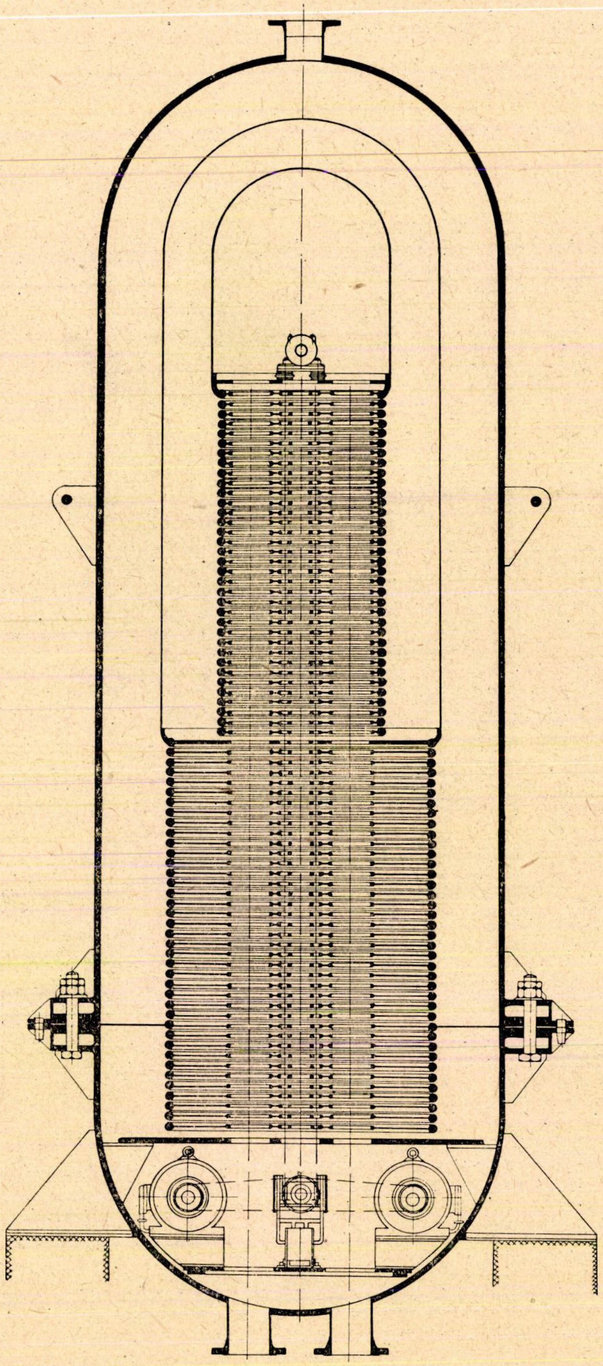
Külső munkatársak közül VARGA G. tervezte meg háború előtt az első magyar kaszkádgenerátort: az átalakító és transzformátor az ő generátorából



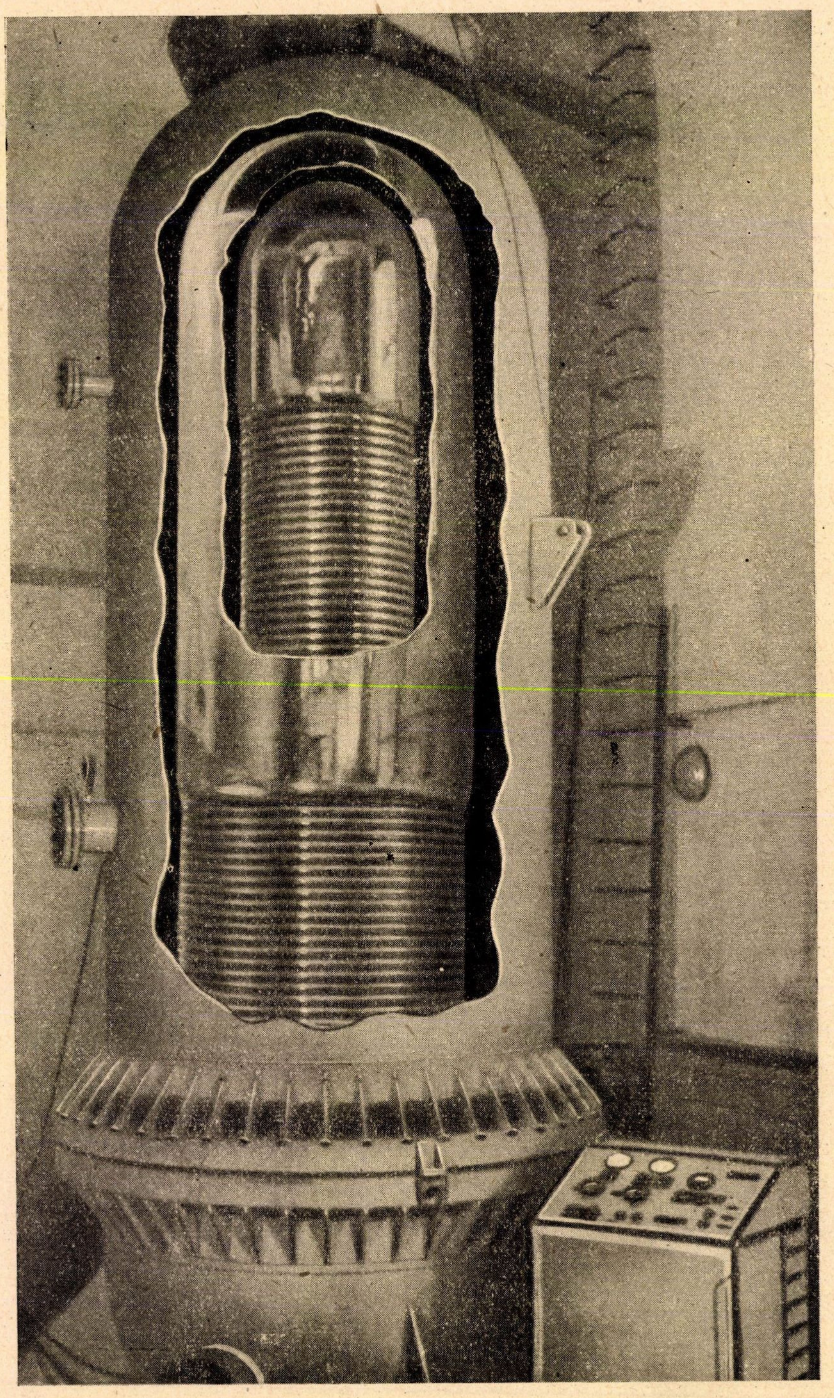
11. ábra. A KFKI Atomfizikai Osztályán épülő 600 kV-os gyorsító berendezéshez tartozó nagyfrekvenciás fűtésű kaszkád generátor fényképe.

való. LENGYEL főmérnök a Wilhelm Pieck gyár hídosztályán a tartályt, MARTON főmérnök a 4 MV-os készülék tisztítóberendezését készítette. SZALAY professzor intézetével folytatott tapasztalatcsere eredményeképpen szalagkonstrukciónkat javíthattuk meg.

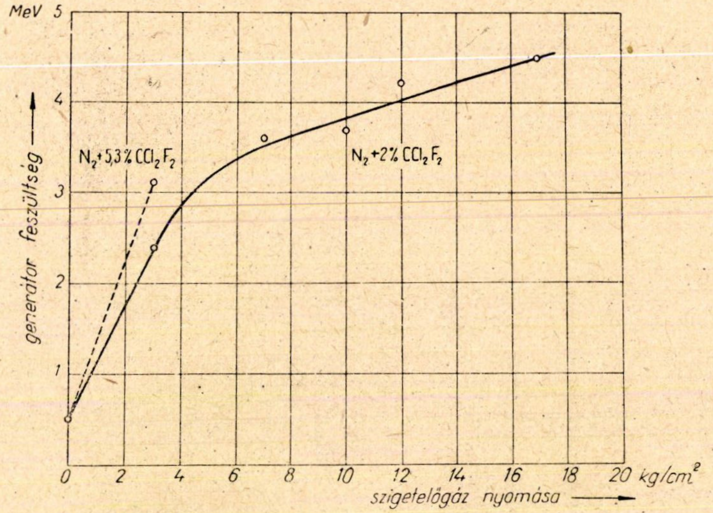
Külön köszönet illeti az Atomfizikai Osztály mechanikai és gyengeáramú műhelyét a készülékek kivitelezéséért.



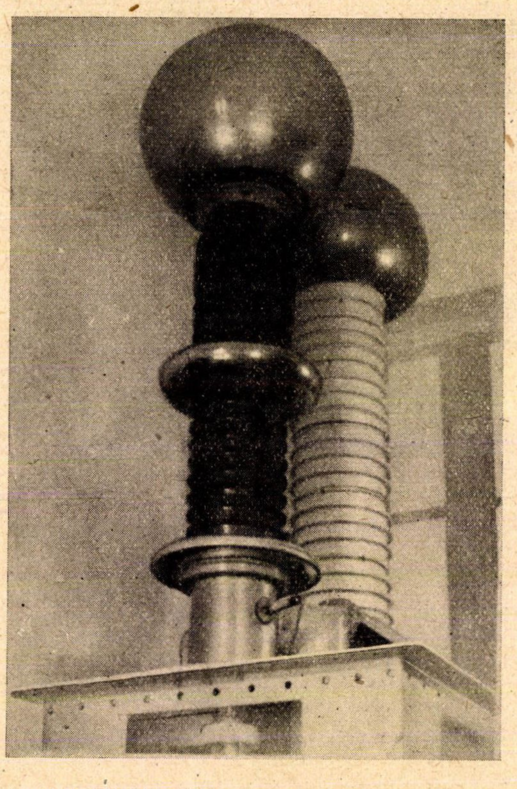
12. ábra. 4 millió voltos nyomás alatti Van de Graaff generátor szerkezeti rajza.



13. ábra. 4 millió voltos nyomás alatti Van de Graaff generátor fényképe (fotomontage).



14. ábra. A 4 millió voltos generátorral elérhető maximális feszültség és a szigetelő gáz nyomása közötti összefüggés.



15. ábra. A Műszaki Egyetem Elméleti Villamosságtan Tanszékén öszeállított és a hallgatók oktatását szolgáló Van de Graaff generátor a hozzátartozó elektron gyorsítócsővel.

ALBERT EINSTEIN EMLÉKEZETE*

SZAMOSI GÉZA

Tisztelt hallgatóság!

A megtisztelő és önmagában annyira vonzó feladatot, hogy századunk fizikája páratlan óriásának, a nagy gondolkodónak és humanistának, ALBERT EINSTEINnek életéről és munkásságáról beszéljek, most a szomorúság és gyász érzésével telíti meg a téma aktualitása. Még nincs egy hónapja, hogy hirüladták: ez az egyedülálló alkotásokban oly gazdag, munkás és harcos élet befejeződött. Fáradhatatlan szelleme nem küzd többé a természet legnehezebben hozzáférhető törvényeink megismeréséért, igazság- és emberszeretete nem hív többé harcra a gonoszság és pusztítás erői ellen. Életét ezentúl nem a kortársak, hanem a történelem tartja számon, alakja a dolgozóasztal mellől a tudomány Pantheonjába költözött, abba a terembe, melyben a legnagyobbak foglalnak helyet.

Halálán elszomorodott az emberiség nagyobbik és jobbik része, azok a milliók, akik nevében az alkotó tudomány szimbólumát látták és még sokáig fogják gyászolni mindazok, kik szaktudományuk révén talán az ő alkotásait tanulva érezték meg leginkább az emberi szellem teljesítőképességét és hatalmát.

Tisztelt hallgatóság! Feladatom most áttekinteni EINSTEIN életének külső lefolyását és vázlatosan ismertetni munkásságának akkora töredékét, amekkorát az előadás keretei megengednek. Mondanivalóm tartalma tehát távolról sem lesz teljes, e mozaikokból nem tehetjük össze munkásságának egész képét, de éppen így nem lesz objektív sem. Azokat a részeket választottam ismertetésem tárgyának, melyeket jellegzetesnek tartottam EINSTEIN életművének megítélése szempontjából, s bár úgy gondolom, helyemben sokan mások is éppen ezeket a részeket szemelték volna ki, mégis szükséges hangsúlyozni minden effajta választás szubjektív és önkényes voltát különösen akkor, mikor olyan hagyatékból merítünk, melyben a fizika legtöbb ágának művelője megtalálhatja a számára legértékesebbnek és leggyümölcsözőbbnek igérkező jusst.

ALBERT EINSTEIN Németországban a württembergi tartomány Ulm városában született 1879. március 14-én. E városnak további szerepe nem is volt

* Előadás, mely elhangzott az MTA III. osztálya és a TTIT fizika-kémiai szakosztálya által rendezett ALBERT EINSTEIN emlékesten, 1955. május 13-án.

életében, alig egy éves, mikor családja Münchenbe költözik. Münchenben, a bismarcki Németország egyik legfontosabb kulturális és tudományos centrumában tölti gyermekéveit. Apja ekkor kis elektromos üzem tulajdonosa, amely elektromos cikkeket, dinamókat, galvánelemeket állít elő, s mely periodikusan hol egzisztál, hol tönkremegy, s az idő múlásával egyre kevésbé biztosítja a kis család megélhetését.

Gyermekkoráról semmi különös nevezetességet nem említenek életrajzírói. Tíz éves korában kerül a müncheni Luitpold gimnáziumba és tizenhárom éves, mikor szülei — a kis üzem végleg tönkrement — Milánóba utaznak új egzisztenciát teremteni. EINSTEIN Münchenben marad, de egyre nehezebben viseli el e porosz szellemű tanintézet katonás fegyelmét, tizenöt éves korában saját elhatározásából tanév közben megszökik a gimnáziumból és szülei után Milánóba megy.

Olaszországi tartózkodása alatt szülei ismét tönkremennek. EINSTEIN nagynénje támogatásával Svájcba utazik, hogy beiratkozzék a zürichi politechnikai főiskolára, Közép-Európának abban az időben egyik legszínvonalasabb intézményébe. Szándéka meghiúsul, mert a felvételi szervek, bár méltányolják matematikai-fizikai ismereteit, egyéb tárgyakból mutatott felkészültségét nem tartják kielégítőnek főiskolai tanulmányokra. Be kell íratkoznia az aaraui középiskolába, hogy szabályos maturát szerezzen. Ezt egy év alatt meg is szerzi, így az 1896-os évben beiratkozik a zürichi politechnikai főiskolára, s mérnöki tanulmányokat folytat. Egész tanulmányi ideje alatt nagynénje csekély támogatásából él, szülei nem tudnák taníttatni.

Az ETH-n — ahogyan e főiskolát röviden nevezni szokták — eltöltött évek már igen lényegesek lesznek a nagy tudós későbbi életmenete szempontjából. Elsőrangú tudósok előadásait hallgatja, különösen a matematikai képzés színvonala magas. Nem kisebb emberek ülnek a katedrán, mint ADOLF HURWITZ, a függvénytan kitünő tudósa és a speciális relatívitáselmélet matematikai apparátusának későbbi kiépítője: HERMANN MINKOWSKI. A fizikai tanszékek vezetői között nem találunk ilyen kiválóságokat, különösen az elméleti fizikai képzés hagy kívánnivalót maga után. EINSTEIN évfolyamtársai között van MILEVA MARIC, a nála négy évvel idősebb horvát lány, későbbi első felesége és gyermekei anyja, továbbá a magyar származású GROSSMANN MARCELL, az ETH későbbi geometria-professzora, akivel EINSTEIN egy életre szóló barátságot köt, s akinek majd része lesz az általános relativitáselmélet matematikai problémáinak kidolgozásában, ő fogja megismertetni *Einsteint* a *Ricci* és *Levi-Civita* által kidolgozott általános differenciálgeometriával vagy abszolút differenciálkalkulussal, az általános relativitáselmélet matematikai apparátusával.

Tanulmányi ideje alatt EINSTEIN szorgalmasan dolgozik. Kissé különcnek tartják, aki szeret a maga útjain járni, nem követi mindenben a tanulmányi előírásokat. Sokat dolgozik ugyan a laboratóriumban, ám előadások hallgatása helyett idejét KIRCHHOFF, HELMHOLTZ, HERTZ és a kor más nagy fizikusai műveinek szenteli. Nem túl nagy kaliberű oktatói ezért bizonyos ellenszenvvel viseltetnek iránta, s így mikor 4.9-es, a közepesnél jobb átlaggal 1900-ban leteszi diplomavizsgáját, négy férfi évfolyamtársa közül egyedül ő nem kap asszisztensi állást az egyetemen és sürgősen megélhetés után kell néznie.

Az ifjú tanár — MARCELL GROSSMANN befolyásos apjának közbenjárására — rövidesen állást kap először egy kis technikumban, majd 1902-ben a zürichi állami szabadalmi hivatalban. Feladata itt a beérkezett találmányok műszaki leírása, elbírálása, mely munkát kifogástalanul elvégzi, főnökei meszszemenően meg vannak vele elégedve, előléptetik, stb. Többször felemlíti, hogy e munkakörben nagyszerű alkalma volt technikai érzékét kifejleszteni és valóban, fejlett technikai érzékének későbbi pályája során sok tanújelét adja még. Ebben a hivatalban dolgozik hét esztendőn keresztül, s csak mint elismert tudós 1909-ben válik meg tőle, hogy majd egész idejét a tudományos munkának szentelje.

Későbbi pályafutására még visszatérünk, ám érdemes megjegyeznünk, hogy az a fiatal tudós, aki 1905-ben megjelent három nevezetes dolgozatával, páratlan földrengést okozott a fizika birodalmában, ebben az időben nem egyetemi tanár, még csak nem is asszistens, hanem egyszerű műszaki hivatalnok egy szabadalmi irodában.

Páratlanul termékeny évek ezek. Első dolgozatai még diplomamunkájával kapcsolatos témakörből erednek, s 1901—1905-ig jelennek meg az Annalen der Physikben. Témájuk molekulárkinetikai és termodinamikai. Már ebben az időben sokat foglalkoztatták az anyag atomos szerkezetével kapcsolatos kérdések, a vita, hogy az atomokat a kémikus munkahipotéziseként vagy reális létező valóságként kell-e tekintenünk. Ma szinte megdöbbenve olvassuk, hogy mindazon sikerek ellenére, melyeket a molekuláris fizika ebben az időben már elért, kétségesnek lehetett tekinteni az atomok valóságos egzisztenciáját. Ennek okát abban találhatjuk, hogy bár a kinetikus gázelmélet és különösen annak BOLTZMANN által megadott zseniális továbbfejlesztése, a statisztikus mechanika segítségével a gázok sok tulajdonságát lehetett molekulárkinetikailag értelmezni, sőt a fenomenológikus elméletek eszményképéül szolgáló termodinamika is új értelmezést nyert a statisztikus mechanika segítségével, mégsem volt ismeretes egyetlen jelenség sem, melyből az atomok létezésére, azoknak a kinetikus elmélet megkövetelte rendezetlen mozgására közvetlenül következtetni lehetett volna. A fiatal tudóst rendkívül izgatták ezek a kérdések és néhány hasonló témájú dolgozat után 1905-ben megjelenteti alapvető jelentőségű cikkét a Brown-féle mozgásról. Ez a munka történetileg az első, mely közvetlen kísérleti lehetőséget ad a molekulaelmélet igazolására.

BROWN angol botanikus fedezte fel 1827-ben azt a sajátságos jelenséget, hogy ha folyadékban szuszpendált részeket — ő maga virágport használt — mikroszkóp alatt vizsgálunk, megfigyelhetjük azok szüntelen, teljesen szabálytalan mozgását. Akadtak már EINSTEIN előtt fizikusok, akik a jelenséget a molekulák rendezetlen mozgására látták visszavezethetőnek, a probléma azonban nagy nehézségei miatt megoldatlan maradt. EINSTEIN maga is említett dolgozatában igen óvatosan fogalmaz. Ezt írja: *„E munkában megmutatjuk, hogy a hő molekulárkinetikai elmélete szerint a folyadékban szuszpendált mikroszkopikusan látható nagyságú testek a molekulák hőmozgása következtében olyan mértékű mozgást kell végezzenek, melyet mikroszkóppal könnyen észlelni lehet. Lehetséges, hogy az itt tárgyalt mozgás az ún. Brown-féle mozgással azonos. A számomra hozzáférhető adatok az utóbbiról azonban oly pontatlanok, hogy ezekből nem tudok magamnak ítéletet alkotni."* Csak a rákövetkező 1906-os évben megjelent második munkájában, melyben továbbfejleszti elgondolásait, mondja ki határozottan, hogy a Brown mozgás az általa tárgyalt jelenséggel azonos.

EINSTEIN ebben az atomfizika későbbi fejlődése szempontjából annyira jelentőségteljes cikkben már megmutatja oroszlánkörmeit. Az általa tárgyalt probléma rendkívül nehéz és akkoriban szokatlan módszereket kívánt. Gondoljunk el egy testecskét kb. ezredmilliméter átmérővel. Egy ilyen test hozzávetőleg százmilliárd atomot tartalmaz. Ha e kis test folyadékban vagy gázban lebeg, úgy a környező anyag molekulái, amelyek állandó mozgásban vannak, szüntelen beleütköznek. Az egyes ütközések a molekulák kicsiny tömegei miatt praktikusan hatástalanok lesznek, a testecskét nem gyorsítják még akkor sem, ha nem egy molekulának a sebessége száz métereket tesz ki másodpercenként. E lökések azonban teljesen szabálytalanul, minden oldalról, átlag minden billiomodik másodpercben követik egymást, s ezek hatása alatt a testecske végül is teljesen szabálytalan mozgással egy rendkívül komplikált pályát fog leírni. EINSTEIN e bonyolult problémánál megtalálja azt a jellegzetes mennyiséget, mely a mérés számára hozzáférhető és a statisztikus módszerek iránt való kifinomodott érzékével, melyről egyébként későbbi pályáján még sokszor fog tanuságot tenni, sikerül e mennyiséget elméletileg meghatároznia. Tekintsük a részecske helyét egy pillanatban és kérdezzük, ettől a helytől milyen messze lesz átlagosan testecskénk adott idő elteltével. Erre a kérdésre EINSTEIN teljes szabatossággal válaszolni tud, meglepően egyszerű matematikai módszerrel meghatározza ezt az átlagos eltolódásnak nevezett mennyiséget, s megállapít egy törvényt, mely kimondja, hogy az átlagos eltolódás az idő négyzetgyökével, a folyadék hőmérsékletének négyzetgyökével változik s megadott módon függ a részecske sugarától, valamint a folyadék viszkozitásától.

Mint látjuk, EINSTEIN a Brown-féle mozgásban a molekulák hőmozgásának teljesen hű, csak rendkívül lelassított és így aránylag könnyen megfigyelhető képét találta meg. Elmélete így a molekulák rendezetlen hőmozgását a közvetlen mérés számára hozzáférhetővé, más szóval a hő kinetikus elméletét a nagyon valószínű hipotézis rangjáról a tapasztalat tárgyává, bizonyossággá tette.

EINSTEIN úttörő munkássága nyomán a BROWN-mozgás számos elméleti és kísérleti vizsgálat tárgya lett. A megfigyelések, melyeket különösen egyszerűvé tett a SIEDENTOPF és ZSIGMONDY által ez időben feltalált ultramikroszkóp, EINSTEIN elméletét teljesen igazolták. PERRIN erre vonatkozó igen gondos mérései ezenkívül az AVOGADRO-féle szám abban az időben egyik legpontosabb meghatározását is lehetővé tették. A BROWN-mozgás és elmélete ma már egyetemi, sőt részben középiskolai tanulmányok anyaga, ma is egyik legszebb példája a kinetikus hőelmélet igazságának s ezzel együtt a valószínűségszámítás módszerei hatékonyságának.

Így lép a nyílvánosság elé EINSTEIN, az atomfizika kimagasló alakja. Bár ma már nyilvánvaló, hogy legnagyobb alkotásai nem az atomfizika tárgyköréből valók, mégis csupán e területen végzett munkássága elegendő volna ahhoz, hogy az atomfizika úttörői között emlegessük. Hiszen egészen 1924-ig jelennek meg atom- és molekulafizikával foglalkozó dolgozatai. Több munkában foglalkozik a BROWN-mozgás elméletének továbbfejlesztésével, kidolgozza a fajhők alacsony hőmérsékleten érvényes elméletét, magyarázza a gázok elfajulását, foglalkoztatja a felületi feszültség hőmérsékletfüggésére vonatkozó nevezetes EÖTVÖS-törvény. De HAAS-szal 1915-ben elvégeztet egy kísérletet, mely az AMPÈRE-féle molekulaáramok realitását van hivatva meglepően egyszerű módon igazolni, s a kísérlet váratlan eredménye az elektronspin egy nagyszerű közvetlen bizonyítéka, a mai napig a modern kvantummechanika egyik tapasztalati alapja lesz. Amihez hozzányúl, azt előreviszi az atomfizika e hősi korszakában.

Térjünk azonban vissza az 1905-ös évhez. A szabadalmi hivatal tisztviselője ugyanebben az évben, ugyancsak az Annalen der Physikben egy másik cikket is megjelentet, melynek címe: „Egy a fény keletkezésére és átalakulására vonatkozó heurisztikus szempontról". Ezért a nem egészen tizenhét oldalas dolgozatáért tizenhat évvel később a Nobel-díjat kapja meg. Valóban megérdemelten, hiszen ez a munka új fejezetet nyit a fény természetére vonatkozó ismereteink fejlődésében, az e kérdés körül folyó gyakran szenvedélyes, önmagában is lebilincselően érdekes harcban, melynek eredete még az ókorra nyúlik vissza.

Érdemes ennek a küzdelemnek néhány jellegzetes mozzanatát felidézni. A fény első tudományos céllal alkotott elmélete az ókori, görög-római atomisták munkája. E primitívségben is megkapó elmélet alapgondolatát LUCRETIUS CARUS, a költő-filozófus „De rerum natura" c. tankölteményében a következőképpen mondja ki:

„Im tudjátok meg: a testek hasonmásokkal bírnak, ezek nem mások, mint egyfajta könnyű hártyácskák, melyek a testek felületéről elszabadulnak és minden irányban röpdösnek a légen át. E képek egyetlenegy pillanatban kimondhatatlan tereket kell átszeljenek, ugyanis igen kicsiny részecskék és valamely rájuk ható erő űzi őket; továbbá oly ritka felhőkben szállnak, hogy ezáltal mindenen könnyedén át tudnak hatolni és valamiképpen a légen is át tudnak suhanni." LUCRETIUS e nézetei hosszú időn keresztül uralták a fény természetét illető elgondolásokat. Részecskék áramának tartotta a fényt ROGER BACON, a középkor legvilágosabb szelleme, sőt maga NEWTON is, aki éppen e felfogás segítségével tudta a fény egyenesvonalú terjedését, a fénytörés és visszaverődés egyszerű törvényeit értelmezni.

Ám a fejlődésnek ezen a pontján megszűnt a nézetek harmóniája. HUYGHENS, NEWTON kortársa, ez a rendkívül élesen látó holland fizikus, ragyogó következtetésekkel megmutatta, hogy a fény abban az időben ismert tulajdonságai levezethetők akkor is, ha feltételezzük, hogy a fény hullámszerűen terjed valamely számunkra láthatatlan közegben. A vita fellángolt és egészen a XIX. század közepéig tartott. A fény viselkedésére vonatkozó ismeretek eddig az időig azonban jelentékenyen megszaporodtak. Az új jelenségek, különösen FRESNEL és YOUNG munkássága nyomán, már egyértelműen biztosították a fény hullámfelfogásának győzelmét, s így a hullámelmélet végső kifejlődését, MAXWELL és HERTZ munkásságát már inkább e harcot befejező diadalmenetnek tekinthetjük. A XIX. század végén a fény elektromágneses hullámelmélete a fizika egyik legjobban megalapozott ága volt.

Nem lehet célunk most a fizika történetének egyik legszebb forradalmát, a kvantumelmélet kialakulását végigkövetni. Két tényt mégis fel kell említenünk. 1900-ban MAX PLANCK berlini fizikus — századunk fizikájának EINSTEIN mellett legkiemelkedőbb alakja — az ún. fekete test által kibocsátott sugárzás spektrális eloszlását vizsgálva arra a különös eredményre jutott, hogy a tapasztalt tényekkel csak akkor juthat összhangba, ha felteszi, hogy a fénykibocsátásáért felelős elemi anyagi oszcillátorok energiájukat nem folytonosan, hanem diszkréten, ugrásokban adják le. E folyamatok diszkontinuitásának mértéke egy új állandó, melyről később kiderült, hogy egyike a természet alapvető mennyiségeinek, s melyet ma PLANCK-állandónak nevezünk. Ez az egyszerű felismerés — mely teljesen ellentétben van a csak folytonos átmeneteket ismerő egész klasszikus fizikával — lett később az egész modern fizika alapja. PLANCK maga ez időben nagyon megijedt következtetésének merészségétől. Igen óvatos forradalmár volt és igyekezett eredményeit úgy megfogalmazni, hogy minél kisebb konfliktusba kerüljön az akkor uralkodó klasszikus nézetekkel.

A kompromisszumos álláspontok azonban nem elfogadhatók. Ezt legvilágosabban EINSTEIN érezte. Ebben az időben ugyanis sokat foglalkoztatták a fotoelektromos jelenségnél tapasztalt érthetetlennek látszó tények. Képzeljünk magunk elé egy fémlemezt, melyet fénnyel világítunk meg. A fény energiát ad át a fémben levő elektronoknak. Ennek az energiának birtokában az elektronok képesek lesznek a fémből kilépni, s az eddig elektromosan semleges fémlemez pozitív elektromos töltést kap. A jelenséget HERTZ egy korai munkája nyomán HALLWACHS angol és STOLJETOV orosz fizikusok fedezték fel a múlt század végén. E folyamat alapos kísérleti vizsgálatok tárgyává lett, s ezek a vizsgálatok érthetetlennek látszó eredményre vezettek. E jelenségek két nevezetes tulajdonságát kell elmondanunk. Az egyik az, hogy a kísérletek tanúsága szerint a fémből kilépő elektronok energiája, vagy ha úgy tetszik sebessége, egyáltalán nem függ a beeső fény intenzitásától. Ez a klasszikus fényelmélet szerint érthetetlen, hiszen meg lehet mutatni, hogy egy fénynyaláb energiáját egyedül annak intenzitása szabja meg. A másik meglepő tapasztalat az volt, hogy az elektronok kilépése abban a pillanatban megkezdődik, mihelyt a lemezt fény éri. Márpedig nyilvánvaló volt, hogy bizonyos időre van szükség, míg a fény annyi energiát ad át egy elektronnak, amennyire annak a fémből való kilépéséhez szüksége van. A számítások azt mutatták, hogy órákba telne a szükséges energia átadása. E folyamat két olyan tulajdonságot mutat tehát, melyek a fény klasszikus elméletének ellentmondanak. Jegyezzük azonban meg, hogy a korbeli fénytani könyvek a fény összes ekkor ismert tulajdonságát könnyen és természetesen magyarázták a klasszikus hullámelmélet alapjain. A fotoelektromos effektus ekkor még az *egyetlen* olyan jelenség, mely a klasszikus elmélet segítségével nem értelmezhető.

Ahogyan EINSTEIN ekkor a kérdéshez nyúl, tükrözi legjellegzetesebb tulajdonságait: eredeti gondolkodásmódját, a tapasztalat mindenek fölé helyezését és hallatlan intellektuális bátorságát. A fotoelektromos jelenség magyarázatát PLANCK eredményeiben találja. Zseniális kombináló készséggel és tudományos merészséggel kiterjeszti a kvantumos leírást a fényabszorpció elemi aktusára. Kimondja: az egyes elektronok által felvett energia egyedül a fény frekvenciájától függ, s ezt az energiát az elektronok kvantumosan nyelik el. Felírja az elektronok sebességét a fény frekvenciájával összekapcsoló egyenletét, melynél egyszerűbb egyenletet el sem lehet képzelni, s melyet ma minden középiskolás diák ismer. A fotoelektromos jelenség minden további nélkül érthetővé válik. Ám ennek az érthetőségnek hatalmas ára van. Teljes ellentmondásba kerülünk a klasszikus fizikával, végsőkig élezzük a PLANCK által felidézett ellentmondásokat a klasszikus fizika és egyes új jelenségek magyarázata — ma úgy mondanók, a modern fizika — között. Bizonyos értelemben visszatérünk a fény régen elavultnak gondolt korpuszkuláris elméletéhez. EINSTEIN kimondja, hogy a fényben energiakvantumok, fotonok terjednek tova. Talán nem is lehet csodálni, hogy ezt a forradalmian gyors szembefordulást a régi gondolatokkal, a kortársak nemigen voltak hajlandók elfogadni. Nemcsak hogy rögtön, de évekkel később sem. Történelmi tény a következő, ma már mulatságosnak tűnő történet. 1913-ban, midőn EINSTEINT a Porosz Tudományos Akadémia tagjai közé választja, négy világhírű tudós: PLANCK, NERNST, WARBURG és RUBENS hivatalos okmányban ismerteti érdemeit. Hosszasan foglalkoznak alkotásai méltatásával, rámutatnak egyedülállóan értékes munkásságára, ám az okmány végén a következők olvashatók: *„Összefoglalóan azt mondhatjuk, hogy azon nagy problémák közül, melyekben a modern fizika oly gazdag, alig van olyan, melyhez Einstein figyelemre méltó módon állást nem foglalt volna. Azt, hogy gondolkodásai közben egyszer, mint a fénykvantumok esetében, túllőtt a célon, nem szabad neki túlszigorúan felróni.“* Így vélekedett tehát a fénykvantumokról nyolc évvel EINSTEIN úttörő cikkének megjelenése után négy világhírű fizikus, köztük MAX PLANCK, a kvantumelmélet megalapozója. Csak a történeti hűség kedvéért jegyzem meg, hogy az atomfizika további fejlődése ezután már igen gyorsan igazolta Einsteint, amit az is mutat, hogy — mint említettem — éppen ezért a dolgozatáért kapott 1921-ben Nobel-díjat.

EINSTEIN későbbi pályája során még sokszor fogja a foton elméletét továbbfejleszteni. Ilyen témájú vizsgálatainak ismertetése külön előadást, sőt előadássorozatot igényelne. Csak utalásszerűen említem fel két gyönyörű eredményét, formuláját a fotonszám ingadozásának meghatározására, melynek legjobb kísérleti igazolása a kiváló szovjet fizikus, VAVILOV nevéhez fűződik és a PLANCK-féle sugárzási formula megkapóan egyszerű, tisztán statisztikus módszereket használó levezetését.

Mindezen ragyogó eredmények a század második évtizedében születtek, ám nekünk ismét vissza kell térnünk az 1905-ös évhez, hogy mondanivalónk harmadik fonalát is felvegyük. Ebben a nevezetes évben EINSTEIN egy harmadik dolgozatot is közzétett — ismét az Annalen der Physikben — melynek címe: „Mozgó testek elektrodinamikájáról“, s mely az elméleti fizika szépségekben éppen nem szegény épületének egyik legszebb tégláját, a speciális relativitáselméletet tartalmazza. Ha vannak a halhatatlanságnak fokozatai, akkor összes művei közül talán ez a műve teszi leginkább azzá.

Hogy jelentőségét méltassuk, néhány szóval fel kell idézni az előzményeket. Említettük már, hogy a fény tulajdonságainak századokon át való vizsgálata bebizonyította a fény hullámtermészetét. Az elektrodinamika teljes kifejlődése, MAXWELL munkássága lehetővé tette, hogy az egész fénytant a klasszikus elektrodinamika egy fejezeteként tekinthessük. MAXWELL elméletének idevágó részét 1887-ben HERTZ kísérletileg is bebizonyította. Az a logikus kérdés, hogy elektromágneses hullámok, közöttük a fény is, milyen közegben terjednek, abban az időben nemigen okozott fejtörést. A klasszikus fizika nagyjai rendületlenül hittek egy mindenhol jelenlevő súlytalan, közvetlen megfigyeléssel érzékelhetetlen anyagban, melyet éternek neveztek. Ennek az általános hitnek mély gyökerei voltak. Összefüggött ez a klasszikus mechanikában NEWTON óta meggyökeresedett szemlélettel, az abszolút térrel és az abszolút idővel. Az elektromágneses jelenségeknek az a tulajdonsága, hogy értelmezésük igényli az éter fogalmát, kézenfekvővé teszi az abszolút tér értelmezését is. E tekintetben teljes az összhang az egyébként oly különböző fogalmakkal és módszerekkel operáló klasszikus mechanika és elektrodinamika között.

MAXWELL, aki természetesen teljesen elfogadta az éterhipotézist, még a múlt század közepén kigondolt egy kísérletet e hipotézis igazolására. Az alapgondolat a következő: Ha a fény az éterhez képest terjed tova, akkor világos, hogy ha egy mérőberendezést az éterhez képest mozgatunk, akkor a fény terjedési sebességét másnak fogja a berendezés mérni akkor, ha ugyanazon irányban mozog, mint a fény és megint másnak, ha ellenkező irányban mozog. Ha vízhullámokat hajóból figyelünk, akkor másnak látjuk terjedési sebességüket, ha hajónk a hullámok terjedésének irányába megy, mintha szembe megyünk velük. Az éter hajóját sem volt nehéz megtalálni, nem más ez, mint Földünk, amely tekintélyes, másodpercenként 30 km-es sebességgel szeli az étert. S ha már úgyis rajta ülünk a hajón, csak alkalmas berendezés kérdése, hogy a várható effektust megmérjük, a Földnek az éterhez, az abszolút térhez viszonyított mozgását bebizonyítsuk. Az optikai műszerek fejlődése már 1881-ben elérkezett odáig, hogy MICHELSON a vázolt kísérletet végrehajthatta. A kísérleti berendezés a várható eredmény tört részét is mérni tudta volna, ám a mérés eredménye teljesen negatív volt. Semmilyen nyoma nem volt látható annak, hogy a Föld az éterhez képest mozogna. A kísérletet néhány ezzel analóg gondolatmenetű más kísérlettel együtt azóta sokszor megismételték mind nagyobb pontossággal, az eredmény mindig az volt, hogy a Föld nem mozog az éterhez képest. MICHELSON kísérletének negatív eredménye nagy meglepetést keltett és ijesztő repedést mutatott a klasszikus fizika addig hibátlannak tűnő épületén.

A fiatal EINSTEIN e problémánál olyan megoldással áll elő, mely éppen egyszerűségével döbbenti meg a kortársakat. Úgy tesz, mintha nem is tudna a klasszikus fizika hatalmas eredményeiről és kijelenti: az éterhipotézist semmilyen kísérlet sem fogja igazolni, egyszerűen azért, mert éter nincs. A misztikus éterfluidumot a fizikakönyvekből tegyük a történelemkönyvekbe, a hőfluidum, az elektromos fluidum és a XVIII. század mechanisztikus világnézetének egyéb hasonló teremtményei mellé. Ha pedig éter nincs, akkor abszolút tér, abszolút vonatkoztatási rendszer sincs és ebből következően a MICHELSON-kísérlet azt bizonyítja, hogy a fény minden egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző rendszerben egyforma sebességgel terjed. Kimondja továbbá, hogy a fizika összes törvényei változatlanok, ha két olyan rendszerben vizsgáljuk őket, melyek egymáshoz képest egyenletesen mozognak. Ez a két állítás az, melyen a speciális relativitáselmélet nyugszik.

Sok helyt lehet olvasni lelkes szavakat ezen tételek merészségéről, arról, hogy milyen bátorság és éleslátás kellett arra rájönni, hogy az akkor meggyökeresedett éterfogalom üres hipotézis, a newtoni mechanika abszolút vonatkoztatási rendszere nem létezik. Úgy gondolom azonban, hogy az éterfogalom elvetéséhez nemigen kellett különös éleselméjűség. Lehetetlen, hogy a MICHELSON-kísérlet negatív eredményének, az éter tulajdonságaira vonatkozó ellentmondó és inkonzekvens elméletek láttára már EINSTEIN előtt is sok fizikusban nem merült volna fel a gondolat: hátha nincs is éter? A zsenialitás és bátorság nem ehhez kellett, hanem az éter elvetésével járó *összes következmények vállalásához.* Ez az, ami EINSTEIN e munkáját oly csodálatra méltóvá teszi. A MICHELSON-kísérlet negatív eredményét — épp úgy, mint a fényelektromos hatás különös eredményeit — egyszerűen tudomásul veszi és levonja belőle az összes konzekvenciákat. Ezek a konzekvenciák azonban első hallásra ijesztők és forradalmiak, majdnem hihetetlenek. A kortársakban a kor világképéből következőleg szinte a priori adott kategóriákként szerepel az abszolút, minden anyagtól és mozgástól független tér és idő fogalma. Az éter elvetésével ezek a fogalmak minden értelmüket elvesztették. Relatívvá, a mozgásállapot függvényévé vált a távolság és időtartam, elvesztette abszolút jelentését például az egyidejűség. Nem lehet csodálni tehát ismét a kortársak idegenkedését. Kevesen vannak ebben az időben, akik a dolgozat jelentőségét felismerik. A maradi felfogásúak botrányosnak tartják EINSTEIN nézeteit. Regényt lehetne írni az elmélet körül kitört heves harcok történetéről.

Ma már túl vagyunk mindezeken, e harcok a történeleméi lettek. A speciális relativitáselmélet a fizika sokszorosan igazolt, kipróbált ága, sőt a legtöbb fizikakönyv ma már nem is sorolja a modern fizika ágai közé, a klasszikus fizika betetőzésének tekintjük. Tisztán látjuk viszonyát a klasszikus fizikához, látjuk, hol elégséges a newtoni mechanika használata, és hol kell a relativitáselmélet mechanikájához fordulnunk. Semmi meglepőt sem találunk abban, hogy pl. a hídépítő mérnökök a newtoni mechanika törvényeit használják, ám az atomfizikai berendezéseket konstruáló mérnök már a relativitáselmélet mechanikájából következő technikát használja. Természetesnek veszszük, hogy a látszólag spekulatív jellegű relativisztikus időfogalom a kozmikus sugárzás kísérleti kutatójának mindennapos kenyerévé vált. A relativitáselmélet a folyóiratok hasábjain élte gyermekkorát, vívta harcait életképességéért, de a gyakorlat tűzpróbáján nőtt fel és lett a fizika már megszokott, természetesnek vett ágává. Nagy elégtétel lehetett az oly sok harcot vívott tudósnak, hogy mindezt megérhette. Ilyen szempontból szerencsésebb volt forradalmár őseinél, KOPERNIKUSnál és GALILEInél.

Tévednénk azonban, ha azt gondolnók, hogy a relativitáselmélet önmagában fejlődött csupán, helyessége csak saját területén bizonyosodott be. Ereje és igazsága éppen ott mutatkozik meg talán legszemléletesebben, ahol elhagyván eredeti problémakörét, a fizika más ágainak megtermékenyítőjévé válik. Ennek a folyamatnak története még távolról sincs lezárva, napjainkban is változatlan erővel tart tovább. Csak utalásszerűen jegyzem meg, hogy a relativitáselmélet — az EINSTEIN-féle fotonhipotézissel együtt — vezette DE BROGLIE-t a modern kvantummechanika alapjainak lerakásához. És a kvantummechanika talán legszebb sikerét akkor érte el, mikor DIRACnak sikerült az elmélet alapegyenletét a relativitáselmélet követelményeinek megfelelően átalakitania. Ez az egyenlet vezetett a pozitron előrelátásához, s a relativitáselmélet mutatott utat a mezonok létezésének megjóslásához. Ezek az eredmények mutatják talán legplasztikusabban a speciális relativitáselmélet mélységét, hiszen a nagy gondolatok jellegzetes tulajdonsága az, hogy teljes kifejlődésükben messze túllépnek az alkotójuk megszabta kereteken.

Szenteljünk néhány szót az elmélet egy eddig még nem említett következményének, annak a tételnek, mely kimondja a tömeg és energia ekvivalenciáját. EINSTEIN már régen ezt az eredményt tartotta a relativitáselmélet egyik legfontosabb következményének. Mikor leírta azt a meglepő állítását, hogy „egy test tömege mértéke energiájának. Ha energiája változik, tömege annak $9 \cdot 10^{20}$-ad részével változik meg, ha az energiát ergekben, a tömeget grammokban mérjük", még nem látszott semmi lehetőség állításának kísérleti igazolására. A kémiai reakciók energiatermelése aránylag oly kicsiny, hogy LANDOLT az e reakciókra felírt tömegmegmaradási tételt tízezermilliomodrész pontossággal tudta kísérletileg bizonyítani. Így a relativitáselméletnek ez az állítása is elvi érdekességűnek látszott csupán. Az atomfizika későbbi fejlődése azonban az atommag tulajdonságainak vizsgálata során elvezetett e tétel kisérleti igazolásához. A kísérleti igazolást a gyakorlat követte nyomon s így azt az állítást, hogy az atommag tömegének megváltozása valóban energiaváltozással jár, negyven évvel EINSTEIN művének megjelenése után, 1945-ben Japánban nyolcvanezer ember bűnös meggyilkolása igazolta a megdöbbent világ előtt.

Ám ha akadtak volna olyanok, akik ebben a tényben és az emberiségre azóta szakadt atomveszedelemben az alkotó tudomány feladatainak kilátástalanságát látták volna, azokat álláspontjuk tévességéről meggyőzhették a további fejlemények: a civilizáció történetében első energiatermelő atommáglyának üzembeállítása a Szovjetunióban 1954-ben, s az a nagylelkű segítség, mely éppen e napokban a mi hazánk előtt is megnyitja az atommagok tömegváltozása következtében felszabaduló energiák alkotó felhasználásának lehetőségét. Igy fonódik össze EINSTEIN alkotása napjaink gyakorlati kérdéseivel.

EINSTEINnek ezen kérdésekkel kapcsolatos tevékenységére még vissza fogok térni, most egyelőre vegyük fel életrajzának elejtett fonalát. 1909-ben tartunk, EINSTEIN már mint világhírű tudós kilépett a szabadalmi irodából és egyetemi tanár lett Zürichben. Később Prágába megy, majd ismét vissza Zürichbe, annak az egyetemnek a katedrájára, melynek egykor hallgatója volt. Végül 1913-ban igen kedvező ajánlatot kap Berlinből. PLANCK és már említett társainak közbenjárására, a német kormány meghívja akadémiai professzornak EINSTEINt, előadási kötelezettség nélkül, nagyon kedvező munkafeltételekkel. A nagyhatalmi álmokkal teli porosz kultúrpolitika e nagyszerű tudóssal erősíteni kívánja a német tudomány tekintélyét és hatalmát. EINSTEIN örül a nyugodt munka lehetőségének, de nincsenek illuziói. Németországba utazása előtt egy barátjának a következőket mondja: *„A németek úgy spekulálnak velem, mint egy premizált tojótyúkkal"*.

Németországban él mint a német tudomány egyik legnagyobb büszkesége, egészen a Hitler-fasizmus uralomrajutásáig, 1933-ig. Az 1909-től következő hét évben azonban ismét csodálatos alkotással lepi meg a világot. Sokéves megfeszített gondolkodás eredményeképpen 1916-ban eljut az általános relativitáselmélethez, ahhoz az elmélethez, mely a szellemi teljesítőképesség mértékét tekintve talán összes többi munkáját maga mögött hagyja. Engedjék meg, hogy e nagyszabású elmélet kialakulásának történetét saját szavaival beszéljem el.

„A speciális relativitáselméletben kifejezést nyert az összes tehetetlenségi rendszereknek a természeti törvények megformulázása szempontjából való teljes egyenértékűsége (1905). Közelfekvő volt ekkor a kérdés: nem áll-e fenn a koordinátarendszereknek ezen túlmenő ekvivalenciája? Másképp megfogalmazva: Ha a sebesség fogalmának csak relatív értelmet tulajdoníthatunk, fenn kell-e ennek ellenére tartanunk továbbra is a gyorsulás abszolút voltát?

Tisztán kinematikai szempontból nincs okunk kételkedni bármely mozgás relativitásában. Fizikailag azonban úgy látszik, hogy a tehetetlenségi rendszer kitüntetett jelentőséggel bír, így más vonatkoztatási rendszerek használata mesterkéltnek tűnhetik.

Mach felfogását természetesen ismertem. Szerinte elgondolható, hogy a tehetetlenség nem a kinematikai értelemben vett puszta gyorsulásnak, hanem a világ többi tömegeihez képest való gyorsulásnak az ellenhatása. A gondolat számomra megkapó, elegendő alapot azonban nem nyújtott egy új elmélet felépítéséhez.

A probléma megoldásához akkor jutottam egy lépéssel közelebb, amikor megróbáltam a gravitációs törvénynek a speciális relativitáselmélet keretei közt való tárgyalását. A többi kutatóhoz hasonlóan én is a gravitáció téregyenleteinek felállítására törekedtem. Közvetlen távolbahatás feltételezése az abszolút egyidejűség fogalmának elvetése után nem látszott lehetségesnek, hacsak nem elégszünk meg valamilyen erőltetett természetellenes feltevéssel.

A legegyszerűbb eljárás nyilvánvaló módon az volt, hogy megtartsuk a gravitációs tér skaláris potenciálját, melyet Laplace vezetett be és a Poisson-egyenletet egy idő szerint vett deriváltat tartalmazó taggal oly módon egészitsük ki, hogy az egyenlet a speciális relativitáselmélet követelményeinek eleget tegyen. A tömegpont gravitációs térben való viselkedését megszabó mozgástörvényt is összhangba kellett hozni a speciális relativitás elvével. Az ehhez vezető út kevésbé volt egyértelmű, hiszen a testek tehetetlen tömege a gravitációs potenciáltól is függhetett. Ez már az energia tehetetlenségének tétele miatt is várható volt.

Vizsgálataim e téren azonban olyan eredményhez vezettek, melyek engem a legnagyobb mértékben bizalmatlansággal töltöttek el. A klasszikus mechanika szerint egy függőleges nehézségi erőtérben mozgó test függőleges irányú gyorsulása független sebességének vízszintes komponensétől. Ezzel függ össze az a tétel, hogy egy mechanikai rendszer tömegközéppontjának függőleges gyorsulása ilyen erőtérben független a test kinetikus energiájától. Az általam felállított elméletben azonban nem valósult meg az erőgyorsulásnak a vízszintes sebesség-komponenstől, illetve a rendszer belső energiájától való függetlensége.

Az első próbálkozás eredménye tehát nem egyezett meg a régi tapasztalattal, mely szerint egy meghatározott erősségű gravitációs térben minden test azonos gyorsulással mozog. Most értettem meg ennek a tételnek, mely a tehetetlen és súlyos tömeg egyenlőségének tételeként is megfogalmazható, a mély jelentőségét. A legnagyobb csodálattal töltött el ennek fennállása. Sejtettem, hogy ez a tétel rejti a kulcsot, mely a tehetetlenség és gravitáció jelenségeinek mélyebb megértéséhez vezet. Noha — ha jól emlékszem — akkor még nem volt tudomásom Eötvös szép kísérleteinek eredményeiről, a tétel szigorú érvényességében komolyan soha nem kételkedtem. Ekkor vetettem el a gravitációnak a speciális relativitáselmélet keretei közt megkísérelt fenti tárgyalását, mint alkalmatlant. A megkísérelt elmélet nem tudott számot adni a gravitáció legalapvetőbb tulajdonságáról. A tehetetlen és súlyos tömeg egyenlőségének tételét szemléletesen így fogalmaztam meg: Homogén gravitációs térben minden mozgás úgy folyik le, mint gravitációmentes térben egy gyorsuló koordinátarendszerre vonatkoztatva. Ha ez a tétel bármilyen jelenség esetén érvényes (ekvivalencia elve), akkor arra utal, hogy a relativitás elvét ki kell terjesztenünk az egymáshoz képest gyorsulva mozgó koordinátarendszerekre is. Másként nem lehetséges a gravitáció olyan elméletének kidolgozása, mely erőltetett feltevésektől mentes. Ilyen gondolatok foglalkoztattak 1908 és 1911 közt. Megkíséreltem, hogy a fenti elvből speciális következtetéseket tudjak levonni. Ezekről most nem kívánok szólni. A fontos annak felismerése volt, hogy a gravitáció lényeget tükröző elmélete csak a relativitáselv kiterjesztésétől várható.

A feladat a következő: Olyan elméletet kell kiépíteni, melynek egyenletei nem-lineáris koordinátatranszformáció során is megőrzik alakjukat. Hogy teljesen tetszőleges (folytonos) koordinátatranszformáció esetére kell ennek érvényesnek lenni, vagy azok szűkebb típusára, az akkor még nem volt kézenfekvő számomra."

Ilyen töprengések útján jutott tehát Einstein az általános relativitáselmélet alapgondolatához. Még nagyon hosszú út volt hátra, míg eszméi a ma ismert formát öltötték fel. El kellett sajátítania az abszolút differenciálkalkulust, szakítania kellett azzal a hittel, hogy a valóságos térre feltétlenül az euklideszi geometria tételei érvényesek, fel kellett ismernie azt a páratlan mélységű gondolatot, hogy a tér szerkezetét nem lehet az anyagtól és a mozgástól függetlennek tekinteni és ezt a felismerést egzakt matematikai formába kellett öntenie. Páratlan teljesítmény ez, s nem lehet csodálni, hogy még sok téves gondolaton, látszólagos ellentmondáson kellett keresztülküzdenie magát, míg 1915-ben eljutott a gravitáció helyes téregyenleteihez. Erről az időszakról szólnak a következő szavai:

„Az elnyert ismeret birtokában, amit elértünk, szinte magától értetődőnek tűnik, azt egy értelmes tanuló minden nagyobb fáradság nélkül elsajátíthatja. De a sejtésekkel telt, éveken át tartó sötétségben tapogatódzást, a vele együtt járó feszült vágyakozással, a hit és kiábrándultság váltakozását, végül a világosság áttörését csak az ismerheti, aki mindezt maga is átélte.“

Most felmerül a kérdés, milyen helyet foglal el az általános relativitáselmélet napjaink fizikájában. Önkéntelenül LAGRANGE NEWTONról mondott szavai jutnak eszünkbe: „Nemcsak a legnagyobb, de a legszerencsésebb fizikus is volt, hiszen csak egy világegyetem van, s ennek törvényeit csak egyszer lehet megtalálni.“ Mint tudjuk, LAGRANGEnak nem egészen volt igaza, a fejlődés túljutott NEWTON eszméin, a mechanika fejlődését NEWTON elindította, de nem zárta le. Ha EINSTEIN szerepét akarjuk méltatni, LAGRANGE példáján okulva óvatosan kell fogalmaznunk. Lehet, hogy az általános relativitáselméletnek nem minden következményét fogja igazolni a tapasztalat. Lehet, hogy a csillagászat fejlődése következtében egyes még megismerésre váró tények felfedezése új fejleményeket fog hozni a gravitáció kérdésében. Egy azonban bizonyos: *az általános relativitáselmélet örökre az első nagyszabású tudományos kísérlet marad a tér, az idő, az anyag és a mozgás belső összefüggéseinek fizikai megragadására.* Olyan tett, mely el nem múló dicsősége lesz az emberi alkotóképességnek.

Érdemes még megjegyeznünk, hogy EINSTEINnek 1938-ban sikerült az általános relativitáselméletre a koronát is feltenni. INFELDdel együtt írt dolgozatában megmutatta, hogy ebben az elméletben a mozgásegyenletek a téregyenletek következményei. Olyan eredmény ez, amilyennel sajnos más terekre vonatkozó elméletekben még nem rendelkezünk.

Tisztelt hallgatóság! Einstein tudományos tevékenységének rövid tanulmányozása is elénk tárja e tudós munkamódszerének jellegzetes motívumait. Teljesítményeinek egyetlen titka, hogy benne egyszerre találkozik az a három tulajdonság, melyekből egy is nagy teljesítményekre tehet képessé. Ezek: a tapasztalat tényeinek mindenek fölé helyezése, rendkívüli szellemi bátorság és kivételes absztrakcióképesség. E tulajdonságoknak köszönheti azt a képességét, hogy a tapasztalat tényeiből kiindulva, azokat elemezve és általánosítva, mindig új, addig nem ismert tényekhez jut el és sohasem ragad a spekuláció birodalmában. Csak a tények érdeklik. Azok, melyekből kiindul s melyekhez eljut. Formális kérdések, tartalom nélküli matematikai szépségek teljesen hidegen hagyják. Az imént elmondott idézetből nyilvánvaló például, hogy az általános relativitáselmélet kialakításánál mennyire mellékes volt számára az általános kovariancia, s mennyire csak fizikai gondolatok vezették. Érdekesen dokumentálja ezt H. WEYL, a kiváló matematikus, aki a huszas években sokat foglalkozott a relativitáselmélettel és nagyszerű matematikai érzékkel sikerült neki a gravitáció és elektromágnesség egy formailag egységes elméletét felállítani. EINSTEIN első pillanattól ellenezte WEYL gondolatait. Egy beszélgetésükről beszámolva WEYL a következőket írja: „Konkrét kifogásaira válaszolni tudtam. Ekkor így szólt: *„hagyjuk ezt, Weyl, így — vagyis formálisan, szemléletes vezető fizikai elv nélkül — nem foglalkozunk fizikával“*. S ha a valósághoz való e szenvedélyes ragaszkodást összevetjük a lényeget absztraháló gondolkodásmódjával és forradalmi merészségével, úgy azt hiszem megtaláljuk páratlan sikerei igazi titkát.

Tisztelt hallgatóság! EINSTEIN tudományos munkássága e kétségen kívül felületes áttekintésének lezárásával mondanivalóm befejezéséhez közeledik. Még egy feladatom maradt talán, EINSTEINről az egyénről, a társadalmi emberről szólani. Életében sok embernek volt alkalma vele bensőbb viszonyba kerülni, s ezek némelyike feljegyzést készített személyi tulajdonságairól. Beszélnek egyéniségének közvetlenségéről, szeretetreméltóságáról, különböző jó és érdekes tulajdonságairól. Az erről való beszéd azonban — úgy gondolom — teljesen célját vesztette, ha nem személyes élményből táplálkozik, s így bízvást elhagyhatom. Feljegyzik még életrajzírói, hogy kedves írói GOETHE és TOLSZTOJ voltak, bár állandó megfeszített munkája kevés időt engedett az olvasásra. Aminek privát életében a fizika mellett leginkább hódolt, az a muzsika. Szenvedélyes és virtuóz hegedűs, remek kamarazenész volt, hegedűje hat éves korától késő öregségéig elkísérte. A preklasszikus olasz és német muzsika legjobb mesterein kívül BACH és MOZART álltak hozzá a legközelebb.

Beszéljük még meg röviden állásfoglalását a filozófia egyes kérdéseivel kapcsolatban is. Kifejezetten nem írja ugyan sehol, de írásaiból kiderül: ezt a tudományt nem hajlandó komolyan venni. Körülményei között ez bizonyos fokig érthető. Polgári környezetben nőtt fel és élte le egész életét. Pályafutása alatt leginkább korának polgári filozófiájával találkozott, ennek képviselői voltak kollégái, ismerősei. A dialektikus materializmus filozófiájával nem foglalkozott, legalábbis írásaiban ennek konkrét nyomait nemigen lehet látni. Hogy pedig a polgári filozófia különböző iskoláit és ágait maga előtt látva, ezeket nem volt hajlandó komolyan venni, azon nemigen fog csodálkozni senki. Ez a ragyogó ítélőképességű, kivételes áttekintéssel rendelkező, elővigyázatos tudós oly ellentmondóan, mondhatni tudatos felelőtlenséggel nyilatkozik egyes filozófiai kérdésekről, hogy az szinte megdöbbentő. Ezt semmi mással nem lehet magyarázni, mint azzal, hogy az ilyen tárgyú problémákat nem vette komolyan. Számtalan bizonyítékot lehetne hozni viszont arra nézve, hogy ismeretelméleti, a tudomány tárgyára és módszerére vonatkozó kérdésekben nem ismert tréfát. Ezek a filozófiai kérdések közvetlen és látható kapcsolatban voltak tudományos munkájával, s így ezekben a kérdésekben sokszor hallatta hangját. Állásfoglalásában mindig következetesen materialista és determinista volt. Tudományos szemléletének ezek az alapvonásai határozzák meg a kvantummechanikával kapcsolatos nézeteit is. Csodálatos, hogy a kvantumelmélet egyik megalapozója és elindítója a későbbi fejlődés következtében szembefordul szülöttével. Nem tudja elfogadni azt a nézetet, hogy egy elemi folyamatokkal foglalkozó tudományág szemlélete eredendően statisztikus legyen. Állásfoglalásában a kvantummechanika hatalmas sikerei, ragyogó gyakorlati eredményei sem ingatták meg, élete végéig vallotta, hogy e tudományág mai megalapozása ideiglenes és nem kielégítő. Nincs most helye e kérdés részletes elemzésének, csupán azért említem fel, mert nagyon jellemző EINSTEIN gondolkodására és filozófiai nézeteire.

Befejezésként most néhány szóval említsük meg EINSTEIN társadalmi tevékenységét, politikai magatartását. Az összkép, melyet erről a sajtóból és régebbi feljegyzésekből kapunk, egészében a társadalmi haladás meggyőződéses harcosát állítja elénk, annak ellenére, hogy e téren nem jut mindig el a helyes álláspontra. EINSTEIN haladó polgár és ennek a ma már szükségképpen ellentmondó két fogalomnak minden jellemzője érvényes rá is. Az egészében maradi és haladásellenes polgári osztálynak azonban a századforduló táján még volt ereje néhány kimagasló és haladó szellemet saját gondolati és érzelmi világán belül létrehozni és ezek közül az egyik legnagyobb éppen EINSTEIN.

EINSTEINben a szellemi bátorság magasfokú morális bátorsággal párosult. Néhány epizódot életéből: 1914-ben, amikor a német militarizmus az első világháború kezdetén hadüzenet nélkül betört Belgiumba és ott a békés lakosságnak nagy szenvedést okozott, a felháborodott világközvélemény lecsillapítására a német kormány a kultúra és tudomány embereihez fordult, hogy vállaljanak a német háborús célokkal egy kiáltványban szolidaritást. Kilencvenkét híres német tudós írta e kiáltványt alá, köztük az összes akadémikus, kivéve ALBERT EINSTEINt, a frisskeletű német állampolgárt, akinek egzisztenciája talán legjobban igényelte volna a szolidaritás vállalását. Ezen idő óta vált EINSTEIN neve gyűlöltté a német militaristák szemében. Életében fenyegették, mikor az első világháború befejezése után a nemzeti gyűlölködés ellen vívott harcai során Franciaországban és Angliában, de különösen mikor az egész kapitalista világ által fenyegetett Szovjetunióban tartott előadásokat. Esküdt ellensége volt a támadó háborúnak, az imperializmusnak és szenvedélyes harcosa a békének, a haladásnak. Mikor a náci barbarizmus 1933-ban kiüldözte Németországból, az Egyesült Államokba megy és minden erejét latbaveti a fasizmus elleni nemzetközi harc támogatására. Így jut el ahhoz az elhatározó lépéshez, hogy javaslatba hozza a fasizmus elleni harc hatékonyabbá tételére és a további német agressziók megakadályozására az atombomba gyártását. Úgy gondolta, hogy az akkori történelmi helyzetben — 1939-ben — ezzel is hozzájárul a fasizmus megsemmisítéséhez.

Ám ennek a lépésnek későbbi következményei mély megdöbbenéssel töltik el. Borzadva látja, hogy az általa ajánlott fegyvert nem a haladás érdekében, de éppen a haladás ellen, a világ leigázására akarják felhasználni azok a körök, akiknek ez az eszköz kezükbe jutott. Erkölcsi nagysága most is megnyilvánul. Teljesen tisztán látja a tudós kötelességét a társadalommal szemben, most sem habozik vállalni a kormánykörök rosszindulatának minden következményét és szenvedélyes harcot kezd az atomfegyver eltiltásáért, a tudományos tevékenység alkotó célok felé való irányításáért. Élete végén is rengeteg támadás éri. Az erősödő amerikai fasizmus hitvány ügynökei ismét őt szemelték ki célpontnak.

Mindezek a harcok azzal az eredménnyel is járnak, hogy élete vége felé egészen közel jut a szocializmus szükségességének és helyességének belátásához. A „Monthly Review" c. new-yorki lapban 1949-ben cikket ír „Miért szocializmus?" címmel. Ebből idézzük a következő részt:

„Véleményem szerint korunk bajainak főoka az az anarchia, amelyet a kapitalista társadalmi rend idézett elő. Meggyőződésem, hogy e rossznak kiküszöbölésére csak egy mód van: az, hogy a gazdasági életet a szocializmus alapelvei alapján kell felépíteni. Ilyen gazdasági rendben a termelő eszközök a közösség tulajdonát alkotják s jól átgondolt tervek alapján kerülnek alkalmazásra."

Tisztelt hallgatóság! Régi igazság, hogy kivételes nagyságú emberek életével és műveivel való foglalkozás igen nagy erkölcsi haszonnal jár. A példa mindennél meggyőzőbb ereje lelkesedéssel tölti el a szíveket, munkára serkent és megerősít. A belső szükségletként jelentkező kegyelet erős motívuma mellett ez a tapasztalat teszi szükségessé e kiváló férfi életének és munkásságának felidézését, s az emléke előtt való meghajlás így válhat jövő sikereink egy forrásává.

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Láng László kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

LÁNG LÁSZLÓ, a Központi Fizikai Kutató Intézet osztályvezető helyettese „A 9.-helyen szubsztituált fenantrénszármazékok ultraibolya abszorpciós színképének vizsgálata" című kandidátusi értekezésében kritikailag vizsgált irodalmi adatok és saját mérései alapján próbál az orientált fényelnyelés elmélete KISS-féle továbbfejlesztett alakjának kísérleti alapot teremteni.

A problémakomplexumot bonyolítja az, hogy még a fenantrén szerkezete és színképe közötti összefüggés ismeretében is a szubsztituensek hatása nem vizsgálható elszigetelten, mert igen sok zavaró hatás van jelen. Olyan vegyületcsoport alkalmas a vizsgálatok eredményes keresztülvitelére, melynél ezek a zavaró hatások minimálisak. A helyzet azonban sokkal rosszabb, mert a fenantrén szerkezete és színképe közötti összefüggés sincs egyértelműen tisztázva. A két elméletet — a CLAR-féle és a KISS-féle elméletet — melyek látszólag összeegyeztethetetlenek, sikerült a szerzőnek kis korrigálással összeegyeztetnie.

A CLAR által bevezetett frekvencia-viszonyszámoknak a figyelembevételét a szerző továbbfejlesztette. Ezek figyelembevételével a származékokat három csoportra osztotta be. Az első csoportban a szubsztituens hatására a színkép csak kevéssé változik meg. Ennél a csoportnál a viszonyszámoknak a fenantrén viszonyszámainak értékétől való eltérése igen csekély. A második csoportnál az alapvegyület színképe a hosszabb hullámok felé tolódik el, a finomszerkezet részben eltűnik. Ennél a csoportnál a viszonyszámok már nagyobb mértékben eltérnek a fenantrén viszonyszámaitól. A harmadik csoportban az alapvegyület színképe a szubsztitúciónál már elveszti eredeti jellegét, a különböző irányokhoz tartozó gerjesztési sávok összeolvadnak és a kialakult széles sáv súlypontja a látható tartomány felé tolódik el. Ebben az esetben a viszonyszámok jelentése már természetesen elmosódott, nem adható meg pontos értékük.

A fenti, a szerző által javasolt hármas csoportbeosztással szemben áll a szubsztituenseknek JONES-féle négy csoportba való beosztása. JONES beosztásának a szerző beosztásában a következők felelnek meg. A szerző első csoportjának megfelel JONES batokróm hatásúnak nevezett csoportja, a szerző második csoportjának JONES konjugációs hatásúnak nevezett csoportja, a harmadik csoportnak pedig részben ugyancsak a JONES-féle konjugációs hatású csoport. JONES másik két csoportját a szerző helytelen szempontból bevezetett csoportnak tartja. A JONES-féle finomszerkezeti hatás csoportja ugyanis nem az egyszerű származékokat foglalja magában, hanem olyan vegyületeket, melyek spektroszkópiai szempontból nem származékoknak, hanem alapvegyületeknek tekintendők. A JONES-féle szterikus hatás csoportja pedig azért nem kezelhető külön csoportként, mert a szterikus hatás minden olyan vegyületnél fellép, melynél a molekulák geometriai viszonyai azt megengedik és így ez a többi csoporttal együtt tárgyalható és tárgyalandó eset.

A KISS-féle csoportbeosztásnak a szerző által javasolt beosztás a következőképpen felel meg. Az első csoportnak megfelel a KISS-féle tiszta induktív hatású szubsztituensek csoportja, a második csoportnak a KISS-féle gyengébb mezomer hatású szubsztituensek csoportja, a harmadik csoportnak pedig a KISS-féle erős mezomer hatású szubsztituensek csoportja. Ebből adódik az is, hogy a szerző frekvencia-viszonyszám eltéréseit empirikusan a mezomer hatás mértékéül is felhasználhatja.

A fentiekben ismertetett dolgozat opponensei KISS ÁRPÁD, a Magyar Tudományos Akadémia lev. tagja és PAUNCZ REZSŐ, a fizikai tudományok kandidátusa volt. Az 1954. december 20-án tartott nyilvános vita bíráló bizottságának elnöke SCHAY GÉZA akadémikus volt, titkára HOFFMANN TIBOR, a fizikai tudományok kandidátusa, tagjai pedig BRUCKNER GYŐZŐ akadémikus, BOROS JÁNOS és NAGY ELEMÉR, a fizikai tudományok kandidátusai voltak.

Az opponensek közül KISS lev. tag hiányolta, hogy a szerző nem ismerteti — fizikai kandidaturára jelölt létére — a jelenségek kvantumkémiai tárgyalását, továbbá a kísérleti viszonyokra vonatkozó több kérdés tisztázásának szükségességét vetette fel.

PAUNCZ kandidátus opponensi véleményében hangsúlyozta annak a lényeges voltát, hogy a szerző csak azokat a szubsztituenseket vizsgálta, melyek az alapmolekula ugyanazon helyén foglaltak helyet. Így sok zavaró körülményt figyelmen kívül lehetett hagyni. Ezenkívül több részletkérdésre vonatkozóan tett megjegyzéseket, ill. kérdéseket a jelölthöz.

LÁNG LÁSZLÓ válaszában hangsúlyozta, hogy dolgozatával éppen az volt egyik célja, hogy a kvantumkémiai elméleteknek kísérleti adatokat szolgáltasson, s ezért nem tért ki — minthogy ő nem kvantumkémikus — az eredmények ily módon való feldolgozására. A többi részletkérdésre is kimerítően válaszolt.

Az opponensek a választ általában kielégítőnek tartották, KISS lev. tag azonban még részletesebben megvizsgálandónak tartja a poláris vagy nem poláris oldószer hatásának a kérdését.

A nyilvános vita résztvevői közül VARSÁNYI GYÖRGY kiegészítő megállapításokat tett egyes sávoknak a hőmérséklet emelésével a távolabbi ultraibolya felé való eltolódásának magyarázatára csoportelméleti megfontolások alapján. Az ezzel kapcsolatban felmerült kérdésekre a jelölt kielégítő válaszokat adott.

A vita után a bíráló bizottság határozatában kiemelte, hogy a jelölt olyan témakört választott, mely a hazai spektroszkópiai és elméleti fizikai kutatásoknak egyik alaposan művelt területe és melyből a kémia számára is további eredmények várhatók. A jelölt témája területén nagy tájékozottságról tett tanúbizonyságot, s ez a vitában is meglátszott. Hiányosságnak az látszott, hogy a jelölt rendszerezése csak empirikus rendszerezés, s feltétlenül előnyére vált volna, ha a jelölt a kvantumkémiai kérdésekre is bővebben tért volna ki.

Tekintettel arra, hogy a disszertáció a fizika és a kémia határterületén mozog, a feldolgozás módja és az interpretálás azonban inkább kémiai, a bizottság egyhangúlag javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy Láng Lászlót nyilvánítsa a *kémiai tudományok kandidátusává.*

Hoffmann Tibor
a fizikai tudományok kandidátusa

Keszthelyi Lajos kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

Az atommagfizika napjainkban a tudományos érdeklődés középpontjában áll. Hazánkban Keszthelyi Lajos az első, aki e tárgyból készítette el kandidátusi disszertációját, ezért a magyar fizikusok fokozott érdeklődéssel várták a disszertáció téziseinek ismertetését és az azt követő vitát.

A kísérleti atommagkutatás fontos problémája a részecskeszámlálás. Az egyik legmodernebb eszköz a szcintillációs számláló. Ennél a számlálandó töltött részecskék (vagy γ-kvantumok) megfelelő kristályra (naftalin, antracén, nátriumjodid) esnek és ott szintillációt, látható fényvillanást okoznak. Ezek akár szabad szemmel is észlelhetők, de pontosabb mérést a fotoelektronsokszorozó tesz lehetővé.

Keszthelyi Lajos aspiránsi feladatául tűzte ki ennek a számlálási módszernek hazánkban való meghonosítását. Munkája sikerrel járt: megépítette Magyarországon az első szcintillációs számláló berendezést, ellenőrző mérésekkel kimutatta annak használhatóságát. Hazai előállítású nátriumjodid-egykristályokat alkalmazott a berendezésben, eszköze γ-kvantumok számlálására szolgált. A berendezést rádium-készítmény sugárzásával hitelesítette. A rádium-készítmény γ-sugárzásának spektruma meglehetősen bonyolult. Az irodalomban talált adatok kritikai egybevetésével Keszthelyi Lajos egy megbízható intenzitás-spektrum összeállítására törekedett. Ezt felhasználva, abszorpciós szűrőkkel szétválasztva az egyes komponenseket, pótolta a homogén energiájú γ-sugárforrás hiányát és így végezte el a berendezés kalibrálását. Később méréseit a Szovjetunióból érkezett mesterséges radioaktiv kobalt-izotóp monoenergetikus sugárzását felhasználva tökéletesítette. Keszthelyi Lajosnak a nátriumjodid-kristály γ-kvantumok számlálására vonatkozó hatásfokát megállapító mérései nemzetközi viszonylatban is értékesek. Tisztáznak egy olyan kérdést, melyre vonatkozólag a külföldi irodalomban egymásnak ellentmondó nézetek alakultak ki.

Keszthelyi Lajos aspiránsi munkáját a Központi Fizikai Kutató Intézetben végezte Faragó Péter vezetése mellett. A kandidátusi értekezést határidőre elkészítette. Az értekezlet megvitatását a Tudományos Minősítő Bizottság 1955. február 23-ra tűzte ki.

A vitaülést Gyulai Zoltán akadémikus, mint a kiküldött Bírálóbizottság elnöke nyitotta meg. Ezután a bizottság titkára ismertette a jelölt eddig végzett tudományos munkásságát, majd Keszthelyi Lajos foglalta össze disszertációjának téziseit. Ezután került sor a Tudományos Minősítő Bizottság által kijelölt oppenensek véleményének ismertetésére.

Szalay Sándor levelező tag, mint opponens, kiemelte, hogy a jelölt a mérőberendezést nagy gonddal és szakértelemmel készítette el, kimutatván komoly elektronikai jártasságát. Hazánkban először épített használható szcintillációs berendezést, ennek során mutatott felkészültsége feltétlenül megüti azt a mértéket, amit egy kandidátustól várni lehet. Az értekezésben hiányolni lehet azt, hogy a berendezését nem használta fel kellő mértékben tényleges kísérleti vizsgálatok elvégzésére. Nem tartja helyesnek a rádiumkészítmény használatát, melynek bonyolult γ-spektruma véleménye szerint nem engedi meg, hogy a mérési adatokból a hatásfokra nézve egyértelmű következtetéseket lehessen levonni. A kiegészítésként mesterséges radioaktív izotóppal végzett mérés azonban alkalmas arra. hogy a mérőberendezést legalább egy hullámhosszra hitelesítse. Ezért SZALAY SÁNDOR a Bírálóbizottságnak a disszertáció elfogadását javasolta.

SIMONYI KÁROLY opponensi véleményében kiemelte, hogy a jelölt olyan területen végzett hazánkban úttörő munkát, melynek nálunk talaja még nem volt. Itt a legelső feladat mérőeszközök felépítése, mérőmódszerek kidolgozása. Ennek a jelölt jól megfelelt. A hatásfokot meghatározva a jelölt nemzetközi viszonylatban is értékes eredményt ért el. Az elektronikus berendezéssel kapcsolatban SIMONYI KÁROLY legfontosabb eredménynek tartja, hogy sikerült biztosítani a készülék stabilitását. Javasolja, hogy KESZTHELYI LAJOS terjessze ki kutatásait γ-sugarak után elektronok és neutronok szcintillációs számlálására is. Végeredményben az értekezés elfogadását javasolta.

IMRE LAJOS opponens szintén hangsúlyozta a disszertációs témának hazai viszonylatban úttörő jellegét. Ez adja meg KESZTHELYI LAJOS vizsgálatainak értékét, de egyben a rendelkezésre álló lehetőségek korlátait is. A mérőberendezés megalkotásánál a lehetőségeket figyelembe véve az elektronikus rész tökéletes megépítésére helyezte a jelölt a hangsúlyt. Ezzel foglalkozik a dolgozat legértékesebb része, kifejezésre juttatva a jelölt tudományos gondosságát. A mérések eredményeinek kiértékelését tartalmazó fejezet mutatja a jelölt olvasottságát, de néhol kevésbé jól domborítja ki a lényeget, túlságosan részletező. Apróbb megjegyzések után kiemeli annak fontosságát, hogy a berendezés teljesen hazai anyagokból készült, a készülék a hazai viszonyok közt elérhető tökéletességet jól megvalósítja. Ebben látja a munka főérdemét, noha az a nemzetközi kutatásban is előrehaladást jelent. A dolgozat elfogadását javasolja.

Az opponensi vélemények elhangzása után KESZTHELYI LAJOS megköszönte az észrevételeket és bírálatokat, majd részletesen válaszolt az oppozíciókra. Az adott választ az opponensek kielégítőnek tartották és elfogadták. Az elnök felkérésére ezután többen szóltak hozzá a disszertációhoz és a vele kapcsolatban felvetődött kérdésekhez. IMRE LAJOS és SZALAY SÁNDOR újabb felszólalása után BOZÓKY LÁSZLÓ és NAGY ELEMÉR tett kérdéseket és észrevételeket. KESZTHELYI LAJOS válasza után az elnök a vitát lezárta.

Az értekezés vitáját kiértékelve GYULAI ZOLTÁN elnöklete alatt a Bírálóbizottság (tagok: BOZÓKY LÁSZLÓ, MARX GYÖRGY, NAGY ELEMÉR, SZIGETI GYÖRGY) a következő határozatot hozta:

„A dolgozat lényeges része egy szcintilláló kristályos γ-sugár számláló berendezés összeállítása és egy hullámhosszra való hitelesítése. Ilyen mérőeszközök nemzetközi viszonylatban is a legkorszerűbb berendezéseknek tekinthetők. Ennek Magyarországon való megépítését nagyjelentőségű eredménynek tartjuk. Eszközét a jelölt NaJ(Tl) kristály abszorpciójának és az ilyen kristállyal történő számlálás hatásfokának mérésére alkalmazta, ezzel az irodalomban még tisztázatlan kérdés megoldásához nyújtott adalékot. A dolgozat megírásával és a vita során adott válaszaival a jelölt teljes megelégedésre igazolta tudományos kutatásban való jártasságát és a kérdés irodalmának ismeretét, különösen az elektronikai problémáknál. A fentiek alapján a bizottság egyhangúlag javasolja, hogy Keszthelyi Lajost nyilvánítsák a fizikai tudományok kandidátusává."

A határozat felolvasása után a bizottság tagjai melegen gratuláltak Keszthelyi Lajosnak sikeres munkájához.

A Tudományos Bizottság ülésén a fenti határozatot magáévá tette és Keszthelyi Lajost a fizikai tudományok kandidátusává minősítette.

Marx György
a fizikai tudományok kandidátusa

Medgyessy Pál kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A Tudományos Minősítő Bizottság folyó év február 7-én rendezte meg MEDGYESSY PÁL kandidátusi disszertációjának nyilvános vitáját a Tudományos Akadémia felolvasó termében. A vita elnöke HAJÓS GYÖRGY akadémikus, az opponensek SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA lev. tag és GYIRES BÉLA, a matematikai tudományok kandidátusa voltak. A kiküldött bírálóbizottság tagjai: TURÁN PÁL akadémikus, JORDÁN KÁROLY lev. tag, HORVÁTH JÁNOS a fizikai tudományok kandidátusa, MAKAI ENDRE a matematikai tudományok doktora és PAUNCZ REZSŐ a fizikai tudományok kandidátusa voltak. A bizottság titkári teendőit alulírott látta el.

A megvitatott dolgozat a valószínűség-eloszlások keverékeivel foglalkozik, éspedig azzal, hogy hogyan lehetséges egy adott keverék felbontása összetevőire. A kérdés tehát az, hogy, ha adott az $F(x)$ függvény, hogyan lehet az

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,y)\,d\Phi(y)$$

relációból a ψ illetve Φ függvényeket meghatározni. $\Phi(y)$ eloszlásfüggvény, $\psi(x,y)$ pedig az y paramétertől folytonosan függő eloszlásfüggvény. Hasonló probléma vethető fel az y paramétertől függő $\psi(x,y)$ sűrűségfüggvényre vonatkozóan is.

A valószínűségszámítási könyvek ezt a gyakorlati szempontból is nagyon fontos problémát nem tárgyalják. A disszertáció az idevágó részleteredményeket összegyűjtötte és rendszerezte és ily módon a problémakör kimerítő és részletes nomográfiáját adja. A dolgozat ezen túlmenőleg nemcsak ismert eredményeket ad közre, hanem figyelemre méltó önálló eredményekkel is gazdagítja a feldolgozott témát.

MEDGYESSY munkájának középpontjában az a kérdés áll: miképpen lehet normális sűrűségfüggvények valamely keverékét összetevőire felbontani. Legyen $\Phi(x)$ az ismeretlen eloszlásfüggvény, $f(x)$ ismert sűrűségfüggvény. Ha $m(x)$ egy középértékfüggvény és $\sigma(x)$ pozitív sűrűségfüggvény, akkor tudvalevő, hogy ezek között a következő reláció áll fenn:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma(y)}e^{-\frac{[x-m(y)]^2}{2\sigma^2(y)}}\,d\Phi(y). \tag{1}$$

Ez a $\Phi(y)$-ra vonatkozóan szinguláris elsőfajú integrálegyenlet, mely általában nem oldható meg és ha van is megoldása, nem mindig egyértelmű. Ha azonban $\sigma(y)=\sigma=$ konstans és $m(y)\equiv y$, akkor a jobboldal egy ismert és egy meghatározandó függvény konvoluciója és ez esetben $\Phi(y)$ ismert módon egyértelműen kiszámítható.

Az $m(y)=m=$ konst. esetben pedig az egyenlet a következő alakra hozható:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}y^{-1}e^{-\frac{(x-m)^2}{2y^2}}\,d\Phi_1(y).$$

Ha a Φ_t egy $\varphi(y)$ sűrűségfüggvényből származtatható, a $\xi=(x-m)^2$, $v=\frac{1}{2y^2}$ helyettesítéssel az

$$f(\xi+m)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\xi v}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2v}}\right)\frac{1}{v}\,dv$$

egyenletre jutunk, melyből a φ függvény az inverz Laplace-transzformáció segítségével határozható meg.

Igen fontos eset az, amikor $m(y)\equiv y$; $\Phi(x)$ pedig véges sok ugrású lépcsős függvény. Ekkor a Gauss-analizis feladatára jutunk. Ezért a dolgozat meglehetősen részletesen foglalkozik a Gauss-analízisre vonatkozó eredményekkel, kiemeli számos példa felsorolásával annak gyakorlati jelentőségét és diszkutálja nemcsak az elméleti, hanem a numerikus és grafikus számolás szempontjából fontos eredményeket is. Ez utóbbiakat tüzetes kritikai elemzésnek veti alá.

Különösen részletesen foglalkozik a DOETSCH által kidolgozott szóráscsökkentés módszerének ismertetésével, melyet sikerült a szerzőnek lényegesen általánosítania. Különösen értékesek a közelítő eljárások hibabecslésére vonatkozó, a szerzőtől származó képletek. A Gauss-analízissel kapcsolatban felveti a gépi megoldhatóság kérdését is.

A disszertáció egy külön fejezete foglalkozik a stabilis sűrűségfüggvények közül a Cauchy- és az V. típusú Pearson-félével és most már részletesen ezekre dolgozza ki a „keverék-felbontás szóráscsökkentés útján“ módszerét, végül pedig a konstans súlyokkal képezett diszkrét valószínűségeloszlások keverékeinek felbontását tárgyalja.

Az opponensek rámutattak a dolgozat pozitív oldalaira, külön kiemelve azt, hogy a szerző olyan téma kidolgozására vállalkozott, mely az irodalomban eddig nem volt kidolgozva és ezt figyelemre méltó módon továbbfejlesztette. Igen szépen megmutatkozik a szerző nagy elméleti felkészültsége, mely kitűnő gyakorlati érzékkel párosul. SZŐKEFALVI NAGY BÉLA opponensi véleményében külön kiemelte annak a valószínűségszámítási iskolának kiváló hatását, melyet RÉNYI ALFRÉD alapított hazánkban és vezet az Alkalmazott Matematikai Intézetben. Az ott kialakított légkörben válhatott MEDGYESSY PÁL a szónak legnemesebb értelmében vett alkalmazott matematikussá. Nagy elméleti felkészültséggel kidolgozott módszereknek a gyakorlatba való közvetlen átültetésére való törekvés húzódik végig a disszertációban. Ezt a szemléletet pedig aspiránsvezetőjétől RÉNYI ALFRÉDtól nyerte. Ennek a helyes szemléletnek kialakulásában persze segített az is — ahogy erre GYIRES BÉLA mutatott rá opponensi véleményében —, hogy MEDGYESSY fizikusként kezdte pályafutását. Ez megkönnyítette számára az elméleti eredményeknek a fizikai és egyéb területekre való alkalmazását és valószínűleg fizikai ismeretei tették képessé arra is, hogy a numerikus megoldhatóság mellett kidolgozza egyes problémák gépi megoldhatóságának kérdéseit is. MEDGYESSY fejlődésére jótékony hatású volt az Alkalmazott Matematikai Intézet azért is, mert ide futnak be különböző területről a gyakorlatban felmerülő matematikai problémák és így a szerző valódi, az életben tényleg felmerülő problémákkal ismerkedhetik meg és megtanulja annak a módját, hogy hogyan kell ezeket megoldania, úgy hogy az a többi tudományoknak és az iparnak valóban hasznára lehessen.

Az opponensek a dolgozat negativumaiként felhozták azt, hogy fogalmazása helyenként félreérthető, nem eléggé szabatos, sőt szerepel egy helyen tárgyi tévedés is. Egyes tételek kimondásában többet feltételez a szerző, mint amennyit a bizonyításban valóban kihasznál.

MEDGYESSY az opponensek véleményeire adott válaszában elismeri, hogy elkerülte a figyelmét az a tény, hogy kevesebbet is feltételezhetett volna egyes tételeknél. A helytelen és nem kielégítően szabatos fogalmazások tényét is elismerte.

A vitában HORVÁTH JÁNOS megemlíti, hogy MEDGYESSY eljárását bizonyos spektroszkópiai kutatásoknál kipróbálták és kiderült, hogy MEDGYESSY számolási eljárása más, bonyolultabb eljárásokkal azonos eredményt szolgáltatott. MEDGYESSY eljárása lehetővé teszi, hogy ezentúl a hazai spektroszkópiai kutatások egyes ágaiban a legnagyobb teljesítményű gépet használják. TURÁN PÁL akadémikus felhívta a figyelmet arra, hogy a disszertációban szereplő bizonyos függvény soralakja más, MEGYESSYétől eltérő módon is megkapható.

A kiküldött bírálóbizottság a jelölt válaszát elfogadta és egyhangú határozatában kiemelte azt, hogy a valószínűségeloszlás-függvények keverékének felbontási problémáját az irodalomban elsőnek dolgozta fel monográfiaszerűen. Elismerőleg említi meg a határozat MEDGYESSY önálló eredményeit és azt, hogy elméleti fejtegetési mellett nem hanyagolta el a kérdés gyakorlati és kalkulatív oldalát sem. Külön érdeméül említi azt, hogy a szerző felkutatta azokat a gyakorlati területeket, melyekben vizsgálatait alkalmazni lehet.

A negatívumokat illetően a bizottság megállapította, hogy ezek a dolgozat lényegét nem érintik és könnyen kijavíthatók. A bizottság javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy MEDGYESSY PÁLt a matematikai tudományok kandidátusává nyilvánítsa.

MEDGYESSY PÁL eddigi tudományos munkássága, disszertációja és a vita alapján nagy reményekre jogosít fel bennünket jövő tudományos pályáját illetően. Reméljük, hogy a jövő munkásságával ezeket a várakozásokat kielégíti és kívánunk neki ehhez sok sikert.

Fenyő István
a matematikai tudományok kandidátusa

A III. OSZTÁLY HÍREI

FELOLVASÓ ÜLÉSEK 1955 ELSŐ FELÉBEN

Január 28-án

1. JÁNOSSY LAJOS r. tag—NÁRAY ZSOLT: Dekadikus fénycsökkentő berendezés.
2. TURÁN PÁL r. tag—T. SÓS VERA: Komplex számok hatványösszegeiről.
3. GOMBÁS PÁL r. tag bemutatja PAUNCZ REZSŐ: „Egy új kvantumkémiai közelítőmódszer teljesítőképességének vizsgálata", BERENCZ FERENC: „Egy új eljárás a H_2 molekula kötési energiájának meghatározására", GÁSPÁR REZSŐ—CSAVINSZKY PÉTER: „A kétvegyértékű kétatomos ionmolekulák kötésének elméletéről" és MOLNÁR BÉLA: „Na és K elektronaffinitásának elméletéhez" című dolgozatát.
4. JÁNOSSY LAJOS r. tag bemutatja KISS DEZSŐ—SZIVEK JÁNOS: Univibrátorok holtidejének mérése", NÁRAY ZSOLT: „Vizsgálatok fényérzékeny elektronsokszorozók sötét áramának csökkentésére" és ACZÉL JÁNOS: „Borsuk K. és Jánossy L. néhány problémájának megoldása" című dolgozatát.
5. TURÁN PÁL r. tag bemutatja SZÜSZ PÉTER: „Racionális számokkal való approximáció" és BALÁZS JÁNOS: „Megjegyzések az Hermite—Fejér-féle interpoláció elméletéhez" című dolgozatát.

Február 25-én

1. ALEXITS GYÖRGY r. tag: Néhány függvényosztály konstruktív függvénytani jellemzéséről.
2. ALEXITS GYÖRGY r. tag: Ortogonális polinomok szerinti sorbafejtések konvergenciájáról.
3. GOMBÁS PÁL r. tag: Atomok energiáinak meghatározása.
4. ALEXITS GYÖRGY r. tag bemutatja KRÁLIK DEZSŐ: „Törtrendben differenciálható függvények approximációjának nagyságrendjéről", GEHÉR LÁSZLÓ: „Kétváltozós függvények approximatív differenciálhatóságáról", CZIPSZER JÁNOS—GEHÉR LÁSZLÓ: „Lipschitz-feltételnek eleget tevő függvények kiterjesztéséről", FREI TAMÁS: „Megjegyzések az ekvidisztans Lagrange-féle interpoláció-sorozatok konvergenciájához" és „Lokálisan legjobban approximáló trigonometrikus polinomokról" című dolgozatát.
5. NOVOBÁTZKY KÁROLY r. tag bemutatja HORVÁTH JÁNOS: „Megjegyzések a bilokális terek elméletéhez" és „Dielektrikumok elektrodinamikájának relativisztikus elmélete" című dolgozatát.

Március 25-én

1. Hajós György r. tag: Gráfok színezéséről (Székfoglaló előadás).
2. Kalmár László lev. tag: Schröter egy, az általános rekurzív függvény fogalmának definíciójára vonatkozó problémájának megoldása.
3. Rédei László lev. tag: Hajós György tételének új bizonyítása.

Április 29-én

1. Gombás Pál r. tag: Az atommagok statisztikus elméletéről.
2. Rényi Alfréd lev. tag bemutatja W. M. Gilbert: „Valószínűségeloszlások vetületei", Czipszer János: „Egy pozitív trigonometrikus összegről" és Mikolás Miklós: „A gamma-függvény, a Riemann-féle zeta-függvény és más ezekkel rokon függvények elméletéhez" c. dolgozatát.
3. Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag bemutatja Tandori Károly: „Fourier-sorok erős szummációjáról" és „Ortogonális sorokról" című dolgozatát.

Június 10-én

1. Gyulai Zoltán r. tag: Újabb adalékok a kristályosodás fizikájához (székfoglaló előadás).
2. Alexits György r. tag bemutatja Császár Ákos: „Általános értelemben lokálisan monoton függvényekről" és Freud Géza: „Ortogonális polinom-sorok tagonkénti differenciálásáról" című dolgozatát.
3. Hajós György r. tag bemutatja Aczél János: „Geometriai objektumok elméletéhez" és Fejes-Tóth László: „A 9 szabályos poliéder jellemzése szélsőérték-tulajdonságokkal" című dolgozatát.
4. Budó Ágoston lev. tag bemutatja Ketskeméty István—Szalay László: „Polarizációs vizsgálatok lumineszkáló oldatoknál az abszorpciós és emissziós átmenetek jellegének eldöntésére" című dolgozatát.

KITÜNTETÉSEK

A Népköztársaság Elnöki Tanácsa a Magyar Tudományos Akadémia 1955. évi Nagygyűlése alkalmából a tudományos munka, valamint a tudomány szervezése terén elért kimagasló eredmények elismeréséül akadémikusoknak, levelező tagoknak, kutatóknak, akadémiai dolgozóknak kitüntetéseket adományozott.

A III. Osztály kebeléből a Népköztársaság Elnöki Tanácsa a „Munka Érdeméremrend" kitüntetést Kovács István levelező tag és Simonyi Károly kandidátusnak adományozta.

Dr. Juvancz Ireneusznak, az Alkalmazott Matematikai Intézet csoportvezetőjének a Szocialista Munkáért Érdemérem és Palásti Ilonának, az Alkalmazott Matematikai Intézet tudományos kutatójának a Munka Érdemérem kitüntetést adományozta.

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat beérkezett: 1955. VII. 8. — Terjedelem: 9 (A/5) ív, 18 ábra.

Szegedi Nyomda Vállalat 55-3422 Felelős vezető: Vincze György

Ára: 20.— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

V. KÖTET 4. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1955.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

V. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest V. Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest V. Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V. Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest V. Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VI. Sztálin út 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

ABEL-CSOPORTOK EGYETLEN MAXIMÁLIS ALCSOPORTTAL

FUCHS LÁSZLÓ és SZELE TIBOR

Az 1954. évi Schweitzer-verseny feladatai közt szerepelt a következő probléma: *melyek azok a véges G csoportok, amelyeknek egyetlen egy maximális alcsoportjuk van?* A megoldás igen egyszerű. A csoport végessége miatt G-nek bármely valódi alcsoportja benne van G-nek valamely maximális alcsoportjában, tehát az M egyetlen maximális alcsoportban is. Mármost G-nek M-hez nem tartozó tetszés szerinti a elemét véve, $\{a\}$ nem lehet benne M-ben,[1] s így szükségképpen $\{a\} = G$, vagyis G ciklikus. Azonnal adódik, hogy G rendje prímhatvány, azaz $G \cong C(p^k)$.

Igen nehézzé válik a probléma, mihelyt a végesség feltételét elejtjük. E kis cikk szerzői utolsó személyes találkozásukkor[2] ezzel a kérdéssel foglalkoztak s sikerült megoldaniok a problémát a kommutatív esetben; ezt a megoldást tesszük közzé az alábbiakban.[3]

Előrebocsátjuk a következő lemmákat:

1. LEMMA. *A G Abel-csoportnak akkor és csakis akkor nincs maximális alcsoportja, ha G algebrailag zárt.*[4]

Evidens, hogy tetszőleges G Abel-csoport maximális alcsoportja — feltéve, hogy létezik — csakis prímindexű lehet. Ezért, ha M a G-nek maximális alcsoportja s indexe p prím, akkor[5] $pG \subseteq M \subset G$, tehát G nem algebrailag zárt. Megfordítva, ha G nem algebrailag zárt, úgy valamely p prímre $pG \subset G$. A G/pG csoport p-edrendű ciklikus csoportok direkt összege, s ezért,

[1] $\{S\}$ fogja jelenteni a csoport S részhalmaza által generált alcsoportot. $C(r)$ jelöli az r-edrendű ciklikus csoportot.

[2] 1955 februárjában.

[3] A továbbiakban — ha nem emeljük is ki mindig — csakis Abel-csoportokról lesz szó, ahol a csoportműveletet összeadásnak vesszük.

[4] *Algebrailag zártnak* (ill. más terminológia szerint *teljes*nek) akkor mondunk egy G Abel-csopor ot, ha minden természetes egész n-re $nG = G$ teljesül; itt nG jelenti G-nek azon alcsoportját, mely az ng ($g \in G$) alakú elemekből áll. Világos, hogy G algebrai zártságához elegendő a $pG = G$ egyenlőségek teljesülését megkövetelni minden p prímszámra vonatkozóan. Az algebrailag zárt csoportok szerkezetét teljesen ismerjük: ezek a racionális számok additív csoportjával izomorf s Prüfer-féle csoportok direkt összegére bonthatók. (Prüfer-féle csoport izomorf a p-, p^2-, ... fokú komplex egységgyökök csoportjával; itt p tetszőleges prímszámot jelöl.)

[5] A $\subseteq$ jel tartalmazást, míg $\subset$ valódi tartalmazást jelöl.

ha a direkt összeadandók közül egyet (amely lehet az egyetlen is) elhagyjuk, G/pG-nek s ennek megfelelően G-nek is egy p indexű, tehát maximális alcsoportját nyerjük.

E bizonyításból az is kiolvasható, hogy ha M a G Abel-csoport egyetlen maximális alcsoportja s indexe p, akkor $M=pG$, míg minden, p-től különböző q prímre $qG=G$. Sőt az is látható, hogy

2. LEMMA. *A G Abel-csoportnak akkor és csak akkor van egyetlen maximális alcsoportja, ha van oly p prím, hogy pG a G-nek p indexű alcsoportja és minden más q prímre $qG=G$.*

3. LEMMA. *Legyen*[6] $G=A+B$. *G-nek akkor és csak akkor van egyetlen maximális alcsoportja, ha A és B közül az egyik algebrailag zárt, a másiknak pedig ismét pontosan egy maximális alcsoportja van.*

E lemma igazolása céljából tegyük fel, hogy G-nek egyetlen maximális alcsoportja van. G nem lehet algebrailag zárt, tehát A és B nem mindketten algebrailag zártak. Világos, hogy ha A' az A-nak s B' a B-nek maximális alcsoportja, akkor $A'+B$ és $A+B'$ különböző maximális alcsoportjai lennének G-nek. Ezért A, B egyike az 1. lemma szerint algebrailag zárt, másikának pedig nyilván nem lehet 1-nél több maximális alcsoportja. Megfordítva, ha $G=A+B$, A algebrailag zárt s B-nek pontosan egy, mondjuk p indexű maximális alcsoportja van (ez a 2. lemma szerint éppen pB), úgy $pG=$ $=pA+pB=A+pB$ indexe G-ben p, míg a p-től különböző q prímekre: $qG=qA+qB=A+B=G$, ahonnan a 2. lemma szerint folyik az állítás.

Tekintsük most a G kommutatív csoportot, melynek éppen egy maximális alcsoportja van. Vegyük G-nek A maximális algebrailag zárt alcsoportját; ez — ismert tétel[7] szerint — direkt összeadandója G-nek: $G=A+B$, ahol B redukált csoport (azaz nincs algebrailag zárt alcsoportja $\neq 0$). A 3. lemma szerint B-nek pontosan egy maximális alcsoportja van, s így vizsgálatainkban elegendő redukált csoportokra szorítkozni.

Jelentsen ezentúl B oly redukált Abel-csoportot, melynek egyetlen maximális alcsoportja van. Valamely p-re pB az egyetlen, mégpedig p indexű maximális alcsoport, míg $qB=B$ minden más prím q-ra.

Ha B nem torziómentes, akkor torzióalcsoportja, T, B redukáltsága miatt nem lehet algebrailag zárt s nyilván $pT\subset T$, míg $qT=T$ a p-től különböző q prímekre. Világos, hogy T/pT p-edrendű ciklikus csoport, s így T-nek minden $a(\notin pT)$ elemére $T=\{a, pT\}$. Legyen a minimális rendű ilyen elem; a rendje nyilván p-hatvány: p^k. Belátjuk, hogy $\{a\}$ szerváns[8] alcsoportja

[6] $A+B$ az A és B csoportok direkt összegét jelöli.

[7] BAER tétele szerint minden algebrailag zárt csoport direkt összeadandója bármely őt tartalmazó Abel-csoportnak.

[8] A G csoport H alcsoportját *szervánsnak* mondjuk, ha az $nx=h(\in H)$ egyenletnek G-ben való megoldhatóságából mindig következik, hogy van ezen egyenletnek megoldása

T-nek. Valóban, ha $p^{k-1}a = p^k b$ $(b \in T)$ lenne, akkor $p^{k-1}(a - pb) = 0$ s az a-ról tett feltevés miatt $a - pb \in pT$, $a \in pT$, ellentmondás. De ekkor $\{a\}$ direkt összeadandója is T-nek: $T = \{a\} + T'$, ahol a 3. lemma szerint T' algebrailag zárt, vagyis $T' = 0$. T mint véges csoport direkt összeadandója B-nek: $B = T + B'$. Itt B'-nek a 3. lemma szerint ismét algebrailag zártnak kell lenni, azaz B' is $= 0$. Ezek szerint $B \simeq C(p^k)$. Megfordítva: nyilvánvaló, hogy $C(p^k)$-nek csak egy maximális alcsoportja van.

Ha B torziómentes, akkor tekintsük B alcsoportjainak monoton csökkenő $B \supset pB \supset p^2B \supset \cdots$ láncát. A B/p^nB p^n-edrendű ciklikus csoportot reprezentáljuk a $\bmod p^n$ maradékosztályok additív csoportjával, mégpedig úgy, hogy a $\bmod p^n$ maradékosztályok a $\bmod p^{n-1}$ maradékosztályoknak éppoly továbbosztásai legyenek, mint a $\bmod p^nB$ maradékosztályok a $\bmod p^{n-1}B$ maradékosztályoknak. Ezáltal a $B \sim B/p^nB$ természetes homomorfizmusnál B minden a elemének megfelel egy meghatározott

$$\pi_a = c_0 + c_1p + c_2p^2 + \cdots + c_np^n + \cdots \qquad (0 \leqq c_n \leqq p-1)$$

p-adikus egész n-edik szelete. Minthogy a p^nB csoportok metszete algebrailag zárt, azaz B redukáltsága miatt 0, azért $a \neq 0$ esetén $\pi_a \neq 0$, tehát az $a \to \pi_a$ megfeleltetés B-nek izomorf leképezése a p-adikus egészek P additív csoportjának egy R alcsoportjára. Bebizonyítjuk, hogy R a P-nek szerváns alcsoportja, vagyis minden egész n-re $nR = R \cap nP$. Mivel $qR = R$, $qP = P$ minden $q(\neq p)$ prímre, ezért elegendő $p^kR = R \cap p^kP$ fennállását igazolni. Az $a \to \pi_a$ leképezés definíciója mutatja, hogy R-nek nem minden eleme osztható p-vel, tehát $\{R, p^kP\} = P$. Az izomorfizmus-tétel miatt

$$C(p^k) \simeq P/p^kP = \{R, p^kP\}/p^kP \simeq R/(p^kP \cap R),$$

tehát $p^kP \cap R$ indexe R-ben p^k. Mivel biztosan $p^kP \cap R \subseteq p^kR$ és p^kR indexe R-ben legalább p^k, ezért $p^kP \cap R = p^kR$, vagyis R szerváns P-ben. — Megfordítva, legyen R a p-adikus egészek P csoportjának szerváns alcsoportja. Ekkor $qR = R$ minden $q(\neq p)$ prímre, továbbá pR maximális alcsoportja R-nek, mivel $R/pR = R/(pP \cap R) \simeq \{R, pP\}/pP = P/pP \simeq C(p)$. Ha most S tetszőleges maximális alcsoportja R-nek, úgy $R/S \simeq C(p)$. De ekkor R minden x elemére $px \in S$, azaz $pR \subseteq S$, $S = pR$. Ennélfogva R-nek csak egyetlen maximális alcsoportja van.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

TÉTEL. *A G Abel-csoportnak akkor és csakis akkor van pontosan egy maximális alcsoportja, ha $G = A + B$ alakú, ahol A tetszőleges algebrailag zárt csoport és B vagy prímhatványrendű ciklikus csoport, vagy pedig a p-adikus egészek additív csoportjának valamely szerváns alcsoportjával izomorf.*

H-ban is. Ezzel ekvivalens követelmény az, hogy $nH = H \cap nG$ minden egész n-re. p-csoportokban nyilván elegendő az $n = p^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ esetekre szorítkozni. Fontos tény, hogy korlátos elemrendű szerváns alcsoport mindig direkt összeadandója a csoportnak.

BIZONYOS TRIGONOMETRIKUS RENDSZEREK TELJESSÉGÉRŐL

CZIPSZER JÁNOS és RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

K. SAJDUKOV egy cikkében [1] a

$$(1) \qquad \{\cos(k+\tau)x, \sin(k+\tau)x\} \quad (k=0,1,2,\dots),\ \tau=\text{konst.}$$

rendszer $L^2[-\pi,\pi]$-beli teljességét vizsgálja, és erre nézve a következő tételt bizonyítja be:

Az (1) rendszer $L^2[-\pi,\pi]$-ben teljes, ha $\tau \leqq \frac{2}{3}$, de nem teljes, ha $\tau > \frac{3}{4}$.

A jelen dolgozatban hasonló, azonban lényegesen általánosabb problémával foglalkozunk. A

$$\begin{aligned}
&C(\tau):\{\cos(k+\tau)x\} \quad (k=0,1,2,\dots),\\
&C_1(\tau):\{1, \cos(k+\tau)x\} \quad (k=0,1,2,\dots),\\
&S(\tau):\{\sin(k+\tau)x\} \quad (k=0,1,2,\dots),\\
&CS(\tau):\{\cos(k+\tau)x, \sin(k+\tau)x\} \quad (k=0,1,2,\dots),\\
&C_1S(\tau):\{1, \cos(k+\tau)x, \sin(k+\tau)x\} \quad (k=0,1,2,\dots)
\end{aligned}$$

rendszerek zártságát fogjuk vizsgálni a következő függvényterekben: A p-edik hatványukkal integrálható függvények terében, L^p-ben, ahol $1 \leqq p < \infty$ és a folytonos függvények terében, C-ben. (Függvényen mindig komplex értékű függvényt értünk.) Ha a $C(\tau)$, $C_1(\tau)$ $S(\tau)$ rendszerekről van szó, akkor mindig úgy értendő a dolog, hogy a szóbajövő függvények értelmezési tartománya a $[0,\pi]$ intervallum; ha a $CS(\tau)$ vagy a $C_1S(\tau)$ rendszerről van szó, akkor $[-\pi,\pi]$ az értelmezési tartomány.* Ahol szükséges, hogy ezt külön kihangsúlyozzuk, ott az $L^p[0,\pi]$, $C[0,\pi]$ ill. az $L^p[-\pi,\pi]$, $C[-\pi,\pi]$ jelölésekkel fogunk élni. Az eredményeket a dolgozat végén táblázatos formában foglaljuk össze. Teljes választ fogunk adni arra a kérdésre, hogy ezek a függvényrendszerek milyen komplex τ értékekre zártak valamelyik L^p-ben vagy C-ben és melyekre nem zártak, eközben eldöntjük azt a SAJDUKOV által nyitva hagyott kérdést,

* A problémát RÉNYI ALFRÉD vetette fel. Tőle származik az 1. §. 1. pontja. A dolgozat többi része CZIPSZER JÁNOStól származik. K. SAJDUKOV cikkéről csak a jelen cikk 1. §-ának elkészítése után értesültünk.

hogy az (1) rendszer $\frac{2}{3} < \tau \leqq \frac{3}{4}$-re teljes-e L^2-ben? Az $S(\tau)$ rendszer esetén még a 0 helyen eltűnő folytonos függvények terében, C^0-ban való zártságot is eldöntjük. (Erre csak azért van szükség, hogy $C(\tau)$-ról és $S(\tau)$-ról az egyik alábbi megjegyzés alapján áttérhessünk $CS(\tau)$-ra és $C_1S(\tau)$-ra, amikor ezeknek a rendszereknek $C[-\pi, \pi]$-beli zártságát vizsgáljuk.)

Emlékeztetünk a zártság definíciójára. Egy függvényrendszert egy lineáris normált függvénytérben (l. [2], 53. o.) akkor nevezünk zártnak, ha a rendszer elemei beletartoznak a térbe és a rendszer elemeinek lineáris kombinációival a tér bármely eleme tetszőleges pontossággal approximálható. Az L^p $(1 \leqq p < \infty)$, az L^∞, a C és a C^0 terekben a normát a szokott módon értelmezzük, tehát ha általában az alapintervallumot $[a, b]$-vel jelöljük, akkor

$$\|f\| = [\int_a^b |f|^p]^{\frac{1}{p}} \quad L^p\text{-ben} \quad (1 \leqq p < \infty),$$

$$\|f\| = \operatorname{Vrai}\max_{a \leqq x \leqq b} \quad L^\infty\text{-ben},$$

$$\|f\| = \max_{a \leqq x \leqq b} |f| \quad C\text{-ben és } C^0\text{-ban.}$$

Minthogy azok a rendszerek, amelyeket vizsgálunk, folytonos függvényekből állanak, és az alapintervallum véges, azért ezek a függvények beletartoznak az összes L^p-terekbe és a C térbe, s így a felvetett problémának mindenesetre van értelme.

A részletes tárgyalás során elég, ha csak a $C(\tau)$, $C_1(\tau)$ és az $S(\tau)$ rendszerekre szorítkozunk. Elég tudniillik ezen rendszerek zártságát eldönteni, mert innen a $CS(\tau)$ és $C_1S(\tau)$ rendszerek zárt vagy nem zárt volta már egyszerűen következik. Csupán a következő két triviális tételre kell hivatkoznunk:

1. Legyen Ω egy $L^p[-a, a]$-ba $(1 \leqq p \leqq \infty, a > 0)$ tartozó, páros és páratlan függvényekből álló rendszer. Ω_1-gyel, ill. Ω_2-vel jelöljük azon függvények összességét, amelyek a $[0, a]$ intervallumon vannak értelmezve, és ott Ω valamelyik páros, ill. páratlan függvényével megegyeznek. Akkor Ω_1 és Ω_2 függvényei beletartoznak $L^p[0, a]$-ba, továbbá Ω akkor és csak akkor zárt $L^p[-a, a]$-ban, ha Ω_1 és Ω_2 mindketten zártak $L^p[0, a]$-ban.

2. Legyen Ω $C[-a, a]$-ba tartozó, páros és páratlan függvényekből álló rendszer. Ω_1-gyel, ill. Ω_2-vel jelöljük azon függvények összességét, amelyek a $[0, a]$ intervallumon vannak értelmezve és ott Ω valamelyik páros ill. páratlan függvényével megegyeznek. Akkor Ω_1 függvényei $C[0, a]$-ba, Ω_2 függvényei $C^0[0, a]$-ba tartoznak, továbbá Ω akkor és csak akkor zárt $C[-a, a]$-ban, ha Ω_1 zárt $C[0, a]$-ban és Ω_2 zárt $C^0[0, a]$-ban.

Tudvalevő, hogy ha Ω egy H lineáris normált függvénytér egy részhalmaza, akkor Ω akkor és csak akkor zárt H-ban, ha a 0-n kívül nincs olyan H-n értelmezett lineáris operáció, amelyik Ω minden függvényén eltűnik (l. [2], 58. o.). Ezen zártsági kritérium birtokában feladatunk a következőképpen fogalmazható:

El kell döntenünk, hogy adott p mellett melyek azok a τ értékek, melyekre nincs L^p-n értelmezett nem azonosan 0 lineáris operáció, amelyik a vizsgált függvényrendszeren eltűnik, és hogy melyek azok a τ értékek, melyekre nincs olyan C-n értelmezett lineáris operáció, amelyik a vizsgált függvényrendszeren eltűnik anélkül, hogy azonosan 0 lenne. $S(\tau)$ esetén még ugyanezt a vizsgálatot a C^0 térben is megejtjük. Mármost tudvalevő, (l. [3], [4] és [5]) hogy minden L^p-n ($1 \leqq p < \infty$) értelmezett A lineáris operáció

$$Af = \int_0^\pi fg, \; f \in L^p$$

alakban írható, ahol g az $L^{\frac{p}{p-1}}$ ill. $p=1$ esetén az L^∞ tér valamelyik eleme, és minden C-n értelmezett A lineáris operáció

$$Af = \int_0^\pi f\,d\alpha, \; f \in C$$

alakban írható, ahol $\alpha(x)$ korlátos variációjú, a π helyen eltűnő, $0 < x < \pi$-re az $\alpha(x) = \dfrac{\alpha(x+0)+\alpha(x-0)}{2}$ feltétellel normált függvény. A továbbiakban az ilyen tulajdonságú $\alpha(x)$ függvények összeségét V térnek fogjuk nevezni. A V térben a normát a szokott módon értelmezzük: α normája egyenlő α totális variációájával. A lineáris operációt generáló $g(x)$ ill. $\alpha(x)$ függvényt a lineáris operáció nullfüggvénytől eltekintve egyértelműen meghatározza, s az operáció normája megegyezik $g(x)$ ill. $\alpha(x)$ normájával. Megjegyezzük, hogy a V térben az azonosan 0-n kívül nincs is más nullfüggvény. A C^0 térben értelmezett lineáris operációk is egy V-beli $\alpha(x)$ súlyfüggvénnyel képezett Stieltjes-integrál alakjában állíthatók elő, most azonban $\alpha(0)$-t tetszőlegesen felvehetjük, $\alpha(x)$ csak a $0 < x \leqq \pi$ intervallumon van egyértelműen meghatározva.* Ha előírjuk, hogy $\alpha(0) = \alpha(+0)$ legyen, akkor ezzel $\alpha(x)$ már egyértelműen meg van határozva a lineáris operáció által, és a lineáris operáció normája megegyezik $\alpha(x)$ normájával. V-nek a 0 helyen folytonos függvényei egy alteret alkotnak, amelyet V^0-lal jelölünk. Fordítva: minden L^q-beli $\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$, V-beli és V^0-beli függvény L^p-ben ill. C-ben ill. C^0-ban egy lineáris operációt generál nyilvánvaló értelemben. L^q, V és V^0 elemei és az L^p-n, ill. C-n, ill. C^0-on értelmezett lineáris operációk tehát kölcsönösen egyértelműen felelnek meg egymásnak, úgy, hogy a megfeleltetésnél a norma és a lineáris struktúra változatlan marad.

* Ez az állítás ugyanúgy bizonyítható, mint a C-re vonatkozó Riesz-féle tétel, sőt abból könnyen le is vezethető.

Állapodjunk meg a következő definíciókban:

Feltesszük, hogy az összes szóba jövő függvények értelmezési tartománya egy véges $[a, b]$ intervallum. Legyen H egy normált lineáris függvénytér. Legyen Ω a függvények valamilyen halmaza. Azt mondjuk, hogy Ω H-ra nézve teljes, ha

1. $\int_a^b fg$ létezik valahányszor $f \in \Omega$ és $g \in H$ és ha

2. $\int_a^b fg = 0$ minden $f \in \Omega$-ra és egy $g \in H$-ra maga után vonja, hogy $\|g\| = 0$.* [Vö. [6], 45. o.].

Azt mondjuk, hogy Ω a H súlytérre nézve teljes, ha 1. $\int_a^b f dg$ létezik, valahányszor $f \in \Omega$ és $g \in H$ és ha 2. $\int_a^b f dg = 0$ (ahol $g \in H$) minden $f \in \Omega$-ra maga után vonja, hogy $\|g\| = 0$.

A zérónormájú függvényt nullfüggvénynek nevezzük. $f \equiv 0$ csak azt jelöli, hogy f nullfüggvény, nem pedig azt, hogy f minden x helyen nulla. A tárgyalásból mindig világosan ki fog derülni, hogy az „f nullfüggvény" állítás melyik H tér metrikája szerint értendő. Ha $f \in H$ és $g \in H$ és vannak olyan α, β számok, melyekre $\|\alpha f + \beta g\| = 0$ és $\alpha\beta \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy f és g lényegében azonosak H-ban.

Ha az f és g függvények szorzatának integrálja 0, akkor azt mondjuk, hogy f ortogonális g-re és fordítva. Ha egy f függvény ortogonális egy függvényhalmaz mindegyik elemére, akkor azt mondjuk, hogy f ortogonális az illető halmazra. Ha $\int_a^b f dg = 0$, akkor azt mondjuk, hogy f ortogonális a g súlyfüggvényre vagy, hogy a g súlyfüggvény ortngonális f-re. Ha $\int_a^b f dg = 0$ valahányszor f valamilyen H halmaz eleme, akkor azt mondjuk, hogy a g súlyfüggvény ortogonális a H halmazra.

A fent említett zártsági kritérium ezen definíciók és az idézett tételek felhasználásával a bennünket érdeklő esetekben a következőképpen fogalmazható meg:

*Egy függvényrendszer akkor és csak akkor zárt $L^p[0, \pi]$-ben $(1 \leq p < \infty)$, ill. $C[0, \pi]$-ben, ill. $C^0[0, \pi]$-ben, ha ő beletartozik $L^p[0, \pi]$-be, ill. $C[0, \pi]$-be, ill. $C^0[0, \pi]$-be és teljes $L^q[0, \pi]$-re $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$**, ill. V-re ill. V^0-ra nézve.*

* $\|g\|$-val g H-beli normáját jelöljük.

** $p = 1$ esetén $q = \infty$.

Az 1. §-ban a Parseval-egyenlőségre és egy integrálformulára támaszkodva bebizonyítjuk SAJDUKOV idézett tételének egy élesítését. A 2. §-ban eldöntjük, hogy a $C(\tau)$, $C_1(\tau)$ és $S(\tau)$ függvényrendszerek egy tetszőleges adott q-ra* ($1 \leqq q \leqq \infty$) milyen τ-kra teljesek L^q-ra nézve, továbbá milyen τ-kra teljesek V-re és $S(\tau)$ esetén V^0-ra nézve. A 3. §-ban a zártsággal foglalkozunk.

1. §.

1.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

Ha $\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{4}$, *akkor* $C(\tau)$ *és* $S(\tau)$ *teljes* L^2-*ben.*

BIZONYÍTÁS: Vezessük be az $\alpha = \operatorname{Re}\tau$ jelölést. Tegyük fel, hogy $f(x)$ négyzetesen integrálható és ortogonális $C(\tau)$-ra, azaz

$$\int_0^\pi f(x)\cos(k+\tau)x\,dx = \int_0^\pi f(x)\cos\tau x\cos kx\,dx - \int_0^\pi f(x)\sin\tau x\sin kx\,dx = 0$$

$$(k=0,1,2,\ldots).$$

Legyen

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos\tau x\cos kx\,dx.$$

Akkor

(2) $$f(x)\cos\tau x \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx \qquad (0 \leqq x \leqq \pi),$$

(3) $$f(x)\sin\tau x \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin kx \qquad (0 \leqq x \leqq \pi).$$

Írjuk fel a Parseval-egyenlőséget erre a két Fourier-sorra:

$$\int_0^\pi |f(x)|^2|\cos\tau x|^2 dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2,\ \int_0^\pi |f(x)|^2|\sin\tau x|^2 dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2.$$

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$\int_0^\pi |f(x)|^2(|\cos\tau x|^2 - |\sin\tau x|^2)\,dx = \int_0^\pi |f(x)|^2\cos^2\alpha x - \sin^2\alpha x)\,dx =$$

$$= \int_0^\pi |f(x)|^2\cos 2\alpha x\,dx = 0.$$

* Megjegyzendő, hogy az L-re nézve való teljességre a zártság eldöntésénél nem lesz szükség.

Ha $|\alpha| \leqq \frac{1}{4}$, akkor $\cos 2\alpha x$ a $0 < x < \pi$ intervallumon pozitív, s így $f(x)$ szükségképpen m. m. 0. Következésképp $C(\tau)$ teljes L^2-re nézve, ha $|\mathrm{Re}\,\tau| \leqq \frac{1}{4}$.

Szorozzuk meg (2)-t $\cos\frac{x}{2}$-vel, (3)-at $\sin\frac{x}{2}$-vel, és adjuk a kettőt össze, majd szorozzuk meg (2)-t $-\sin\frac{x}{2}$-vel, (3)-at $\cos\frac{x}{2}$-vel, és adjuk a kettőt össze:

$$f(x)\cos\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x \sim \sum_{1}^{\infty} a_k \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x \qquad (0 \leqq x \leqq \pi), \tag{4}$$

$$f(x)\sin\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x \sim \sum_{1}^{\infty} a_k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x \qquad (0 \leqq x \leqq \pi). \tag{5}$$

Könnyen belátható, hogy ezeket a formális átalakításokat jogos volt elvégezni abban az értelemben, hogy (4) és (5) jobboldalai $f(x)\cos\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x$ ill. $f(x)\sin\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x$ Fourier-sorai a $[0, \pi]$ intervallumon ortogonális $\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x$ $(k=1, 2, \ldots)$ ill. $\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x$ $(k=1, 2, \ldots)$ rendszer szerint. Ezek a rendszerek teljesek $L^2[0, \pi]$-re nézve. Ez az állítás ekvivalens azzal, hogy a $\left\{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x, \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ rendszer teljes $L^2[-\pi, \pi]$-re nézve, ez pedig ekvivalens azzal, hogy az $e^{i\left(k-\frac{1}{2}\right)x}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ rendszer teljes $L^2[-\pi, \pi]$-re nézve. Ez azonban nyilván igaz, mert ha $g(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ és

$$g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\left(k-\frac{1}{2}\right)x},$$

akkor

$$g(x)e^{i\frac{x}{2}} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

s az e^{ikx} függvények teljessége miatt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2,$$

azaz az $e^{i\left(k-\frac{1}{2}\right)x}$ rendszerre érvényes a Parseval-egyenlőség, s így az valóban teljes.

Tehát a $\left\{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right\}$ és a $\left\{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right\}$ rendszerek is teljesek $L^2[0,\pi]$-re nézve. Így a (4) és (5) sorfejtésekre érvényes a Parseval-egyenlőség:

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 \left|\cos\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x\right|^2 dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 \text{ és } \int_0^\pi |f(x)|^2 \left|\sin\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x\right|^2 dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2.$$

Innen

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 \left\{\left|\cos\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x\right|^2 - \left|\sin\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x\right|^2\right\} dx =$$

$$= \int_0^\pi |f(x)|^2 \left\{\cos^2\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)x - \sin^2\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)x\right\} dx =$$

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 \cos(2\alpha-1)x\, dx = 0.$$

Ha $\frac{1}{4} \leqq \alpha \leqq \frac{3}{4}$, akkor $\cos(2\alpha-1)x$ a $0<x<\pi$ intervallumon pozitív, s így szükségképpen $f(x)=0$ m. m. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $C(\tau)$ L^2-re nézve teljes, ha $\frac{1}{4} \leqq \operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{4}$.

Hátra van még az az eset, amikor $\alpha < -\frac{1}{4}$. Legyen n olyan pozitív egész szám, melyre $-\frac{1}{4} \leqq \alpha + n \leqq \frac{3}{4}$. A már bizonyítottak szerint $C(\tau+n)$ teljes L^2-re nézve, s azért $C(\tau+n) \subset C(\tau)$ miatt $C(\tau)$ is teljes L^2-re nézve.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $C(\tau)$ teljes L^2-re nézve, ha $\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{4}$.

Teljesen hasonlóan bizonyítható ugyanez $S(\tau)$-ra is, de ahelyett, hogy a fenti bizonyítást megismételnénk, parciális integrálás segítségével is könynyen beláthatjuk, hogy $S(\tau)$ teljessége L^2-re nézve következik $C(\tau)$ teljességéből.

2.

Most megmutatjuk, hogy $C(\tau)$ nem teljes L^2-re nézve, ha $\operatorname{Re}\tau > \frac{3}{4}$. Ez abból a tényből következik, hogy $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ ortogonális $C(\tau)$-ra, ha $\operatorname{Re}\tau > \frac{1}{2}$

s ez a függvény négyzetesen integrálható, ha $\operatorname{Re}\tau > \frac{3}{4}$. Ennek igazolására a következő integrálformulára hivatkozunk:

$$\int_0^\pi \cos^{a-1}\frac{x}{2}\cos b\frac{x}{2}\,dx = \frac{2\pi\Gamma(a)}{2^a\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)},$$

ha $\operatorname{Re} a > 0$ és $\frac{1}{\Gamma(z)} = 0$, ha z $\Gamma(z)$-nek pólusa továbbá a $\cos^{a-1}\frac{x}{2}$ és a 2^a hatványok a főértéket jelentik. (L. [7] 189. o. és [8] 108. o.).

Az idézetteknél valamivel rövidebben a következőképpen számítható ki a baloldali integrál. Legyen $\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} a - 1 > -1$. A $z = e^{ix}$ helyettesítéssel

$$I = \int_0^\pi \cos^{a-1}\frac{x}{2}\cos b\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{a-1}\frac{x}{2}e^{ib\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{2^a}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{1-a+b}{2}x}(1+e^{ix})^{a-1}\,dx =$$

$$= -\frac{i}{2^a}\int_C z^{-\frac{a-b+1}{2}}(1+z)^{a-1}\,dz,$$

ahol C a pozitív irányítású egységkört jelenti. Ha az integrációs utat az ábra szerint deformáljuk és $r \to 0$, azt kapjuk, hogy

$$I = -\frac{i}{2^a}\int_{-1}^{0}|x|^{-\frac{a-b+1}{2}}(1+x)^{a-1}\,dx\,\sin\left(\frac{a-b+1}{2}\pi\right)2i =$$

$$= \frac{2}{2^a}\sin\left(\frac{a-b+1}{2}\pi\right)\int_0^1 x^{-\frac{a-b+1}{2}}(1-x)^{a-1}\,dx =$$

$$= \frac{2}{2^a}\sin\left(\frac{a-b+1}{2}\pi\right)B\left(\frac{1-a+b}{2}, a\right) =$$

$$= \frac{2}{2^a}\sin\left(\frac{a-b+1}{2}\pi\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1+b-a}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\pi\Gamma(a)}{2^a\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)}.$$

Analitikus folytatással a formula érvényessége kiterjeszthető a $\operatorname{Re} b \leq \operatorname{Re} a - 1$ esetre is.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

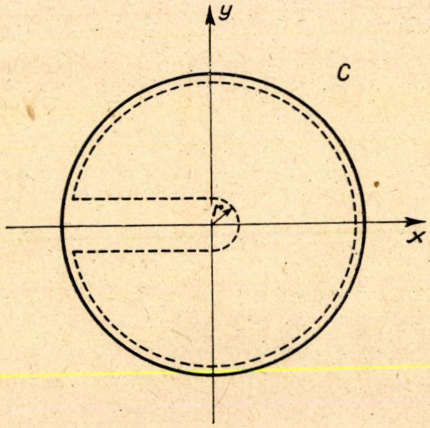
I. TÉTEL. *$C(\tau)$ L^2-re nézve akkor és csak akkor teljes, ha* $\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{4}$.

Innen rögtön következik a

II. TÉTEL. *$CS(\tau)$ L^2-re nézve akkor és csak akkor teljes, ha* $\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{4}$

(Sajdukov tételének élesítése).

A II. tételre adott fenti bizonyításunk SAJDUKOV bizonyításától teljesen eltérő és annál lényegesen egyszerűbb.



1. ábra

2. §.

1.

Ebben a paragrafusban már arra a sokkal általánosabb kérdésre kívánunk válaszolni, hogy a $C(\tau)$, $C_1(\tau)$ és $S(\tau)$ rendszerek mikor teljesek L^q-ra nézve, ahol $1 \leqq q \leqq \infty$.

Előrebocsátunk egy segédtételt, amely a továbbiak során alapvető szerepet fog játszani.

1. SEGÉDTÉTEL. *Legyen H normált lineáris függvénytér és legyen Ω egy függvényrendszer. Tegyük fel, hogy Ω-t alkalmas n számú $g_1, g_2, \dots g_n$ függvénnyel kibővítve, H-ra nézve teljes rendszert kapunk. (Nem tesszük fel, hogy a g-k nem elemei Ω-nak.) Azt állítjuk, hogy H-nak Ω-ra ortogonális függvényei legfeljebb n-dimenziós halmazt alkotnak. Ugyanez igaz akkor is, ha H Ω-ra nézve súlytér.*

BIZONYÍTÁS: Ha a segédtétel nem igaz, akkor meg lehet adni $n+1$ számú lineárisan független, Ω-ra ortogonális $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$ függvényt H-ban.

Ha a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ számok a

$$\sum_{\nu=1}^{n+1}\left(\int_a^b f_\nu g_\mu\right)x_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszer egy nem triviális megoldását jelentik, akkor $\sum_{\nu=1}^{n+1} c_\nu f_\nu$ ortogonális az $\{\Omega, g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ rendszerre, s így ezen rendszer teljessége miatt $\sum_{\nu=1}^{n+1} c_\nu f_\nu$ nullfüggvény, ami viszont az f-ek lineáris függetlensége miatt lehetetlen. Minthogy a fenti egyenletrendszernek mindig van nem triviális megoldása, azért ellentmondásra jutottunk, amivel a segédtétel első részét bebizonyítottuk. Ha H súlytér, a bizonyítás ugyanúgy megy.

Külön kiemeljük az 1. segédtétel következő speciális esetét:

1′ SEGÉDTÉTEL. *Ha egy Ω függvényrendszer egy függvény adjunkciójával egy lineáris normált H (súly-)függvénytérre nézve teljessé tehető, akkor H lényegében legfeljebb csak egy Ω-ra ortogonális (súly-)függvényt tartalmaz.*

Ebben a paragrafusban többször hallgatólagosan fel fogjuk használni a következő tényeket:

Ha egy függvényrendszer egy függvénytérre nézve teljes, akkor annak minden alterére nézve is teljes. Ha egy függvényrendszerhez nem található rá ortogonális, korlátos variációjú folytonos súlyfüggvény, akkor nincs rá ortogonális integrálható függvény sem.

Ebben a paragrafusban mindvégig feltesszük, hogy $\tau \neq 0, -1, -2, \ldots$, hacsak az ellenkezőjét explicite ki nem kötjük.

2.

Meg fogjuk mutatni, hogy $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ bizonyos értelemben az egyedüli $C(\tau)$-ra ortogonális függvény, ha α nem túl nagy. Tegyük fel, hogy $\frac{3}{4} < \alpha \leqq \frac{7}{4}$. Akkor a I. tétel szerint $C(\tau-1)$ teljes L^2-re nézve. Minthogy $C(\tau-1) = \{\cos(\tau-1)x\} + C(\tau)$, azért ez azt jelenti, hogy $C(\tau)$ már egy függvény adjunkciójával L^2-re nézve teljessé tehető, s így az 1′ segédtétel értelmében $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ lényegében az egyedüli olyan négyzetesen integrálható függvény, amely $C(\tau)$-ra ortogonális. Ebből az észrevételünkből és a I. tételből következik a

2. SEGÉDTÉTEL. *Ha $\alpha < 1$, nincs $C(\tau)$-ra ortogonális, 0-tól különböző korlátos függvény. Ha $1 \leqq \alpha \leqq \frac{7}{4}$, $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ lényegében az egyedüli $C(\tau)$-ra ortogonális, korlátos függvény.*

3.

Tegyük fel, hogy $f(x) \in V^0$, $f(x) \neq 0$ és hogy az $f(x)$ súlyfüggvény ortogonális $S(\tau)$-ra. Az ortogonalitás miatt parciális integrálással adódik, hogy

$$0 = \int_0^\pi \sin(k+\tau)x\, df(x) = [f(x)\sin(k+\tau)x]_0^\pi - (k+\tau)\int_0^\pi f(x)\cos(k+\tau)x\, dx.$$

Innen $k+\tau \neq 0$ miatt

$$\int_0^\pi f(x)\cos(k+\tau)x\, dx = 0.$$

Tehát $f(x)$ ortogonális $C(\tau)$-ra. Jegyezzük még meg, hogy $f(x)$ korlátos. A 2. segédtétel szerint, ha $\alpha < 1$, akkor

$$f(x) = 0 \quad \text{m. m.}$$

$f(x) \in V^0$ miatt innen következik, hogy

$$f(x) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq \pi),$$

amivel bebizonyítottuk, hogy $\alpha < 1$ esetén $S(\tau)$ V^0-ra nézve teljes. Ha $1 \leqq \alpha \leqq \frac{7}{4}$, ugyancsak a 2. segédtétel szerint konstans szorzótól eltekintve

$$f(x) = \cos^{2\tau-2}\frac{x}{2} \quad \text{m. m.}$$

Megint $f(x) \in V^0$ miatt innen következik, hogy

$$f(x) = \cos^{2\tau-2}\frac{x}{2} \qquad (0 \leqq x < \pi).$$

Ha $\alpha = 1$, de $\tau \neq 1$, akkor $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$-nek nincs a π helyen baloldali határértéke, s így a tett feltevéseknek eleget tevő $f(x)$ függvény nem létezik. Ha $\tau = 1$, adódik, hogy

$$f(x) = 1, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq x < \pi \quad \text{és} \quad f(\pi) = 0.$$

Ez a függvény valóban beletartozik V^0-ba és mint súlyfüggvény ortogonális $S(1)$-re. A továbbiakban ezt a függvényt $p(x)$-szel fogjuk jelölni. Ha $1 < \alpha \leqq \frac{7}{4}$, akkor adódik, hogy

$$f(x) = \cos^{2\tau-2}\frac{x}{2} \qquad (0 \leqq x \leqq \pi),$$

s ez a függvény valóban beletartozik V^0-ba és mint súlyfüggvény ortogonális $S(\tau)$-ra, ha $\alpha > 1$.

Foglaljuk össze ezeket az észrevételeket:

3. SEGÉDTÉTEL. *Ha $\alpha \leqq 1$ és $\tau \neq 1$, akkor nincs $S(\tau)$-ra ortogonális, V^0-beli 0-tól különböző súlyfüggvény. $p(x)$ lényegében az egyedüli V^0-beli*

$S(1)$-re ortogonális súlyfüggvény. Ha $\alpha > 1$, a $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ súlyfüggvény beletartozik V^0-ba és ortogonális $S(\tau)$-ra. Ha $1 < \alpha \leqq \frac{7}{4}$, lényegében ez az egyedüli $S(\tau)$-ra ortogonális súlyfüggvény V^0-ban.

Innen rögtön adódik a következő

4. SEGÉDTÉTEL. *$\alpha \leqq 1$ esetén nincs $S(\tau)$-ra ortogonális integrálható függvény. Ha $\alpha > 1$, akkor*

$$\frac{d}{dx}\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2} = -(\tau-1)\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$S(\tau)$-ra ortogonális integrálható függvény és ha $1 < \alpha \leqq \frac{7}{4}$, akkor lényegében ez az egyedüli $S(\tau)$-ra ortogonális, integrálható függvény.

Ez a függvény $\alpha > 1$ esetén akkor és csak akkor korlátos, ha $\alpha \geqq \frac{3}{2}$ és a q-adik hatványa $(1 \leqq q < \infty)$ akkor és csak akkor integrálható, ha $\alpha > \frac{3}{2} - \frac{1}{2q}$.

Ha $\tau = 0, -1, -2, \ldots$, akkor ismeretes, hogy $S(\tau)$ L-re nézve teljes. A V^0 súlytérre nézve azonban nem teljes, mert $p(x)$ mint súlyfüggvény ortogonális $S(\tau)$-ra.

$S(\tau)$ semmilyen τ-ra nem teljes V-re nézve, mert a 0 hely karakterisztikus függvénye beletartozik V-be és ortogonális $S(\tau)$-ra.

Fenti eredményeinket a következő tételben foglaljuk össze:

III. TÉTEL. *$S(\tau)$ semmilyen τ-ra nem teljes a V súlytérre nézve. $S(\tau)$ V^0-ra nézve akkor és csak akkor teljes, ha $\operatorname{Re}\tau \leqq 1$ és $\tau \neq 1, 0, -1, -2, \ldots$ $S(\tau)$ L^q-ra nézve $(1 \leqq q < \infty)$ akkor és csak akkor teljes, ha $\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{2} - \frac{1}{2q}$. $S(\tau)$ L^∞-re nézve akkor és csak akkor teljes, ha $\operatorname{Re}\tau < \frac{3}{2}$.*

4.

Tegyük fel, hogy $f(x) \in V, f(x) \not\equiv 0$ és, hogy $f(x)$ ortogonális $C_1(\tau)$-ra. Akkor

$$\int_0^\pi df(x) = 0 \text{ és } \int_0^\pi \cos(k+\tau)x\,df(x) = [\cos(k+\tau)x f(x)]_0^\pi +$$
$$+(k+\tau)\int_0^\pi \sin(k+\tau)x f(x)\,dx = 0.$$

Innen $f(0)=f(\pi)=0$, továbbá $k+\tau\neq 0$ miatt

$$\int_0^\pi f(x)\sin(k+\tau)x\,dx=0,$$

azaz $f(x)$ ortogonális $S(\tau)$-ra. Minthogy $f(x)$ korlátos, azért a III. tétel szerint ilyen $f(x)$ $\alpha<\frac{3}{2}$ esetén nem létezhet. Tegyük most fel, hogy $\frac{3}{2}\leqq\alpha\leqq 2$. Akkor a III. tétel szerint $S(\tau-1)$ L-re nézve teljes. Tehát az $S(\tau)$ rendszer a $\sin(\tau-1)x$ függvény adjungálásával L-re nézve teljessé tehető, s így az 1′ segédtétel értelmében L-ben lényegében csak egy $S(\tau)$-ra ortogonális függvény létezhet. A 4. segédtétel szerint $\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$ ortogonális $S(\tau)$-ra, ha $\alpha>1$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\frac{3}{2}\leqq\alpha\leqq 2$ esetén lényegében ez az egyedüli integrálható, $S(\tau)$-ra ortogonális függvény. Tehát konstans szorzótól eltekintve

$$f(x)=\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\qquad(0<x<\pi),$$

ha $\frac{3}{2}\leqq\alpha\leqq 2$. Ha $\alpha=\frac{3}{2}$, de $\tau\neq\frac{3}{2}$, akkor a feltevéseknek eleget tevő $f(x)$ függvény nem létezhet, mert $\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$-nek nincs a π helyen baloldali határértéke. Ha $\tau=\frac{3}{2}$, akkor adódik, hogy

$$f(x)=\sin\frac{x}{2}\qquad(0\leqq x<\pi),$$
$$f(\pi)=0.$$

Ez a függvény valóban V-beli és mint súlyfüggvény $C_1\left(\frac{3}{2}\right)$-re ortogonális. Ha $\frac{3}{2}<\alpha\leqq 2$, akkor adódik, hogy

$$f(x)=\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\qquad(0\leqq x\leqq\pi),$$

s ez a függvény valóban beletartozik V-be és mint súlyfüggvény $C_1(\tau)$-ra ortogonális, ha $\alpha>\frac{3}{2}$. Ezzel bebizonyítottuk a következő segédtételt:

5. SEGÉDTÉTEL. *Ha* $\alpha<\frac{3}{2}$ *vagy ha* $\alpha=\frac{3}{2}$, *de* $\tau\neq\frac{3}{2}$, *akkor nincs* $C_1(\tau)$*-ra ortogonális* V*-beli, nem* 0 *súlyfüggvény. A* π *helyen eltűnő, a* $0\leqq x<\pi$ *intervallumon* $\sin\frac{x}{2}$*-vel egyenlő függvény lényegében az egyedüli*

$C_1\left(\frac{3}{2}\right)$*-re ortogonális súlyfüggvény. Ha* $\alpha > \frac{3}{2}$, $\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$ *V-beli,* $C_1(\tau)$*-ra ortogonális súlyfüggvény. Ha* $\frac{3}{2} < \alpha \leqq 2$, *lényegében ez az egyedüli V-beli,* $C_1(\tau)$*-ra ortogonális súlyfüggvény.*

Az 5. segédtételből közvetlenül folyik a

6. SEGÉDTÉTEL. *Ha* $\alpha \leqq \frac{3}{2}$, *nincs* $C_1(\tau)$*-ra ortogonális integrálható függvény. Ha* $\alpha > \frac{3}{2}$, *a*

$$\frac{d}{dx}\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = (\tau-1)\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2} - \frac{2\tau-3}{2}\cos^{2\tau-4}\frac{x}{2}$$

függvény integrálható és ortogonális $C_1(\tau)$*-ra. Ha* $\frac{3}{2} < \alpha \leqq 2$, *lényegében ez az egyedüli ilyen tulajdonságú függvény.*

Jegyezzük meg, hogy $(\tau-1)\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2} - \frac{2\tau-3}{2}\cos^{2\tau-4}\frac{x}{2}$ $\alpha > \frac{3}{2}$ esetén akkor és csak akkor korlátos, ha $\alpha \geqq 2$ és akkor és csak akkor integrálható a q-adik hatványával, ha $\alpha > 2 - \frac{1}{2q}$ $(1 \leqq q < \infty)$.

Ismeretes, hogy ha $\tau = 0, -1, -2, \ldots$, akkor $C(\tau)$ V-ben teljes.

Az 5. és 6. segédtételekből és ezen két utóbbi megjegyzésünkből következik a

IV. TÉTEL. $C_1(\tau)$ *akkor és csak akkor teljes V-re nézve, ha* $\mathrm{Re}\,\tau \leqq \frac{3}{2}$, *de* $\tau \neq \frac{3}{2}$. $C_1(\tau)$ *akkor és csak akkor teljes* L^q*-ra nézve* $(1 \leqq q < \infty)$, *ha* $\mathrm{Re}\,\tau \leqq 2 - \frac{1}{2q}$. $C_1(\tau)$ *akkor és csak akkor teljes* L^∞*-re nézve, ha* $\mathrm{Re}\,\tau < 2$.

5.

Végezetül a $C(\tau)$ rendszer teljességét vizsgáljuk meg. Legyen először $-\frac{1}{2} < \alpha \leqq \frac{1}{2}$, de $\tau \neq \frac{1}{2}$. Akkor $\frac{1}{2} < \alpha + 1 \leqq \frac{3}{2}$, de $\tau + 1 \neq \frac{3}{2}$ s így a IV. tétel szerint a $C_1(\tau+1)$ rendszer V-re nézve teljes. Az 1' segédtétel szerint akkor lényegében legfeljebb csak egy $C(\tau+1)$-re ortogonális súlyfüggvény létezik V-ben; ez nyilván $-\int_x^\pi \cos^{2\tau}\frac{t}{2}\,dt$, hiszen tudjuk, hogy $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ ortogonális $C(\tau)$-ra, ha $\mathrm{Re}\,\tau > \frac{1}{2}$. Minthogy egyrészt $C(\tau) = \{\cos\tau x\} + C(\tau+1)$, másrészt pedig

$$\int_0^\pi \cos \tau x \, d\left[-\int_x^\pi \cos^{2\tau}\frac{t}{2}\,dt\right] = \int_0^\pi \cos\tau x \cos^{2\tau}\frac{x}{2}\,dx = \frac{\pi}{4^\tau} \neq 0$$

(l. 11. old.), azért ha $-\frac{1}{2} < \alpha \leqq \frac{1}{2}$ és $\tau \neq \frac{1}{2}$, akkor nincsen $C(\tau)$-ra ortogonális, 0-tól különböző V-beli súlyfüggvény.

A $C_1\left(\frac{1}{2}\right)$ rendszer a IV. tétel szerint V-re nézve teljes. Így az 1' segédtétel szerint $p(x)$ lényegében az egyedüli $C\left(\frac{1}{2}\right)$-re ortogonális súlyfüggvény.

Ha $\frac{1}{2} < \alpha$, akkor $-\int_x^\pi \cos^{2\tau-2}\frac{t}{2}\,dt$ $C(\tau)$-ra ortogonális súlyfüggvény V-ben.

Ha $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$, akkor $C_1(\tau)$ IV. szerint V-re nézve teljes, s így az 1' segédtétel szerint $-\int_x^\pi \cos^{2\tau-2}\frac{t}{2}\,dt$ lényegében az egyedüli $C(\tau)$-ra ortogonális súlyfüggvény V-ben.

Ha $\alpha \leqq -\frac{1}{2}$ és $\tau \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots$ akkor van olyan n egész szám, amelyre $-\frac{1}{2} < \alpha + n \leqq \frac{1}{2}$, de $\tau + n \neq \frac{1}{2}$. Akkor viszont a fentiek szerint $C(\tau+n)$ V-re nézve teljes, s így a fortiori $C(\tau)$ is.

Ha még figyelembe vesszük, hogy $C\left(\frac{1}{2}\right) = C\left(-\frac{1}{2}\right) = C\left(-\frac{3}{2}\right) = = \ldots$, akkor kimondhatjuk a következő segédtételt:

7. SEGÉDTÉTEL. *Ha* $\alpha \leqq \frac{1}{2}$ *és* $\tau \neq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots,$ *akkor* $C(\tau)$ *V-re nézve teljes. $p(x)$ lényegében az egyedüli* $C\left(\frac{1}{2}-k\right)$*-ra* $(k=0, 1, 2, \ldots)$ *ortogonális súlyfüggvény V-ben. Ha* $\alpha > \frac{1}{2}$, $-\int_x^\pi \cos^{2\tau-2}\frac{t}{2}\,dt$ $C(\tau)$*-ra ortogonális súlyfüggvény V-ben. Ha* $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$, *lényegében ez az egyedüli* $C(\tau)$*-ra ortogonális, V-beli súlyfüggvény.*

Innen rögtön következik a

8. SEGÉDTÉTEL. *Ha* $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, *nincs* $C(\tau)$*-ra ortogonális integrálható, 0-tól különböző függvény. Ha* $\alpha > \frac{1}{2}$, $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ *ortogonális* $C(\tau)$*-ra. Ha* $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$, *lényegében ez az egyedüli* $C(\tau)$*-ra ortogonális, integrálható függvény.*

A $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ függvény akkor és csak akkor korlátos, ha $\alpha \geqq 1$, és akkor és csak akkor tartozik L^q-ba $(1 \leqq q < \infty)$, ha $\alpha > 1 - \frac{1}{2q}$.

Ismeretes, hogy ha $\tau = 0, -1, -2, \ldots$, akkor $C(\tau)$ V-re nézve teljes. Ezzel bebizonyitottuk a következő tételt:

V. TÉTEL. $C(\tau)$ *akkor és csak akkor teljes* V*-re nézve, ha* $\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{1}{2}$, *de* $\tau \neq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ $C(\tau)$ *akkor és csak akkor teljes* L^q*-ra nézve, ha* $\operatorname{Re}\tau \leqq 1 - \frac{1}{2q}$ $(1 \leqq q < \infty)$. $C(\tau)$ *akkor és csak akkor teljes* L^∞*-re nézve, ha* $\operatorname{Re}\tau < 1$.

6.

Ha egy függvényrendszer teljes, de akármelyik függvényét elhagyva a maradékrendszer már nem teljes, akkor azt mondjuk, hogy a rendszer exakte teljes, pontosabban, hogy a rendszer exakte teljes arra a H függvénytérre nézve, amelyre a teljességet vonatkoztatjuk. Ebben a pontban megmutatjuk, hogy a vizsgált trigonometrikus rendszerek, ha teljesek, akkor exakte is teljesek, hacsak α nem kisebb, mint a teljesség határát jelző α érték minusz 1. Ez az állítás még nem egészen pontos, alább közöljük a pontos tételt.

Itt meg kell jegyeznünk, hogy az exaktság vizsgálatánál a $C(\tau)$, $C_1(\tau)$ stb. függvényrendszereket nem mint függvényhalmazokat, hanem mint függvénysorozatokat tekintjük, s egy függvényt annyiszor számítunk egy rendszerhez, ahányszor az előfordul, ha k befutja a $0, 1, 2, \ldots$ értékeket. Így pl. $C\left(\frac{1}{2}\right)$ V-re nézve exakte teljes, de $C\left(-\frac{1}{2}\right)$ nem, jóllehet $C\left(\frac{1}{2}\right)$ és $C\left(-\frac{1}{2}\right)$ ugyanazokból a függvényekből áll.

VI. TÉTEL. α. 1. $C(\tau)$ *V-re nézve akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\tau \leqq \frac{1}{2}$, *de* $\tau \neq \frac{1}{2}$. 2. $C(\tau)$ *L^q-ra nézve* $(1 \leqq q < \infty)$ *akkor* *és csak akkor exakte teljes, ha* $-\frac{1}{2q} < \operatorname{Re}\tau \leqq 1 - \frac{1}{2q}$. 3. $C(\tau)$ L^∞*-re nézve akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $0 \leqq \operatorname{Re}\tau < 1$.

β. 1. $C_1(\tau)$ *V-re nézve akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{2}$, *de* $\tau \neq \frac{3}{2}$ *és még ha* $\tau = \frac{1}{2}$. 2. $C_1(\tau)$ L^q*-ra nézve* $(1 \leqq q < \infty)$ *akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $1 - \frac{1}{2q} < \operatorname{Re}\tau \leqq 2 - \frac{1}{2q}$. 3. $C_1(\tau)$ L^∞*-re nézve akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $1 \leqq \operatorname{Re}\tau < 2$.

γ. 1. $S(\tau)$ *akkor és csak akkor exakte teljes* V^0*-ra nézve, ha* $0 < \operatorname{Re}\tau \leqq 1$ *és* $\tau \neq 1$. 2. $S(\tau)$ L^q*-ra nézve* $(1 \leqq q < \infty)$ *akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} < \operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{2} - \frac{1}{2q}$. 3. $S(\tau)$ L^∞*-re nézve akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $\frac{1}{2} \leqq \operatorname{Re}\tau < \frac{3}{2}$.

BIZONYÍTÁS: Minthogy a közölt 9 állítás bizonyítása egymáshoz teljesen hasonló, megelégszünk γ. 1. bizonyításával.

A III. tétel miatt a $0 < \operatorname{Re}\tau \leqq 1$, $\tau \neq 1$ feltétel szükségessége nyilvánvaló. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel elégséges is.

Tekintsük a $0 < \operatorname{Re}\tau \leqq 1$, $\tau \neq 1$ feltevés mellett az $S(\tau + k + 1)$ rendszert, ahol k nemnegatív egész szám. A 3. segédtétel szerint

$$\operatorname{Re}\tau + \nu + 1 > 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, k)$$

miatt a

$$\cos^{2\tau}\frac{x}{2}, \cos^{2\tau+2}\frac{x}{2}, \ldots, \cos^{2\tau+2k}\frac{x}{2} \tag{6}$$

súlyfüggvények rendre ortogonálisak az $S(\tau+1), S(\tau+2), \ldots, S(\tau+k+1)$ rendszerekre, s így mindnyájan ortogonálisak ezen rendszerek legkisebbikére, $S(\tau+k+1)$-re. Teljesen nyilvánvaló, hogy a (6) függvények V^0-ban lineárisan függetlenek. Következésképp V^0-nak $S(\tau+k+1)$-re ortogonális altere legalább $k+1$ dimenziós. Az 1. segédtétel értelmében akkor $S(\tau+k+1)$ k számú függvény adjunkciójával V^0-ra nézve semmiképp sem tehető teljessé, s így az $\{S(\tau+k+1), \sin\tau x, \sin(\tau+1)x, \ldots, \sin(\tau+k-1)x\} = S(\tau) - \{\sin(k+\tau)x\}$ rendszer V^0-ra nézve nem teljes. Tehát $S(\tau)$ tetszőleges elemét elhagyva a maradékrendszer már V^0-ra nézve nem teljes, s éppen ezt kellett bizonyítani.

3. §.

1.

A III., IV., V. és VI. tételek alapján most már kimondhatjuk a vizsgált függvényrendszerek zártságáról szóló tételt. Az „exakt zártság" fogalmát az exakt teljességhez teljesen hasonló módon értelmezzük. Ahelyett, hogy azt mondanók, hogy egy függvényrendszer egy térben exakte zárt, röviden azt mondjuk, hogy a függvényrendszer exakt az illető térben. Könnyebb áttekinthetőség kedvéért a tételt táblázatos alakban közöljük. A bevezetőben mondottak alapján, a fenti tételekből a $CS(\tau)$ és $C_1S(\tau)$ rendszerek zártsági viszonyai is könnyen kiolvashatók. Külön kiemeljük a következő tételt:

VII. TÉTEL. *A* $\cos\tau x, \sin\tau x, \cos(1+\tau)x, \sin(1+\tau)x, \ldots$ *függvények lineáris kombinációival akkor és csak akkor lehet minden folytonos függvényt a* $[-\pi, \pi]$ *intervallumon tetszőleges pontossággal egyenletesen approximálni, ha* $\mathrm{Re}\,\tau \leqq \frac{1}{2}$ *és* 2τ *nem egész szám. Ha a fenti rendszerhez még az* $f(x) \equiv 1$ *függvényt is hozzávesszük, akkor az approximálhatóság feltétele az, hogy* $\mathrm{Re}\,\tau \leqq 1$ *legyen, és hogy* τ *ne legyen egész szám.*

2.

Legyen Ω a véges $[a, b]$ intervallumon értelmezett korlátos és integrálható függvényeknek egy halmaza. Ismeretes, hogy ha Ω zárt L^p-ben, akkor zárt $L^{p'}$-ben is, ha $1 \leqq p' < p \leqq \infty$. Így található egy olyan $1 \leqq \gamma \leqq \infty$ szám, amely elválasztja egymástól azokat a p értékeket, melyekre Ω L^p-ben zárt és amelyekre nem zárt. Ha Ω semelyik L^p térben sem zárt, legyen $\gamma = 1$; ha mindegyik L^p térben $(1 \leqq p < \infty)$ zárt, legyen $\gamma = \infty$. Mármost Ω zártsági fokát $\varrho(\Omega)$-t a következő szimbólummal értelmezzük:

$\varrho(\Omega) = \gamma$, ha Ω L^γ-ban zárt;

$\varrho(\Omega) = \gamma - 0$, ha Ω L^γ-ban zárt.

Ezen fogalom birtokában pl. a $CS(\tau)$ és a $C_1S(\tau)$ rendszerek zártságára vonatkozó tétel a következőképpen fogalmazható meg:

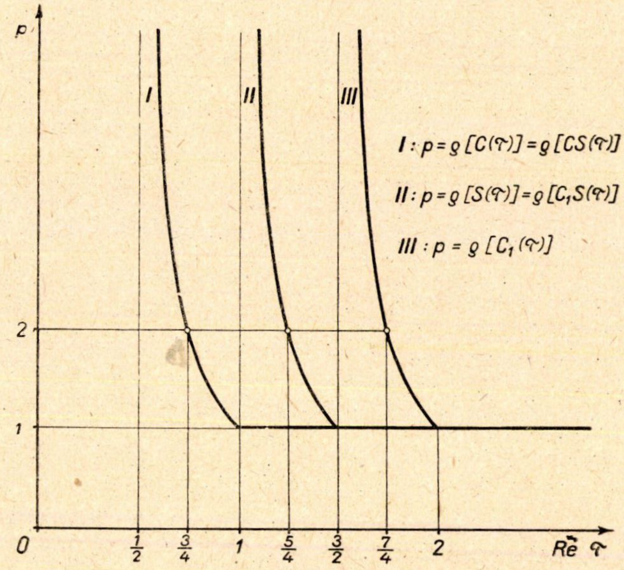
$$\varrho[CS(\tau)] = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,\mathrm{Re}\,\tau - 1}, & \text{ha } \dfrac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\tau < 1, \\ 1 - 0, & \text{ha } \mathrm{Re}\,\tau = 1, \\ \infty - 0, & \text{ha } \mathrm{Re}\,\tau \leqq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\varrho[C_1S(\tau)] = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,\mathrm{Re}\,\tau - 2}, & \text{ha } 1 < \mathrm{Re}\,\tau < \dfrac{3}{2}, \\ 1 - 0, & \text{ha } \mathrm{Re}\,\tau = \dfrac{3}{2}, \\ \infty - 0, & \text{ha } \mathrm{Re}\,\tau = 1. \end{cases}$$

	akkor és csak akkor zárt				akkor és csak akkor exakt			
	$C[0,\pi]$-ben, ha	$C^0[0,\pi]$-ben, ha	$L^p[0,\pi]$-ben $(1<p<\infty)$, ha	$L[0,\pi]$-ben, ha	$C[0,\pi]$-ben, ha	$C^0[0,\pi]$-ben, ha	$L^p[0,\pi]$-ben $(1<p<\infty)$, ha	$L[0,\pi]$-ben, ha
$C(\tau)$	$\operatorname{Re}\tau\leqq\frac{1}{2}$, de $\tau\neq\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\dots$	——	$\operatorname{Re}\tau\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}$.	$\operatorname{Re}\tau<1$.	$-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\tau\leqq\frac{1}{2}$, de $\tau\neq\frac{1}{2}$.	——	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}<\operatorname{Re}\tau\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}$.	$0\leqq\operatorname{Re}\tau<1$.
$C_1(\tau)$	$\operatorname{Re}\tau\leqq\frac{3}{2}$, de $\tau\neq\frac{3}{2}$.	——	$\operatorname{Re}\tau\leqq\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}$.	$\operatorname{Re}\tau<2$.	$\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\tau\leqq\frac{3}{2}$, de $\tau\neq\frac{3}{2}$, továbbá, ha $\tau=\frac{1}{2}$.	——	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}<\operatorname{Re}\tau\leqq\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}$.	$1\leqq\operatorname{Re}\tau<2$.
$S(\tau)$	semmilyen τ-ra sem zárt $C[0,\pi]$-ben.	$\operatorname{Re}\tau\leqq1$, de $\tau\neq1,0,-1,-2,\dots$	$\operatorname{Re}\tau\leqq1+\frac{1}{2p}$.	$\operatorname{Re}\tau<\frac{3}{2}$.	semmilyen τ-ra sem exakt $C[0,\pi]$-ben.	$0<\operatorname{Re}\tau\leqq1$, de $\tau\neq1$.	$\frac{1}{2p}<\operatorname{Re}\tau\leqq1+\frac{1}{2p}$.	$\frac{1}{2}\leqq\operatorname{Re}\tau<\frac{3}{2}$.

	akkor és csak akkor zárt			akkor és csak akkor exakt		
	$C[-\pi,\pi]$-ben, ha	$L^p[-\pi,\pi]$-ben $(1<p<\infty)$, ha	$L[-\pi,\pi]$-ben, ha	$C[-\pi,\pi]$-ben, ha	$L^p[-\pi,\pi]$-ben $(1<p<\infty)$, ha	$L[-\pi,\pi)$-ben, ha
$CS(\tau)$	$\operatorname{Re}\tau\leqq\frac{1}{2}$, de $\tau\neq\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2},\dots$	$\operatorname{Re}\tau\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}$.	$\operatorname{Re}\tau<1$.	$0<\operatorname{Re}\tau\leqq\frac{1}{2}$, de $\tau\neq\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2p}<\operatorname{Re}\tau\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}$.	$\frac{1}{2}\leqq\operatorname{Re}\tau<1$.
$C_1S(\tau)$	$\operatorname{Re}\tau\leqq1$, de $\tau\neq1,0,-1,-2,\dots$	$\operatorname{Re}\tau\leqq1+\frac{1}{2p}$.	$\operatorname{Re}\tau<\frac{3}{2}$.	$\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\tau\leqq1$, de $\tau\neq1$, továbbá ha $\tau=\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}<\operatorname{Re}\tau\leqq1+\frac{1}{2p}$.	$1\leqq\operatorname{R}\tau<\frac{3}{2}$.

Ha ϱ-t nem mint szimbólumot, hanem mint számot tekintjük, akkor ϱ-t mint τ függvényét ábrázolhatjuk mindaddig, amíg ϱ véges:



2. *ábra*

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] K. Sajdukov, Egy trigonometrikus rendszer teljességéről, *Uszp. Mat. Nauk*, Tom VIII (1953), 143—153. (oroszul).

[2] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

[3] F, Riesz, Untersuchungen über Systeme interierbarer Funktionen, *Math. Annalen*, 69 (1910), 449—497.

[4] F. Riesz, Sur les opérations fonctionelles linéaires, *Comptes Rendus Akad. Sci.* Paris, 149 (1909), 974—977.

[5] F. Riesz, Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations, *Annales Ecole Norm. Sup.*, 3, 31 (1914), 9—14.

[6] S. Kaczmarz—H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa—Lwow, 1935.

[7] G. L. Dirichlet, Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, Braunschweig (1904).

[8] W. Gröbner und N. Hofreiter, Integraltafel II. Bestimmte Integrale, Wien und Innsbruck, 1950.

AZ ELEKTRON MOZGÁSEGYENLETE

HORVÁTH JÁNOS a fizikai tudományok kandidátusa

Összefoglalás

A dolgozat az elektron mozgásegyenletével kapcsolatos problémákkal foglalkozik, figyelembe véve az elektron mágneses nyomatékának és az elektromágneses térnek a kölcsönhatását is.

Bevezetés

Az elektron mozgásegyenletével kapcsolatos problémák régóta foglalkoztatják azokat, akiket az elektromágneses térrel, ill. az elektromágneses térnek és töltésnek a kölcsönhatásával kapcsolatos kérdések érdekelnek. Az első úttörő vizsgálatokat ezen a téren, az elektronelmélet megindítója, H. A. LORENTZ (1916) végezte,[1] aki először vizsgálta azt a kérdést, hogyan befolyásolja az elektron által keltett elektromágneses tér, az ún. *sajáttér*, az elektronnak a mozgását. Abban az időben az elektron saját mágnesesnyomatéka még nem volt ismeres és így LORENTZ csak az elektron töltésének és az elektromágneses térnek a kölcsönhatását tanulmányozta.

A problémát újra, a nem olyan régen elhúnyt kiváló orosz fizikus, J. I. FRENKEL (1926) elevenítette fel, aki már figyelembe vette az elektron saját-mágneses nyomatékát is, de nem volt tekintettel a mágneses momentum által keltett sajáttérnek az elektron mozgására való visszahatásra.

Annak ellenére, hogy ebben az időben az elektronelméletnek még számos exisztenciális jellegű nyilt problémája volt, melyek közül csak az elektron saját-energiájával, ill. az elektromágneses tömegével kapcsolatos nehézségekre kívánok utalni, az elektronelmélet történetében hosszabb, kissé terméketlenebbnek mondható időszak következett.

A modern elektronelmélet csak P. A. M. DIRAC (1938) vizsgálataival indult meg tizenöt évvel ezelőtt. Ebben nagy része volt részben annak, amint arra DIRAC is rámutatott idézett munkájában, hogy a huszas évek végén és a harmincas évek elején a hirtelen kibontakozó kvantummechanika annyira lekötötte a kutatók érdeklődését, hogy mintegy, nem maradt idő az elektron-

[1] A nevek után írt évszámok egyben irodalmi utalást jelentenek. A felhasznált irodalom a dolgozat végén található meg.

elmélet megfelelő kifejlesztésére; részben pedig, kétségtelenül, fontos szerepet játszott az a körülmény is, hogy sokan éppen a kvantumelmélettől és a vele kapcsolatban kifejlődött kvantumelektrodinamikától remélték az elektronelmélet alapproblémáinak automatikus megoldását.

Míg azonban a kvantumelmélet, ill. a kvantummechanika pl. az atomelmélet számos problémáját valóban automatikusan megoldotta, addig a kvantumelektrodinamika pl. a vákuum-polarizációval kapcsolatban további nehézségeket vetett felszínre. Így mindinkább nyilvánvalóvá vált, hogy a klasszikus elektronelmélet problémáinak a megoldását a klasszikus elmélet keretei közt kell keresni.

Az alapvető problémák és a történeti vonatkozások e vázlatos áttekintésénél meg kell még röviden emlékeznem G. MIE (1912, 1913) klasszikus vizsgálatairól. MIE ugyanis megállapította, hogy amennyiben a relativitási elvvel és az energia megmaradási elvével összhangban akarunk maradni, úgy az elektronnal kapcsolatos problémák két probléma körül csoportosulnak. Részint meg kell tudni magyarázni azt a közismert tényt, hogy minden elektronnak pontosan ugyanakkora a töltése; tehát valamiképpen fel kell deríteni azt a MAXWELL-elmélet szempontjából érthetetlen, természeti törvényt, melynek következtében az összes lehetséges töltéskonfigurációk közül éppen az elektrontöltésnek, ill. az elektrontöltés egész számú többszörösének megfelelő töltésmennyiség stabilis. Végül pedig meg kell indokolni azt, hogy minden elektron véges és azonos nyugalmi tömeggel rendelkezik.

A kvantumelmélet az első problémára kielégítő választ adott azzal, hogy az elektrontöltést az elektromosság elemi kvantumának tekinti, a második problémára azonban nem sikerült kielégítő választ adni. A nehézséget, amint az közismert, az jelenti, hogy pontszerű elektron esetében az elektron elektromágneses tömege végtelenné válik, viszont véges kiterjedésű elektron nem illeszthető be, minden további nélkül a relativisztikus tárgyalási módba.

Bár az utóbbi időben egy négy-dimenziós invariáns segédfüggvény, az ún. „alak-faktor“ bevezetésével H. MCMANUS-nak és R. E. PEIERLS-nek (1948) sikerült a véges kiterjedésű elektront is beillesztenie a relativisztikus elektronelméletbe és ezek a vizsgálatok kétségtelenül igen jelentősek, mégis a továbbiakban az elektront pontszerűnek fogom tekinteni. Ezt nemcsak azért teszem, mert az említett elmélet esetében az elektron mozgásegyenlete integro-differenciálegyenlet lesz, ami a matematikai tárgyalást igen megnehezíti, hanem azért is, mert úgy hiszem, hogy a pontelektron jobban megfelel az elektronnál és általában az elemi részecskékkel kapcsolatban általánosan elfogadott fogalomalkotásnak. Ha ugyanis az elektront (és az elemi részecskéket) véges kiterjedésűnek tekintjük, úgy elkerülhetetlenül felmerül az elektron belső szerkezetének a problémája. Mihelyt azonban az elektronnak és az elemi részecskéknek a belső szerkezetéről, vagy amint azt pl. a klasszikus LORENTZ-elmélet is teszi, az elektron töltéselemei közt fellépő erőről beszélünk, ellentétbe kerülünk az atomizmussal, mely szerint az elemi részecskék és így az elektron is az anyag végső építőkövei.

Ha a terek kvantumelmélete szempontjából nézzük a problémát, úgy szintén nehéz lenne a tér kvantumait véges kiterjedésűnek tekinteni így kétséges, hogy a véges kiterjedésű elektron elvileg konzekvens kiindulási alapot képezhetne.

Pontelektron esetén viszont első pillanatra elkerülhetetlennek látszanak a divergencia-nehézségek. Azonban nyilvánvalóan csak formális természetűek és nincsen fizikai gyökerük. Erre a körülményre érdekesen mutattak rá H. J. BHABHA és H. C. CORBEN (1941), akik felhívták a figyelmet arra, hogy pl. az elektron saját-energiájának végtelen volta, tisztán a saját-energia definíciójának a következménye. Ha ugyanis a klasszikus elektrodinamika szellemének megfelelően, az elektron saját-energiáját az elektron töltésétől származó elektrosztatikus energiával azonosítjuk és az eredetileg véges kiterjedésű töltést pontra húzzuk össze, úgy természetes, hogy végtelen nagy energia adódik, hiszen végtelen nagy munkát kell kifejteni ahhoz, hogy véges kiterjedésű töltést pontszerűvé zsugorítsunk. Mindaddig tehát, míg a pontelektront a véges kiterjedésű elektron határesetének tekintjük elkerülhetetlen a divergencianehézség. Nincs azonban sem logikai, sem pedig matematikai alapja annak, hogy az elektront, ill. az elemi részecskéket általában ilyen határmenettel értelmezzük.

A saját-energia végességével kapcsolatos formális nehézség szoros kapcsolatban van a hiperbolikus differenciálegyenletek megoldása során fellépő, tisztán matematikai természetű divergencia-nehézséggel. Így a hiperbolikus differenciálegyenletek megoldásával kapcsolatos újabb eredmények, melyek módszert adnak a nehézségek elkerülésére, automatikusan megoldják az elektronelmélet megfelelő divergencia-nehézségeit is.

Ha a pontelektron a töltésen kívül még mágneses dipolmomentummal is rendelkezik és a dipolmomentum is explicit kölcsönhatásban van az elektromágneses térrel, akkor a probléma sokkal inkább bonyolódik. Pedig ennek a problémának a megoldása is fontos és elvi jelentőségű kérdés, hiszen pl. nukleonok és a mezontér kölcsönhatásának a számításánál is hasonló nehézségek lépnek fel. Ez az oka annak, hogy az utóbbi időben többen foglalkoztak ezzel a problémával. Itt elsősorban BHABHA és CORBEN fentidézett dolgozatát kell megemlítenem, valamint hivatkozom C. M. LATTES, M. SCHÖNBERG és W. SCHÜTZER (1947), továbbá G. MARX (1952) vizsgálatára.

Míg MARX számos szerző vizsgálatához csatlakozva fenomenologikus oldalról fogta meg a problémát,[2] addig a többiek elektronelméleti alapon foglalkoztak a kérdéssel. Nevezetesen BHABHA és CORBEN a DIRAC-féle (1938) elektronelmélet alapján és LATTES, SCHÖNBERG és SCHÜTZER a LOPES—

[2] Részletesebb irodalmi utalások MARX idézett dolgozatában találhatók.

SCHÖNBERG-féle (1945) elmélet alapján tárgyalták az elektron mozgási problémáját.

A jelen vizsgálatban, szorosan csatlakozva az eredeti FRENKEL-féle gondolatmenethez, variációs elvből kiindulva vezetem le a mozgásegyenleteket, majd a probléma explicit feldolgozásánál M. RIESZ (1936, 1948) hiperbolikus differenciálegyenletek megoldására kidolgozott módszerét alkalmazom.

Egy további vizsgálat során szándékozom foglalkozni azzal a problémával, hogyan befolyásolja az elektron mágnesesnyomatékának és az elektromágneses térnek a kölcsönhatása az elektron elektromágneses tömegét, valamint a saját-energiáját. Így ezeket a problémákat a továbbiakban nem kívánom érinteni.

Tekintettel arra, hogy a hazai irodalomban a RIESZ-féle potenciálok módszere, mely a modern matematikai fizikának egy igen hatásos és sok helyen alkalmazható módszere, kevésbé ismeretes, a dolgozathoz illesztett függelékben referáltam az elmélet fontosabb eredményeit.

I. A Maxwell—Lorentz-féle egyenletek általánosítása

1. §. A tér metrikájával kapcsolatos megjegyzések. Legyen $P(\mathbf{x})$ a négydimenziós pszeudo-euklidesi térnek egy tetszés szerinti pontja. A térnek a metrikáját a

$$ds^2=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2= \\ =g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

ívelem határozza meg, mely minden

$$dx^\mu=a^\mu_\nu dx'^\nu; \quad a^\mu_\nu a^\nu_\varrho=\delta^\mu_\nu; \quad \det(a^\mu_\nu)=+1$$

ortogonális (LORENTZ-) transzformációval szemben invariáns.

A *metrikus alaptenzor* komponensei tehát

$$g_{00}=1,\ g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1; \quad g_{\mu\nu}=0 \quad \text{ha} \quad \mu\neq\nu.$$

Rögzítsük a $P(\mathbf{x})$ pontot és a $Q(\mathbf{z})$ fussa be a tér összes pontjait. A tér pontjai annak megfelelően, hogy a köztük levő távolság négyzetének milyen az előjele:

$$r^2_{PQ}=\begin{cases} >0 \\ =0 \\ <0 \end{cases}$$

három csoportba sorolhatók. Az $r^2_{PQ}=0$ felületet *fénykúpnak* nevezzük. Az $r^2_{PQ}>0$ pontok összessége alkotja a fénykúp *belsejét*, az $r^2_{PQ}<0$ pontok pedig *kívül esnek* a fénykúpon. $r^2_{PQ}=0$ esetben azok a pontok melyekre $z^0-x^0>0$ az *utókúpot*, melyekre pedig $z^0-x^0<0$ az *előkúpot* alkotják.

Egy tetszés szerinti felület pontjait térszerűnek, fényszerűnek, vagy időszerűnek mondjuk aszerint, amint a felület normálisa a tekintetbe vett pontban időszerű, fényszerű vagy térszerű.

A térnek azt a részét, melyet a $P(\mathfrak{x})$ ponthoz tartozó előkúp és egy térszerű pontokból álló S felület határol D_S^P-sel fogjuk jelölni. Az S felületnek azt a részét, melyet a fénykúp az S felületből kimetsz, S^P-vel jelöljük. A szokásos differenciális operációk a pszeudo-euklidesi térben is értelmezhetők.

Az egyes differenciáloperátorok közti összefüggések, valamint a háromdimenziós térbeli integráltranszformációk közvetlenül általánosíthatók. Így pl. érvényes a GREEN-féle tétel:

$$\int_{D_S^P} \{u \square v - v \square u\} dQ = -\int_{S^P} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} dS,$$

ahol dQ a térfogatelem, dS a felületen és $\frac{\partial}{\partial n}$ az S' felületnek a D_S^P tartomány belsejébe mutató normálisának az irányába vett differenciálhányados. Az u és v függvényekről feltesszük, hogy kétszer folytonosan differenciálhatók.[3]

2. §. A dipóltenzor. Közvetlenül az elektron saját mechanikai impulzusnyomatékának, ill. a hozzátartozó mágneses nyomatéknak a felfedezése után több kísérlet történt arra vonatkozóan, hogy az elektronspint klasszikusan leírják.[4] Ezek a próbálkozások manapság, amikor DIRAC relativisztikus kvantummechanikai elmélete egészen más alapon vezeti be az elektronspint, nagyrészt már csak történeti jelentőséggel bírnak. Mégis számunkra, minthogy mi a spinelektron klasszikus mozgásegyenletével kapcsolatos problémákkal kívánunk foglalkozni, ezek a vizsgálatok igen fontosak.

G. E. UHLENBECK és S. GOUDSMIDT hipotézisének megfelelően, tegyük fel, hogy a nyugvó elektronnak e töltésen kívül $\mathfrak{m}$ saját mágnesesnyomatéka van, mely az elektron saját-impulzusnyomatékával ($\mathfrak{s}$) a következőképpen függ össze:

$$\mathfrak{m} = -\frac{e}{m_0 c}\mathfrak{s},$$

ahol m_0 az elektron nyugalmi tömege és c a fénysebesség. Mikor ezt feltesszük, ugyanakkor hangsúlyoznunk kell, hogy a nyugvó elektronnak nincsen elektromos dipol-, kvadrupol- stb. és mágneses kvadrupol- stb. nyomatéka. Szemléletesen szólva ez annyit jelent, hogy az elektron által keltett tér olyan mintha azt egy, a középpontján átmenő tengely körül, egyenletesen forgó, homogénül elektromosan feltöltött gömb keltené.[5]

[3] L. M. RIESZ (1948).
[4] L. H. A. KRAMERS (1938).
[5] E szemléletes értelmezés közismert kritikájával nem kívánok foglalkozni.

Ha az elektront pontszerűnek tekintjük, akkor a $\mathfrak{H}$ térerősségű homogén mágneses térben a ráható forgató nyomaték $(\mathfrak{m} \times \mathfrak{H})$; tehát az elektron mágneses nyomatékának az időegységre eső változása:

$$\dot{\mathfrak{m}} = (\mathfrak{m} \times \mathfrak{H}).$$

Ebből az összefüggésből azonnal következik, minthogy

$$(\dot{\mathfrak{m}}, \mathfrak{m}) = 0,$$

hogy

$$\mathfrak{m}^2 = \text{konst}.$$

Mozogjon már most az elektron $\mathfrak{v}$ sebességgel egy $\mathfrak{E}$ elektromos térerősségű térben, akkor az elektronnal együttmozgó koordinátarendszerben észlelhető mágneses térerősség

$$\mathfrak{H}' = \frac{\mathfrak{H} + \frac{1}{c}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{v})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

következésképpen

$$\dot{\mathfrak{m}} = \left\{ \mathfrak{m} \times \left[\mathfrak{H} + \frac{1}{c}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{v}) \right] \right\},$$

ha a $\frac{v^2}{c^2}$ nagyságrendű tagokat elhanyagoljuk.

Az így kapott összefüggés azonban csak akkor volna helyes, ha az $\mathfrak{m}$ vektor LORENTZ-transzformációval szemben invariáns lenne. Minthogy azonban $\mathfrak{m}$ csak egy három-dimenziós térbeli vektor, ez nem teljesülhet. Ki kell tehát egészíteni az $\mathfrak{m}$-t egy négyes-vektorrá, vagy egy másodrendű tenzorrá. Ezt a feladatot FRENKELnek sikerült megoldania, aki heurisztikusan feltételezte, hogy bevezethető egy további térbeli vektor $\mathfrak{p}$, mely kielégíti a következő relációkat.

a) Abban a koordinátarendszerben, ahol az elektron nyugszik a $\mathfrak{p}$ eltűnik.

b) Az $\mathfrak{m}$ és a $\mathfrak{p}$ vektorok LORENTZ-transzformáció esetén úgy transzformálódnak, mint a $\mathfrak{H}$ és az $\mathfrak{E}$ vektorok, tehát egy négy-dimenziós antiszimmetrikus tenzor térbeli, ill. időbeli komponensei:

$$\Sigma_{\mu\nu} \rightarrow \downarrow \quad \begin{matrix} 0 & -p_x & -p_y & -p_z \\ p_x & 0 & m_z & -m_y \\ p_y & -m_z & 0 & m_x \\ p_z & m_y & -m_x & 0 \end{matrix} .$$

Ezeknek a feltételeknek elegettevő $\mathfrak{p}$ vektor valóban bevezethető és az $\mathfrak{m}$ mágneses nyomatékkal a következő összefüggésben van:

$$\mathfrak{p}=\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{m}\right).$$

PAULI egy megjegyzésének a felhasználásával FRENKEL ezt a következőképpen bizonyította be. Legyen $\mathbf{z}=\mathbf{z}(\tau)$ az elektron világvonalának tetszés szerinti pontja (τ az elektron sajátideje, mely nem más mint a világvonal ívhosszúság-paramétere), akkor az elektron sebességét leíró $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{z}}{d\tau}$ sebességvektor és a $\Sigma_{\mu\nu}=\Sigma_{\mu\nu}(\tau)$ dipóltenzor segítségével képezzük a $v_\mu \Sigma^{\mu}_{\cdot\nu}$ négyesvektort. Az elektronnal együttmozgó koordinátarendszerben ennek a négyesvektornak el kell tűnnie, minthogy ebben a $\bar{K}$ koordinátarendszerben feltételünknek megfelelően $\bar{v}_1=\bar{v}_2=\bar{v}_3=0$ és $\bar{\Sigma}_{01}=\bar{\Sigma}_{02}=\bar{\Sigma}_{03}=0$. Ebből azonban, a négyesvektorok transzformációs törvénye következtében, általánosan is következik, hogy

$$v_\mu \Sigma^{\mu}_{\cdot\nu}=0 \tag{2, 1}$$

Ezt a feltételt szokás FRENKEL-féle feltételnek nevezni.

Helyettesítsük be a FRENKEL-féle feltételbe a megfelelő háromdimenziós kifejezéseket, akkor kapjuk:

$$v_\mu \Sigma^{\mu}_{\cdot 0}=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\mathfrak{v},\mathfrak{p})=0$$

és a megfelelő térbeli komponensek esetében:

$$\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{m}\right)-\mathfrak{p}\right\}=0,$$

amivel a fenti összefüggést igazoltuk.

Eredményünk fizikailag annyit jelent, hogy egy olyan koordinátarendszerben, melyben az elektron $\mathfrak{v}$ sebességgel mozog, az elektronnak a sajátmágnesesdipólnyomatéka következtében elektromos dipólmomentuma is van, melynek az iránya merőleges a sebesség és a mágnesesnyomaték irányára.

Az eredményeink közvetlenül általánosíthatók arra az esetre is, mikor a mozgó részecskéknek saját-elektromosdipólnyomatéka is van.[6] Minthogy azonban a természetben ilyen tulajdonságokkal rendelkező részecskék nem ismeretesek, ezzel az általánosítással nem foglalkozunk.

A bevezetett $\Sigma_{\mu\nu}$ dipóltenzorból két invariáns képezhető:

$$I_1=\frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}=m^2-p^2 \tag{2, 2}$$

[6] Az említett általánosítások megtalálhatók BHABHA és CORBEN, valamint LATTES, SCHÖNBERG és SCHÜTZER munkáiban.

és

$$I_2 = \Sigma_{23}\Sigma_{10} + \Sigma_{31}\Sigma_{20} + \Sigma_{12}\Sigma_{30} = (\mathfrak{m}, \mathfrak{p}).$$

I_2 a FRENKEL-féle feltétel következtében elektron esetében azonosan eltűnik. Az I_1 invarianciájából pedig következik, hogy

$$m^2 - p^2 = \overline{\mathfrak{m}}^2.$$

Ez az összefüggés azonban a következő alakba írható:

$$|\mathfrak{m}| = \frac{|\overline{\mathfrak{m}}|}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}},$$

ahol $v_\perp$ a $\mathfrak{v}$ vektornak az $\mathfrak{m}$-re merőleges komponensét jelenti. Ily módon (2,2)-ből közvetlenül megkaphatjuk az $|\mathfrak{m}|$ transzformációs formuláját.

A továbbiakban az egy-elektronproblémával fogunk foglalkozni. Többelektronproblémát igyekeztek, legalább is formálisan, LATTES, SCHÖNBERGER és SCHÜTZER (1947) figyelembe venni. A problémának azonban ez a formális általánosítása tekintettel arra, hogy pl. a többszörös-sajátidőt[7] nem sikerült bevezetni, nem jelent elvi általánosítást és csupán a formulák írásmódját bonyolítja.

Egy-elektron probléma esetén a Σ dipól eloszlási sűrűség az elektron világvonalára lokalizálódik. $\Sigma_{\mu\nu}$ analitikus előállítása éppen úgy történik az elektronelméletben, mint az áramsűrűség négyes-vektorának az előállítása:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = e\int_{-\infty}^{\tau_0} \mathbf{v}(\tau)\cdot\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau))\,d\tau,$$

következésképpen:

$$\Sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = g\int_{-\infty}^{\tau_0} S_{\mu\nu}(\tau)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau))\,d\tau,$$

ahol g a *dipól-töltés* és $S_{\mu\nu}(\tau)$ az elektron világvonala mentén értelmezett antiszimmetrikus tenzor, melynek ki kell elégítenie a (2, 1) alatti FRENKEL-féle feltételt, továbbá per difiniciórum

(2, 3) $$S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = \text{konst} = 1.$$

Továbbá $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau))$ a DIRAC-féle δ.

A (2, 3) alatti reláció voltaképpen az elektron négyes-sebessége esetén fennálló, közismert relációnak:

(2, 4) $$v^2 = v_\mu v^\mu = 1$$

a megfelelője és számolástechnikai könnyítést fog okozni a továbbiakban.

Eddig az elektron

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(\tau)$$

világvonalával kapcsolatban közelebbi megszorítást nem tettünk. Tudjuk azon-

[7] „Multiple-time formalism" L. pl. G. WENTZEL (1949).

ban már a klasszikus elektronelméletből, hogy a *világvonal* szükségszerint *„időszerű“ görbe,* ami azt jelenti, hogy érintője mindenütt időszerű. Ennek természetesen így is kell lennie, hiszen az elektron sebessége sem lehet nagyobb a fénysebességnél.

N. E. FREMBERG (1946) után, a világvonalról feltételezzük, hogy $\tau=-\infty$ esetben időszerű asszimptotája van, ami a valóságban azt a feltevést jelenti, hogy az elektron kezdetben egyenesvonalú egyenletes mozgást végzett. Analítikusan ezt a feltevést a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$\mathbf{z}(\tau)=\mathbf{v}_{-\infty}\tau+\sum_{k=0}^{\infty}c_k\tau^k,$$

ahol

$$\mathbf{v}_{-\infty}=\lim_{\tau=-\infty}\mathbf{v}(\tau)=\lim_{\tau=-\infty}\frac{d\mathbf{z}}{d\tau}.$$

Az elektron sebességével kapcsolatban feltesszük még, hogy

$$\frac{dz^0}{dt}>0, \tag{2, 6}$$

amivel biztosítjuk azt, hogy a görbe mentén, bármilyen t paramétert is vezetünk be, a t paraméter változásával, a görbe befutása egyirányú lesz.

Említettük az $S_{\mu\nu}$ definiálásánál, hogy $S_{\mu\nu}$-nek ki kell elégítenie a (2, 1) alatti FRENKEL-féle feltételt. A továbbiakban ennek a feltételnek a figyelembe vétele felesleges komplikációkat okozna, célszerű ezért, amint azt pl. MARX is teszi,[8] bevezetni az

$$M_{\mu\nu}=S_{\mu\nu}+v^\varrho S_{[\mu|\varrho|}v_{\nu]} \tag{2, 7}$$

tenzort,[9] mely amint az közvetlenül belátható, azonosan kielégíti az

$$M_{\mu\nu}v^\nu=0$$

FRENKEL-féle relációt.

3. §. A probléma LAGRANGE-*függvénye.* A téregyenleteket és a mozgásegyenleteket

$$\delta\int L\,dQ=0 \tag{3, 1}$$

[8] G. MARX (1952).

[9] Az írásmód egyszerűsítése céljából a SCHOUTEN-féle szimbolikához hasonlóan a továbbiakban alkalmazni fogom a következő rövidítést:

$$A_{[\mu}B_{\nu]}\equiv A_\mu B_\nu-A_\nu B_\mu.$$

Azokat az indexeket (ha vannak), melyek ebben a kommutációban nem vesznek részt, függőleges vonás közé helyezem

$$A_{[\mu|\varrho\sigma\ldots|}{}^{|k\tau\ldots|}B_{|\varepsilon\ldots|}{}^{|\delta\ldots|}{}_{\nu]}\equiv A_{\mu\varrho\sigma\ldots}{}^{k\tau\ldots}B_{\varepsilon\ldots}{}^{\delta\ldots}{}_{\nu}-A_{\nu\varrho\sigma\ldots}{}^{k\tau\ldots}B_{\varepsilon\ldots}{}^{\delta\ldots}{}_{\mu}.$$

Tehát pl. (2, 7) a következő kifejezés rövidítésére szolgál

$$M_{\mu\nu}=S_{\mu\nu}+v^\varrho S_{\mu\varrho}v_\nu-v^\varrho S_{\nu\varrho}v_\mu.$$

Részletesebben L: J. A. SCHOUTEN (1924). A nála szereplő $\frac{1}{2}$ faktorokat elhagytam.

típusú variációselvből kívánjuk levezetni, ahol L a probléma LAGRANGE-féle függvénye.

Mindenekelőtt gondoljuk meg a következőket. A mozzgó elektronnak a töltése is és a mágnesesmomentuma is külön-külön gerjeszt elektromágneses teret és explicit kölcsönhatásba lép a külső elektromágneses térrel.

Legyen a külső elektromágneses tér tértenzora $H_{\mu\nu}$ és vektorpotenciáljának komponensei Φ_μ. Akkor

$$H_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} \Phi_{\nu]}.$$

A továbbiakban ezt a külső elektromágneses teret adottnak és állandónak tekintjük.

Az elektronnak a töltése, ill. a mágnesesnyomatéka által gerjesztett sajátterének a tértenzora legyen $F_{(1)\mu\nu}$ ill. $F_{(2)\mu\nu}$ a megfelelő vektorpotenciálok pedig $A_{(1)\mu}$ ill. $A_{(2)\mu}$. Tehát az elektron sajátterének a megfelelő mennyiségei

(3, 2) $$F_{\mu\nu} = F_{(1)\mu\nu} + F_{(2)\mu\nu},$$

ill.

(3, 3) $$A_\mu = A_{(1)\mu} + A_{(2)\mu}.$$

Ezen előállítás következtében az elektron töltése explicit kölcsönhatásba lép nemcsak a külső elektromágneses térrel, hanem a mágneses momentum által keltett térrel is. Hasonló a helyzet a mágneses momentum esetében is, melynek az elektron töltése által keltett térrel való kölcsönhatását is figyelembe kell vennünk. Ha már most arra gondolunk, hogy ezen felül az elektron töltése, ill. mágneses momentuma által gerjesztett térnek magára a gerjesztő elektrontöltésre, ill. mágneses momentumra való visszahatását is számításba kell vennünk, akkor azonnal láthatjuk, hogy a mágneses dipólmomentum figyelembe vétele milyen komplikációt okoz. Hogy ezek a kölcsönhatások valóban fellépnek a valóságban az nem kétséges és a *priori* nehéz lenne megmondani e kölcsönhatások nagyságrendjét. Az eddigi irodalomban mindezeket a kölcsönhatásokat szisztematikusan nem vették figyelembe, ami kétségtelenül azt mutatja, hogy a problémát a korábbi vizsgálatok tükrében nem tekinthetjük lezártnak. Amint látni fogjuk a továbbiakban a probléma explicit feldolgozásánál, számos számolás technikai nehézséggel találkozunk és nem hiszem, hogy a kérdés a RIESZ-potenciálok alkalmazása nélkül a gyakorlatban, könnyen végigszámolható lenne.

Ebben a részben az elektron által gerjesztett teret egységesen kezeljük és csak a III. részben vesszük figyelembe a (3, 2) és a (3, 3) alatti felbontást. Anélkül, hogy a továbbiakban erre külön utalnék, könnyen beláthatjuk, hogy ez meggondolásaink során speciális nehézséget nem okoz.

A rendszer tehát, melynek a LAGRANGE-féle függvényét meg akarjuk határozni, a mozgó elektronból és az $(F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})$ tértenzorú elektromágneses térből áll.

A téregyenletek és a mozgásegyenletek levezetésénél H. WEYL (1918) módszerét követjük.[10] Ennek megfelelően *egyenlőre* eltekintünk attól, hogy az elektron nyugalmi tömege m_0, töltése e és mágneses dipolnyomatékának a töltéssűrűsége g csak az elektron világvonalára lokalizálódik és feltesszük, hogy μ_0, ε_0 ill. γ_0 állandó töltéssűrűséggel eloszlik a három-dimenziós térben. Ennek a feltételnek a jelentőségét, mely elvi nehézségekbe nem ütközik, mert csak egy *ad hoc* segédfeltevés, a mozgásegyenletek levezetésénél fogjuk látni.

Ezek előrebocsátása után a problémánk LAGRANGE-függvénye a következő alakba írható:

$$
\begin{aligned}
L = \mu_0 + T_{\text{kölcs}} + \frac{1}{16\pi}(F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu}) - \\
- \varepsilon_0(A_\mu + \Phi_\mu)v^\mu - \frac{1}{2}\gamma_0(F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})M^{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{3,4}
$$

Ebben a kifejezésben az első tag az elektron mechanikai nyugalmi energiáját adja.[11] A $T_{\text{kölcs}}$ tagot FRENKEL vezette be,[12] anélkül, hogy explicite megadta volna; csupán a variációját *definiálta*, melyet mi a mozgásegyenletek levezetésénél klasszikus analógiák alapján megalapozunk. A harmadik tag a tér teljes energiája, melyet FRENKEL, minthogy ő a részecske által keltett saját-terének a részecske mozgására való visszahatását nem vette figyelembe, elhagyott[12] és csak LATTES, SCHÖNBERG és SCHÜTZER munkájában található fel újra.[13] Ők azonban nem voltak tekintettel arra, hogy a tér egy részét a mozgó részecske gerjeszti, ami a végleges mozgásegyenleteknél jelentkezik.

Az utolsó két tag az elektronnak a töltése, ill. mágneses momentuma következtében fellépő potenciális energiája.

A FRENKEL-féle eredeti LAGRANGE-függvényben[12] a harmadik tagon kívül nem szerepel az μ_0-nak megfelelő tag és ő $M_{\mu\nu}$ helyett $S_{\mu\nu}$-t használ.[14] Ilyen körülmények között azonban neki külön figyelembe kell venni a (2, 4) és (2, 1) alatti feltételeket. Ezt ő meg is teszi és később LAGRANGE-féle multiplikátorokkal szorozva a feltételeket hozzáadja a szokásos módon a variált LAGRANGE-függvényhez. A LAGRANGE-féle multiplikátorok meghatározásánál azután kiderül, hogy az egyik éppen az elektron nyugalmi tömege, a másik pedig olyan tagot eredményez a mozgásegyenletekben, mely éppen $M_{\mu\nu}$ használata miatt nálunk is fel fog lépni. Ez a körülmény a mélyebb oka annak,

[10] L. pl. H. THIRRING (1924). Ennek a feltevésnek a szemléletes tartalmát a mozgásegyenletek levezetésénél még diszkutálni fogjuk.

[11] Ne feledkezzünk meg arról, hogy nálunk a fénysebesség egységnyi, tehát ez a tag $\mu_0 c^2$-nek felel meg.

[12] L. J. I. FRENKEL (1926).

[13] L. C. M. LATTES, M. SCHÖNBERG és W. SCHÜTZER (1947).

[14] A mi jelölésünknek megfelelően.

hogy az elektron tömegének, töltéssűrűségének és dipoltöltéssűrűségének a korábbi „elkenése" nem okoz elvi nehézséget.

Amint említettük a téregyenleteket és a mozgásegyenleteket a (3, 1) alatti variációs egyenletekből vezetjük le. Most röviden foglalkozunk még azzal a problémával, hogyan kell a variációt lebonyolítanunk.[15]

Kétféleképpen variálhatunk ugyanis. Vagy az elektromágneses potenciálokat tekintjük függetlenül variálható függvényeknek és az elektron világvonalát rögzítve képzeljük, vagy pedig a világvonalat variáljuk és a potenciálokat tekintjük adottaknak. Az első esetben az elektromágneses tér téregyenletét az utóbbi esetben pedig a mozgási egyenleteket kapjuk meg.

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy az elektron által gerjesztett $F_{\mu\nu}$ tér variációja csak a mozgásegyenleteknél játszik szerepet, hiszen $F_{\mu\nu}$ implicite csak az elektron világvonalának a függvénye, viszont a $H_{\mu\nu}$ variációja pedig a téregyenletek levezetésénél veendő tekintetbe és eltűnik a mozgásegyenletek levezetésénél.

Ezek előrebocsátása után először a téregyenleteket vezetjük le, majd a II. részben a mozgásegyenletek meghatározásával foglalkozunk.

4. §. Az elektromágneses tér alapegyenleteinek a levezetése variációs elvből. Írjuk a (3, 1) alatti variációsprobléma hatásintegrálját a következő alakban.

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 =$$

$$(4, 1) \qquad -\int \Big\{ \mu_0 + T_{\text{kölcs}} + \frac{1}{16\pi}(F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu}) -$$

$$-(A_\mu + \Phi_\mu)s^\mu - \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})\Sigma^{\mu\nu} \Big\} dQ.$$

Amint az imént említettük a téregyenletek levezetésénél a külsőtér potenciálját, tehát a Φ_μ függvényt, variáljuk. Így

$$\delta W = \int \Big\{ \frac{1}{8\pi}(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu})\delta H_{\mu\nu} - s^\mu \delta \Phi_\mu - \frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu}\delta H_{\mu\nu} \Big\} dQ.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\frac{1}{2}\int (F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu})\delta H_{\mu\nu} dQ = \int (F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu}) \nabla_\mu \delta \Phi_\nu dQ =$$

$$= -\int (F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu}) \nabla_\nu \delta \Phi_\mu dQ,$$

ha, amint az szokásos, feltesszük, hogy $\delta \Phi_\mu$ az integrációs tartomány hatá-

[15] Ezzel kapcsolatban utalok egy korábbi vizsgálatomra, ahol W. PAULI (1921) vizsgálataikoz kapcsolódva általánosabb szempontból tárgyalom a problémát (J. I. HORVÁTH und A. MOÓR (1952)).

rán eltűnik, úgy (3, 1) alapján kapjuk, hogy

$$\delta W = \int \left\{ \frac{1}{4\pi} \nabla_\nu (F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu}) - s^\mu \right\} \delta \Phi_\mu dQ = 0.$$

Minthogy ennek az egyenletnek tetszés szerinti $\delta \Phi_\mu$ variáció esetén teljesülnie kell, kapjuk a téregyenleteket

$$\frac{1}{4\pi} \nabla_\nu (F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu}) - s^\mu = 0,$$

melyet a következő alakba írhatunk át:

$$\nabla_\nu (F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu}) = 4\pi s^\mu + 4\pi \nabla_\nu \Sigma^{\mu\nu}. \tag{4, 2}$$

Feltételezhetjük a továbbiakban, hogy $H_{\mu\nu}$, tehát a külső tér tértenzora eleget tesz a vákuum téregyenletének:

$$\nabla_\nu H^{\mu\nu} = 0, \tag{4, 3}$$

akkor tehát kapjuk a sajáttér téregyenletét

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi (s^\mu + \nabla_\nu \Sigma^{\mu\nu}), \tag{4, 4}$$

mely a továbbiakban kiindulási egyenletünk lesz.

Jegyezzük most meg, hogy a (4, 3) egyenlet nem jelenti a probléma lényeges specializálását, mert, ha $H_{\mu\nu}$ nem a vákuum tértenzora lenne, hanem valamilyen σ^μ négyesáramból lenne levezethető, akkor a viszonyok csak annyiban változnának, hogy a variációsproblémánkban az s^μ négyesáram helyett az $(s^\mu + \sigma^\mu)$ négyesáram szerepelne. Könnyen belátható azonban, hogy ebben az esetben a sajáttér téregyenlete szintén a (4, 4) alatti egyenlet lenne. Viszont a mozgásegyenletek levezetésénél σ^μ úgyis kiesnék, minthogy független az elektron világvonalától.

A (4, 4) egyenlet alapján azt mondhatjuk, hogy a sajátteret az $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ négyes-áramsűrűség és a $\Sigma(\mathbf{x}) = \{\Sigma^\mu\} = \{\nabla_\nu \Sigma^{\mu\nu}\}$ dipóláramsűrűség gerjeszti. Gondoljunk már most az $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ és a $\Sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ függvényeknek a 2 §-ban megadott definíciójára, akkor azonnal látjuk a definícióban szereplő τ_0 retardált időnek a mélyebb értelmét. Nevezetesen nyilvánvaló, hogy a $P(\mathbf{x})$ pontbeli gerjesztés az elektron világvonalán levő töltés és dipolsűrűségnek csak attól a részétől függ, mely a $P(\mathbf{x})$ tartójú előkúpba esik. Hiszen a világvonalnak csak erről a szakaszáról jövő hatások juthatnak el a $P(\mathbf{x})$ pontba.

Végül azonnal itt rámutatok arra a nehézségre, mely a további explicit számításoknál nehézséget fog okozni. A dipoláramsűrűség definíciójánál a $P(\mathbf{x})$ pont koordinátái szerinti parciális differenciálás szerepel. Ha azonban a parciális differenciálhányados definíciójára gondolunk, azonnal láthatjuk, hogy a koordináták infenitezimális megnövelésénél megváltozik a (2, 5) alatti definíciósegyenlet következtében a τ_0 retardált idő is. Így minden olyan függvény esetében, mely a helykoordinátáknak és a retardált időnek a függvénye (mint amilyen pl. maga az $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ és a $\Sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ függvény is), a parciális differenciálhányados kiszámításánál figyelembe kell venni a retardált időnek az $\mathbf{x}$-től való függését is.

Ha A_μ az elektron sajátterének négyespotenciálja, akkor az $F_{\mu\nu}$ tértenzor a következőképpen állítható elő:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} A_{\nu]}. \tag{4, 5}$$

Feltéve már most a szokott módon, hogy az A_μ négyes potenciál kielégíti a LORENTZ-féle feltételt:

$$\nabla^\mu A_\mu = 0,$$

akkor a (4, 4) alatti béregyenletek a következő alakba írhatók:

$$\Box \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{s} - 4\pi \mathbf{\Sigma};$$

vagy komponensekre kiírva:

$$\Box A^\mu = -4\pi s^\mu - 4\pi \nabla_\nu \Sigma^{\mu\nu}. \tag{4, 6}$$

Ez a négyes-potenciálok alapegyenlete. Látjuk tehát, hogy a négyes-potenciálok az inhomogén hullámegyenlet megoldásai.

II. A mozgásegyenletek levezetése

5. §. *Általános megjegyzések a mozgásegyenletekkel kapcsolatban.* A mágneses momentummal rendelkező elektron mozgásegyenletének a levezetésénél BHABHA és CORBEN[16], csatlakozva DIRAC[17] megállapításaihoz, néhány fizikai szempontból igen mély és tanulságos megjegyzést tesznek. Mi a továbbiakban a (3, 1) alatti variációselvből kiindulva vezetjük le a mozgási egyenleteket, mégis hasznos lesz, ha foglalkozunk az említett meggondolásokkal.

Tekintsük egy pillanatra adottnak az elektron világvonalát és vegyük azt körül egy infenitezimális sugarú hengerrel. A világvonal két végpontjában zárjuk le a hengert egy-egy, a világvonalra merőleges, hipersíkkal. Tekintsük már most az elektron által keltett tér feszültség-energia-tenzorának a fluxusát ezen a zárt felületen át. Határátmenettel megmutatható, hogy ez a fluxus a henger palástján eltűnik, ha a henger sugara zéróhoz konvergál, következésképpen a fluxus csak a henger két véglapján történő fluxusból áll; vagyis a fluxus a feszültség-energia-tenzornak a világvonal két „két végpontjában" felvett értéktől függ[18]. Matematikailag ez annyit jelent, hogy az integrandusznak teljes differenciálhányadosnak kell lennie, ami természetesen tetszés szerinti sebesség és mágnesesnyomaték esetén általában nem teljesül. Éppen ennek a tisztán matematikai természetű feltételnek a segítségével választhatjuk ki a lehetséges mozgási állapotok közül azt a mozgási állapotot, mely a valóságos mozgás folyamán megvalósul. Az így meghatározott fluxus végered-

16 L. H. J. BHABHA and H. C. CORBEN (1941).

17 L. P. A. M. DIRAC (1938).

18 Az egyszerűbb beszédmód kedvéért „végpontoknak" nevezem a világvonalnak és infinitezimális hengerünk két véglapjának metszéspontját.

ményben az elektron energiájának és teljes impulzusának[19] a megváltozását adja. Tehát az energia- és impulzusmegmaradási tétel, ill. a III. NEWTON-féle axióma alapján, ez a fluxus az elektronra ható sajáterőt adja.

A továbbiakban majd látni fogjuk, hogy mindazok a kifejezések, melyek az említett fluxus kiszámításához szükségesek explicite rendelkezésünkre fognak állni. Mégis mi nem ezt az utat választjuk a sajáterő kiszámításánál. Részint azért, mert a számítás ezen az úton, bár egyszerű, de rendkívül hosszadalmas[16], részben pedig azért, mert ez a módszer, további segédfeltevések nélkül nem egyértelmű eredményre vezet. Annak a függvénynek a megszerkesztése ugyanis, melynek az integrandusz teljes differenciálja, sokféleképpen elvégezhető.[17]

Sokkal természetesebbnek látszik az a kívánság, hogy a mozgási egyenleteket, amint azt mi is célul tűztük ki, variációselvből vezessük le. A problémával ebben a megfogalmazásban először FRENKEL (1926) foglalkozott. Említettem már, hogy ő nem vette figyelembe az elektronra ható sajáterőt. LATTES, SCHÖNBERG és SCHÜTZER kiegészítve az eredeti módszert, a TETRODE—FOKKER-féle variációselv megfelelő általánosításával[20] vezették le a mozgásegyenleteket. Ők azonban részben nem vették figyelembe a sajáttérnek az elektron világvonalától való függését, részben pedig a LOPES—SCHÖNBERG-féle elméletre alapozták meggondolásaikat, így szükségessé válik a mozgásegyenletek új levezetése.

6. §. A mozgásegyenletek levezetése variációselvből. A mozgásegyenletek levezetését a 3. §-ban már előkészítettük. Amint arra már ott utaltunk, az elektron tömegét, töltését és dipóltöltését a háromdimenziós térben konstans sűrűséggel elkenve képzeljük. Már most a háromdimenziós teret egy tetszés szerint megválasztott időpillanatban osszuk fel infinitezimális elemi tartományokra. Egy-egy ilyen tartományra eső tömeg, töltés, ill. dipóltöltés legyen dm, de ill. dg. Az idő változásával ezeknek a tartományoknak a négydimenziós térben egy-egy infinitezimális cső fog megfelelni, mely a tekintetbe vett tömeggel, töltéssel és dipóltöltéssel rendelkező szubsztancia infinitezimális darabjának a világvonalát veszi körül.

Ha már most μ_0 a tekintetbe vett tömeg, ε_0 a töltés és γ_0 pedig a dipoltöltés sűrűség, akkor írhatjuk, hogy

$$\mu_0 dQ = \mu_0 dq\, d\tau = dm\, d\tau,$$
$$\varepsilon_0 dQ = \varepsilon_0 dq\, d\tau = de\, d\tau,$$
$$\gamma_0 dQ = \gamma_0 dq\, d\tau = dg\, d\tau.$$

Az elmondott szemléletes meggondolás matematikai tartalma a következő: Az eredeti világvonal helyett tekintsük a világvonalaknak a négydimen-

[19] A teljes impulzus most is a transzlációs mozgás impulzusából és a mágneses momentumnak kapcsolatban álló sajátimpulzusból tevődik össze.

[20] L. H. TETRODE (1922) és A. D. FOKKER (1929).

ziós teret egyszeresen befedő seregét és a variációt ezen görbesereg szimultán variálásával hajtsuk végre.

Ezen meggondolások alapján a (4, 1) alatti hatásfüggvény a következő alakba írható.

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 =$$

$$= \int dm \int d\tau + \int T_{\text{kölcs}} dQ + \frac{1}{16\pi}\int (F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu})\, dQ -$$

$$- \int de \int (A_\mu + \Phi_\mu)\, v^\mu\, d\tau - \frac{1}{2}\int dg \int (F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})\, M^{\mu\nu}\, d\tau.$$

Az integrációs tartományok határát külön nem jelöltem meg, minthogy az okoskodásunkban nem játszik szerepet. Mindössze a szokott módon annyit tételezünk fel, hogy a világvonal variációja, $\delta \mathbf{z}$, a végpontokon eltűnik.

A variáció végrehajtásánál legyünk tekintettel arra, hogy feltételünk értelmében a három-dimenzióstérben a tömeg, töltés és dipóltöltéseloszlás állandó. Ennek következtében, akárhogyan variáljuk is a világvonalat, vagy szemléletesen: akárhogyan deformáljuk is az infinitezimális csőrendszerünket, a három-dimenziós tartományokra kiterjesztett

$$m_0 = \int dm, \quad e = \int de, \quad \text{és} \quad g = \int dg \tag{6, 1}$$

integrálok variációja eltűnik. Így tulajdonképpen csak a világvonal mentén vett sajátidőszerinti integrálok variációját kell kiszámítanunk.

Ezek előrebocsátása után W egyes tagjainak a variációját a következőképpen számíthatjuk ki:

a)

$$\delta W_1 = \int dm\, \delta \int d\tau.$$

Ismeretes azonban, hogy

$$\int d\tau = \int w\, dt$$

ahol

$$w = \sqrt{\left(\frac{dz^0}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz^1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz^2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz^3}{dt}\right)^2}$$

és t egy tetszés szerinti paraméter a világvonal mentén. Tegyük fel, hogy t a valóságos mozgásnak megfelelő világvonal mentén éppen az ív ívhosszúságparaméter. Akkor

$$\delta \int d\tau = \int \frac{1}{w} \left\{ \frac{dz^0}{dt}\,\delta \frac{dz^0}{dt} - \frac{dz^1}{dt}\,\delta \frac{dz^1}{dt} - \frac{dz^2}{dt}\,\delta \frac{dz^2}{dt} - \frac{dz^3}{dt}\,\delta \frac{dz^3}{dt} \right\} dt =$$

$$= \int \frac{1}{w}\, g_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{dt}\, \delta \frac{dz^\nu}{dt}\, dt.$$

Tekintettel arra, hogy a valóságos (tehát nem variált) görbe mentén

$$dt = d\tau; \quad w = 1; \frac{dz^\mu}{dt} = \frac{dz^\mu}{d\tau} = v^\mu,$$

parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{w} g_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\tau} \delta \frac{dz^\nu}{d\tau} d\tau = \int \frac{dv_\lambda}{d\tau} \delta z^\lambda d\tau;$$

következésképpen:

$$\delta W_1 = \int dm\, \delta \int d\tau = \int \mu_0 \frac{dv_\lambda}{d\tau} \delta z^\lambda dQ.$$

Ebből a formulából közvetlenül láthatjuk, hogy (2, 4) alatti egyenletet mellékfeltételül és a μ_0-t LAGRANGE-féle multiplikátorul használva pontosan ugyanehhez az eredményhez jutottunk volna.

b)

$$W_3 = \frac{1}{16\pi} \int \{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2F_{\mu\nu} H^{\mu\nu} + H_{\mu\nu} H^{\mu\nu}\} dQ.$$

A $H_{\mu\nu}$ külső elektromágneses tér energiája független a világvonal variációjától, következésképpen

$$\delta \int H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} dQ = 0.$$

Különben kapjuk, hogy

$$\delta W_3 = \frac{1}{8\pi} \int \{(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu}) \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \nabla_\lambda H^{\mu\nu}\} \delta z^\lambda dQ.$$

Ez a tag az előző szerzőknél nem szerepel, ami azt jelenti, hogy ők a tér teljes energiájának a változását a világvonal variálásakor nem vették figyelembe.

c)

$$\delta W_4 = -\int de\, \delta \int (A_\mu + \Phi_\mu) \dot{z}^\mu d\tau.$$

Közvetlen számítással kapjuk, hogy

$$\delta \int (A_\mu + \Phi_\mu) \dot{z}^\mu d\tau = \int \{(\delta A_\mu + \delta \Phi_\mu) \dot{z}^\mu + (A_\mu + \Phi_\mu) \delta \dot{z}^\mu d\tau =$$

$$= \int \Big\{ (\nabla_\lambda A_\mu + \nabla_\lambda \Phi_\mu) \dot{z}^\mu \delta z^\lambda +$$

$$+ \frac{d}{d\tau} [(A_\mu + \Phi_\mu) \delta z^\mu] - (\nabla_\lambda A_\mu + \nabla_\lambda \Phi_\mu) \dot{z}^\lambda \delta z^\mu \Big\} d\tau.$$

Következésképpen (a harmadik tagban a λ és μ összegezési indexek felcserélése után);

$$\delta W_4 = -\int \varepsilon_0 \Big\{ (F_{\lambda\mu} + H_{\lambda\mu}) \dot{z}^\mu \delta z^\lambda + \frac{d}{d\tau} [(A_\mu + \Phi_\mu) \delta z^\mu] \Big\} dQ.$$

Közben felhasználtuk a tértenzorok és a négyes-potenciálok közti összefüggést.

d)

$$\delta W_5 = -\frac{1}{2}\int dg\,\delta\int (F_{\mu\nu}+H_{\mu\nu})\,M^{\mu\nu}\,d\tau.$$

Ennek a kiszámításánál a $\delta M^{\mu\nu}$, pontosabban a $\delta S^{\mu\nu}$, kiszámítása jelent problémát, amit FRENKEL nem-relativisztikus meggondolások kézenfekvő általánosításával a következőképpen végzett el:

A mágneses momentum $\delta\mathfrak{o}$ infinitezimális elforgatása esetén az $(\mathfrak{m}\times\mathfrak{H})$ forgatónyomaték munkája, az energia-megmaradási elv következtében megegyezik az $\mathfrak{m}$ mágnesesmomentum $-(\mathfrak{m}\mathfrak{H})$ potenciális energiájának a $-\delta(-\mathfrak{m}\mathfrak{H}) = (\delta\mathfrak{m}\mathfrak{H})$ csökkenésével. Következésképpen

$$(\delta\mathfrak{m},\mathfrak{H}) = (\delta\mathfrak{o},(\mathfrak{m}\times\mathfrak{H})) = ((\delta\mathfrak{o}\times\mathfrak{m}),\mathfrak{H}),$$

ahol

$$\delta\mathfrak{m} = (\delta\mathfrak{o}\times\mathfrak{m}).$$

A megfelelő négy-dimenziós kifejezés az elektron nyugalmi rendszerében

$$\delta S^{\mu\nu} = \delta\Omega^{[\mu|\varrho|}S^{\nu]}_{\cdot\,\varrho},$$

ahol $\delta\Omega^{\mu\nu}$ egy antiszimmetrikus tenzor és térbeli komponensei megegyeznek a $\delta\mathfrak{o}$ vektor komponenseivel. Természetesen általában sem a $\delta\mathfrak{o}$, sem pedig a $\delta\Omega^{\mu\nu}$ nem teljes differenciálok, ami azt jelenti, hogy nincsen az x^μ koordinátáknak megfelelő $\Omega^{\mu\nu}$ „szögkoordináta" (nem-holonom rendszer)[21].

Mármost ezeknek a felhasználásával $\delta\Omega^{\mu\nu}$ a következő alakba írható

$$\begin{aligned}\delta M^{\mu\nu} &= \delta S^{\mu\nu} + \dot z^\varrho\,\delta S^{[\mu}_{\cdot\,|\varrho|}\dot z^{\nu]} + \delta\dot z^\varrho S^{[\mu}_{\cdot\,|\varrho|}\dot z^{\nu]} = \\ &= \delta\Omega^{[\mu|\varrho|}S^{\nu]}_{\cdot\,\varrho} + \delta\dot z^\varrho S^{[\mu}_{\cdot\,|\varrho|}\dot z^{\nu]} + \\ &+ \dot z^\sigma(\delta\Omega^{[\mu|\varrho|}S_{|\sigma\varrho|}\dot z^{\nu]} - \delta\Omega_\sigma^{\cdot\,\varrho}S^{[\mu}_{\cdot\,|\varrho|}\dot z^{\nu]}).\end{aligned}$$

A számítás további része nem jelent újdonságot:

$$\begin{aligned}\delta W_5 = -\frac{1}{2}\int \gamma_0 \Big\{ & [F_{[\mu|\sigma|}S^{|\varrho|}_{\cdot\;\nu]} + H_{[\mu|\sigma|}S^{|\sigma|}_{\cdot\;\nu]} + \\ & + (F_{\varrho\sigma}+H_{\varrho\sigma})\,\dot z_\mu S^{[\sigma}_{\cdot\,|\nu|}\dot z^{\varrho]}]\,\delta\Omega^{\mu\nu} + \\ & + [(\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\lambda H_{\mu\nu})S^{\mu\nu} - (\nabla_\varrho F_{\mu\nu} + \nabla_\varrho H_{\mu\nu})\,\dot z^\varrho S^{[\mu}_{\cdot\,|\lambda|}\dot z^{\nu]} - \\ & - (F_{\mu\nu}+H_{\mu\nu})\,\dot S^{[\mu}_{\cdot\,|\lambda|}\dot z^{\nu]} - (F_{\mu\nu}+H_{\mu\nu})\,S^{[\mu}_{\cdot\,|\lambda|}\ddot z^{\nu]}]\,\delta z^\lambda + \\ & + \frac{d}{d\tau}[(F_{\mu\nu}+H_{\mu\nu})\,S^{[\mu}_{\cdot\,|\lambda|}\dot z^{\nu]}\delta z^\lambda]\Big\}\,dQ.\end{aligned}$$

e)

$$\delta W_2 = \delta\int T_{\text{kölcs}}\,dQ = \int \delta T_{\text{kölcs}}\,dQ.$$

[21] L. J. I. FRENKEL (1926).

Ennek a tagnak a variációját hagytam utoljára, mert ezt FRENKEL nem részletezi, hanem, anélkül, hogy $T_{\text{kölcs}}$ explicit kifejezését megadná, a variációját a következőképpen *definiálja:*

$$\delta T_{\text{kölcs}} = \frac{\gamma_0}{2\varrho} S_{\mu\nu} \delta \omega^{\mu\nu}$$

ahol $\varrho = \frac{e}{m_0}$ és $\omega^{\mu\nu}$ egy antiszimmetrikus tenzor, melynek a térbeli komponensei megegyeznek a háromdimenziós szögsebességvektor komponenseivel:

$$\vec{\omega} = \{\omega^{32}, \omega^{13}, \omega^{21}\}.$$

A $\delta T_{\text{kölcs}}$ kifejezésre adott formulát a többi szerzők is átveszik FRENKELtől anélkül, hogy érdemleges megjegyzést fűznének hozzá[22]; pedig a d. alattihoz hasonló meggondolással egyszerűen igazolható:

Nem-relativisztikus esetben, merev test transzlációs és rotációs mozgása közti kölcsönhatási energia, ha $\mathfrak{r}_s$ a merevtest súlypontjának a koordinátája

$$t_{\text{kölcs}} = m_0 \mathfrak{v}_0 (\vec{\omega} \times \mathfrak{r}_s).$$

Ez egyszerű átalakítással a következő alakba írható

$$t_{\text{kölcs}} = \vec{\omega}(\mathfrak{r}_s \times m_0 \mathfrak{v}_0) = (\mathfrak{s} \cdot \vec{\omega}) = -\frac{1}{\varrho}(\mathfrak{m}, \vec{\omega}),$$

ahol felhasználtuk az elektron spinje és mágnesesnyomatéka közti összefüggést, feltételezve, hogy az elektron súlypontjához rögzített koordinátarendszerben $\mathfrak{s}$ az elektron saját mechanikai impulzus nyomatékát állítja elő. Így

$$\delta t_{\text{kölcs}} = -\frac{1}{\varrho}(\mathfrak{m}, \vec{\omega}).$$

Míg $t_{\text{kölcs}}$ merev test mozgása esetén az ismert okokból eltűnik, elektron esetében, melynek saját mechanikai impulzus nyomatéka van, a $\delta t_{\text{kölcs}} \neq 0$. Bevezetve már most a fentebb definiált $\omega^{\mu\nu}$ szögsebesség tenzort, mint d. alatt, írhatjuk

$$\delta T_{\text{kölcs}} = \frac{\gamma_0}{2\varrho} S_{\mu\nu} \delta \omega^{\mu\nu}.$$

A korábban definiált $\delta \Omega^{\mu\nu}$ és a $\delta \omega^{\mu\nu}$ tenzorok közti összefüggés[23]

$$\frac{d}{d\tau} \delta \Omega^{\mu\nu} = \delta \omega^{\mu\nu}.$$

Következésképpen

$$\delta W_2 = \int \frac{\gamma_0}{2\varrho} S_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} (\delta \Omega^{\mu\nu}) dQ = \int dg \int \frac{1}{2\varrho} S_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} (\delta \Omega^{\mu\nu}) d\tau =$$

$$= \int dg \cdot \frac{1}{2\varrho} \int \left\{ \frac{d}{d\tau} (S_{\mu\nu} \delta \Omega^{\mu\nu}) - \dot{S}_{\mu\nu} \delta \Omega^{\mu\nu} \right\} d\tau$$

[22] L. C. M. LATTES, M. SCHÖNBERG and W. SCHÜTZER (1947). 221. old.
[23] L. J. I. FRENKEL (1926).

tehát

$$\delta W_2 = \frac{1}{2\varrho}\int \gamma_0 \left\{ \frac{d}{dt}(S_{\mu\nu}\delta\Omega^{\mu\nu}) - \dot{S}_{\mu\nu}\delta\Omega^{\mu\nu} \right\} dQ.$$

Miután az egyes tagok variációját így egyenként kiszámítottuk, eredményeinket összesítve kapjuk, hogy

$$\delta W = \int \Big\{ \Big[-\frac{\gamma_0}{2\varrho}\dot{S}_{\mu\nu} - \frac{\gamma_0}{2} F_{[\mu|\sigma|}S^{|\sigma|}{}_{\nu]} - \frac{\gamma_0}{2} H_{[\mu|\sigma|}S^{|\sigma|}{}_{\nu]} -$$

$$- \frac{\gamma_0}{2}(F_{\varrho\sigma} + H_{\varrho\sigma})\dot{z}_\mu S^{[\sigma}{}_{|\nu|}\dot{z}^{\varrho]} \Big] \delta\Omega^{\mu\nu} + \Big[\mu_0 \ddot{z}_\lambda + \frac{1}{8\pi}(F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})\nabla_\lambda F^{\mu\nu} +$$

$$+ \frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu}\nabla_\lambda H^{\mu\nu} - \varepsilon_0 \frac{d}{d\tau}([F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}]S^{[\mu}{}_{|\lambda|}\dot{z}^{\nu]}) \Big] \delta z^\lambda +$$

$$+ \frac{d}{d\tau}\Big[\frac{\gamma_0}{2\varrho} S_{\mu\nu}\delta\Omega^{\mu\nu} - \Big(\varepsilon_0 [A_\lambda + \Phi_\lambda] + \frac{\gamma_0}{2}[F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}]S^{[\mu}{}_{|\nu|}\dot{z}^{\lambda]} \Big) \delta z^\lambda \Big] \Big\} dQ.$$

Ha már most integrálunkat éppen úgy felbontjuk, mint az egyes tagok variációjának a kiszámításánál tettük és tekintetbe vesszük a (6, 1) alatti összefüggéseket, akkor fenti integrálunk ismét egy τ szerinti integrálra korlátozódik. Minthogy integrációs tartományunk végpontjaiban δz^λ és $\delta\Omega^{\mu\nu}$ feltételeink értelmében eltűnik, integranduszunk harmadik tagja az integrálásnál kiesik.

A δz^λ és $\delta\Omega^{\mu\nu}$ tetszés szerintiek lehetnek és egymástól függetlenek, tehát a (3, 1) alatti variációselvünk a következő mozgásegyenletekre vezet:

$$\frac{1}{\varrho}\dot{S}_{\mu\nu} = S_{[\mu}{}^{|\sigma|}F_{|\sigma|\nu]} + S_{[\mu}{}^{|\sigma|}H_{|\sigma|\nu]} + (F_{\varrho\sigma} + H_{\varrho\sigma})S^{[\varrho}{}_{|\nu|}\dot{z}^{\sigma]}\dot{z}_\mu$$

$$\frac{d}{d\tau}\Big\{ m_0 v_\lambda + \frac{1}{2}g(F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu})S^{[\mu}{}_{|\lambda|}v^{\nu]} \Big\} = e(F_{\lambda\mu} + H_{\lambda\mu})v^\mu +$$

$$+ \frac{1}{2}g S^{\mu\nu}\nabla_\lambda F_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi}(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu})\nabla_\lambda F_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\nabla_\lambda H_{\mu\nu}.$$

Mozgásegyenleteinket áttekinthetőbb alakba írhatjuk, ha bevezetjük a következő rövidítéseket

$$(6, 2) \qquad D_{\sigma\nu} \equiv F_{\sigma\kappa} - F_{[\sigma|\varrho|}v_{\nu]}v^\varrho$$

$$(6, 3) \qquad K_{\sigma\nu} \equiv H_{\sigma\nu} - H_{[\sigma|\varrho|}v_{\nu]}v^\varrho$$

$$(6, 4) \qquad f_\lambda \equiv eF_{\lambda\mu}v^\mu + \frac{1}{2}g S^{\mu\nu}\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g\frac{d}{dt}(F_{\mu\nu}v^{[\mu}S^{\nu]}{}_\lambda) +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}(F^{\mu\nu} + H^{\mu\nu})\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\nabla_\lambda H_{\mu\nu}.$$

Itt $D_{\sigma\nu}$ nyilvánvalóan az elektron által keltett térnek a visszahatását tartalmazza az elektronra. $K_{\sigma\nu}$ a külső tér és az elektron mágneses nyomatéka közti közvetlen kölcsönhatást adja. Végül pedig az f_λ a keresett LORENTZ-féle sajáterő.

A LORENTZ-féle sajáterő kifejezésében szereplő utolsó két tag FRENKEL-nél és más szerzőknél nem szerepel. Ennek az oka az, hogy az eddigiekben a hatásintegrálban szereplő W_3 tagot figyelmen kívül hagyták. Meg szeretném említeni ezen a helyen még a következőket. E két tag első pillanatra abban különbözik a sajáterő kifejezésében szereplő többi tagtól, hogy explicite nem tartalmazza a sajáttér és az elektron mozgását meghatározó állapothatározók közti összefüggést. Tekintettel azonban arra, hogy $F_{\mu\nu}$ a v_μ és az $S_{\mu\nu}$ függvénye, a kölcsönhatás implicite megvan. E problémával más helyen kívánok majd a továbbiakban részletesen foglalkozni.

Ezek előrebocsátása után elektronunk mozgásegyenletei a következő végleges alakra hozhatók:

$$\frac{1}{\varrho}\dot{S}_{\mu\nu} = S_{[\mu}{}^{|\sigma|}{}_{\cdot} D_{|\sigma|\nu]} + S_{[\mu}{}^{|\sigma|}{}_{\cdot} K_{|\sigma|\nu]}; \tag{6, 5}$$

valamint

$$\frac{d}{d\tau}\left\{ m_0 v_\lambda + \frac{1}{2} g H_{\mu\nu} S^{[\mu}{}_{\cdot|\lambda|} v^{\nu]} \right\} = f_\lambda + e H_{\lambda\mu} v^\mu + \frac{1}{2} g S^{\mu\nu} \nabla_\lambda H_{\mu\nu}. \tag{6, 6}$$

Egyenleteink közül az első az elektron rotációs mozgását, a második pedig a transzlációs mozgását határozza meg. Mint érdekes részleteredményt kaptuk, hogy a kettő nem független egymástól.

A továbbiakban a sajáttér állapothatározóit számítjuk ki a RIESZ-potenciálok segítségével. A sajáterővel kapcsolatos további problémánkkal azonban, amint arra a bevezetésben is utaltam, egy későbbi vizsgálatban kívánok foglalkozni.

III. A Riesz-potenciálok alkalmazása a tér állapothatározóinak kiszámításánál

7. §. A Riesz-potenciálok. A hullámegyenlet megoldásával kapcsolatos alapprobléma a következőképpen fogalmazható meg[24]:

Legyen $f(\mathbf{x})$ egy, az egész négy-dimenziós pszeudo-EUKLIDESI-térben értelmezett, függvény. Határozzuk meg azt a Φ függvényt mely kielégíti a

$$\Box\Phi = f \tag{7, 1}$$

hullámegyenletet, feltéve, hogy Φ parciális differenciálhányadosaival együtt, a CAUCHY-problémánál megszokott módon egy adott felületen meghatárczott értékeket vesz fel. Feltesszük továbbá, hogy mind f, mind pedig Φ és differenciálhányadosai rendelkeznek azokkal a folytonossági és regularitási tulajdonságokkal, melyekre a soronkövetkezőkben szükség lesz.

[24] Részletesebben l. a FÜGGELÉKet.

M. RIESZ (1936, 1948) bevezette a következő négy-dimenziós, RIEMANN—LIOUVILLE-típusú, integrált

$$I^{(\alpha)}f(P)=\frac{1}{H(\alpha)}\int\limits_{D_S^P} f(Q)r_{PQ}^{\alpha-4}dQ, \tag{7, 2}$$

ahol

$$H(\alpha)=2^{\alpha-1}\pi\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{2}\right). \tag{7, 3}$$

Ha f folytonos, akkor ez az integrál $\alpha>2$ esetben konvergens és analitikus folytatással, mint az α komplex paraméter függvénye, $\alpha\leqq 2$ esetre is definiálható.

Integrálunk mindenekelőtt kielégíti az alábbi alapvető relációkat

$$I^{(0)}f(P)=f(P);\ I^{(\alpha)}I^{(\beta)}=I^{(\alpha+\beta)};\ \Box I^{(\alpha+2)}=I^{(\alpha)}$$

valahányszor f és S első differenciálhányadosaikkal együtt folytonosak.

A mi esetünkben csak arra a speciális esetre kell szorítkoznunk, amikor a töltés eloszlás csak egy világvonalra korlátozódik és leírható egy a világvonal mentén értelmezett, $F(t)$ függvény segítségével. Ekkor a probléma RIESZ-potenciálja a következő alakba írható:

$$A^{(\alpha)}(P)=\frac{1}{H(\alpha)}\int\limits_{t_S}^{t_0} F(t)r_{PQ}^{\alpha-4}dt \tag{7, 6}$$

ahol t_S annak a pontnak megfelelő paraméterérték, ahol a görbe metszi a fenti S felületet és t_0 a P-hez tartozó retardáltpontnak megfelelő paraméterérték. Ha az elektron világvonalának van időszerű asszimptotája[25], amit a továbbiakban feltételezünk, akkor a (7, 6) alatti integrálnak $t=-\infty$ esetben is van értelme.[26]

8. §. Az elektronelméleti probléma Riesz-potenciáljai. Ezek előrebocsátása után a (4, 6) alatti

$$\Box A^{\mu}=-4\pi s^{\mu}-4\pi\nabla_{\nu}\Sigma^{\mu\nu} \tag{4, 6}$$

hullámegyenlet RIESZ-potenciáljai a következőképpen állíthatók elő:

$$A^{(\alpha)\mu}=A_{(1)}^{(\alpha)\mu}+A_{(2)}^{(\alpha)\mu} \tag{8, 1}$$

ahol

$$A_{(1)}^{(\alpha)\mu}(P)=-\frac{4\pi e}{H(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\tau_0} v^{\mu}(Q)r_{PQ}^{\alpha-4}dQ \tag{8, 2}$$

[25] L. 2. §.
[26] Részletesebben l. FÜGGELÉK 5.

és

$$A_{(2)}^{(\alpha)\mu}(P) = -\frac{4\pi g}{H(\alpha)} \nabla_\nu \int\limits_{-\infty}^{\tau_0} S^{\mu\nu}(Q) r_{PQ}^{\alpha-4} dQ. \tag{8, 3}$$

A felbontásunkból nyilvánvalóan látszik, hogy $A_{(1)}^{(\alpha)\mu}$ a mágneses momentum nélküli elektron RIESZ-potenciálja, az $A_{(2)}^{(\alpha)\mu}$ pedig a térnek a dipólmomentumból származó részét állítja elő. A továbbiakban egyenlőre feltételezzük, hogy P nem pontja az elektron világvonalának.

9. §. Új integrációs változók. Integráljaink explicit kiszámításának megkönnyítése céljából a τ és az

$$R \equiv r^2 = \mathbf{r}^2 = r_{PQ}^2 = r^\mu r_\mu = (\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau))^2 = (x^\mu - z^\mu(\tau))(x_\mu - z_\mu(\tau)) \tag{9, 1}$$

változók helyett vezessük be az $\mathbf{x}$ és az

$$r = \|\mathbf{r}\| = (r^\mu r_\mu)^{1/2}$$

változókat független változóknak.

Állítsuk most össze azokat az összefüggéseket ezek között a változók között, melyeket a továbbiakban ismételten fel fogunk használni.

Mindenekelőtt elektron sebessége a következőképpen fejezhető ki

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \tag{9, 2}$$

Ezek felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{\varkappa}{r} \tag{9, 3}$$

ahol

$$\varkappa = (\mathbf{r}, \mathbf{v}). \tag{9, 4}$$

Tekintsük most az $\mathbf{x}$ és az r változókat függetlennek, akkor (9, 1) felhasználásával kapjuk, hogy

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial(r^2)}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x^\mu}, \mathbf{r}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^\mu}, \mathbf{r}\right) = r_\mu - \varkappa \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu},$$

tekintettel arra, hogy

$$\frac{\partial r^\lambda}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\lambda; \tag{9, 5}$$

következőképpen:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} = \frac{r_\mu}{\varkappa}. \tag{9, 6}$$

Hasonlóképpen közvetlenül beláthatjuk, hogy

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial x^\mu} = v_\mu = -\frac{\partial r_\mu}{\partial \tau}. \tag{9, 7}$$

Ezek felhasználásával integráljainkat közvetlenül kiértékelhetjük.

Hogy formulagyüjteményünket teljessé tegyük alakítsuk át a (7. 3) alatti normálási faktort a következőképpen:

$$H(\alpha)=2^{\alpha-1}\pi\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)=\frac{4\pi 2^{\alpha-2}\left\{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}^2}{\alpha-2}. \tag{9, 8}$$

Végül ismét felhívom a figyelmet arra, hogy τ és $\mathbf{x}$ nem függetlenek egymástól, következésképpen valahányszor $F=F(\mathbf{x},\tau)$, ahol F különben egy tetszés szerinti függvény

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\right)_r=\frac{\partial F}{\partial x^\mu}+\frac{\partial F}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^\mu}=\frac{\partial F}{\partial x^\mu}+\frac{\partial F}{\partial \tau}\frac{r_\mu}{\varkappa}. \tag{9, 9}$$

Formulánkban az r index arra utal, hogy az x^μ szerinti parciális differenciáláskor az r, melyet most az új integrációs változók bevezetésével független változónak tekintünk, állandó marad.[27] Ennek az összefüggésnek a mélyebb okára a 4. §-ban rámutattunk.

10. §. A Lienard—Wiechert-féle potenciálok. Számítsuk ki mindenek előtt a RIESZ-féle potenciálok segitségével az elektron töltése által gerjesztett sajáttér potenciáljait, melyeket LIENARD—WIECHERT-féle potenciálok néven a klasszikus elektronelméletből jól ismerünk[29]:

A potenciálok (8, 2) alatti definíciójából, az új változók bevezetésével, (9, 3) és (9, 8) alapján kapjuk:

$$A_{(1)}^{(\alpha)\mu}(P)=-\frac{e(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2}\int_0^\infty \frac{v^\mu}{\varkappa}r^{\alpha-3}dr. \tag{10, 1}$$

Alkalmazzuk most a következő általános érvényű formulát:

$$\lim_{\beta\to+0}\beta\int_0^\infty f(x)x^{\beta-1}dx=f(0), \tag{10, 2}$$

mely teljesül valahányszor az integrál valamilyen $\beta>0$ esetben konvergens és az $f(x)$ folytonos az $x=0$ pontban.

Akkor, minthogy a (10, 1) alatti integrál $2<\alpha<3$ esetben konvergens, kapjuk $\alpha\to 2+0$ esetben, hogy

$$A_{(1)}^{\mu}(P)=-\left\{\frac{e v^\mu}{\varkappa}\right\}_0=-\left\{\frac{e v^\mu}{(\mathbf{r},\mathbf{v})}\right\}_0, \tag{10, 3}$$

ahol az index arra utal, hogy a zárójelbe tett kifejezés $r^2=0$, tehát retardált időben veendő.

[27] Ezen a ponton köszönetemet fejezem ki S. B. NILSSON kollégámnak, aki szíves útbaigazításaival segítségemre volt.

[29] L. N. E. FREMBERG (1946).

11. §. A Bhabha—Corben-féle potenciál. Határozzuk most meg az elektron mágnesesnyomatéka által keltett sajáttér potenciáljait.

Az új változás bevezetésével (8, 3), felhasználva (9, 3) és a (9, 8) alatti formuláinkat, a következő alakba írható:

$$A_{(2)}^{(\alpha)\mu}(P) = \frac{g(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2} \nabla_\nu \int_0^\infty \frac{S^{\nu\mu}}{\varkappa} r^{\alpha-3} dr. \tag{11, 1}$$

Most látjuk a 9. §-ban bevezetett új változók előnyeit. Minthogy ugyanis feltételünknek megfelelően x^μ és r függetlenek, az integráció és a differenciálás sorrendje felcserélhető, következésképpen (11, 1) a következő alakba írható

$$A_{(2)}^{(\alpha)\mu}(P) = \frac{g(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2} \int_0^\infty \nabla_\nu \left(\frac{S^{\nu\mu}}{\varkappa}\right) r^{\alpha-3} dr.$$

A (9, 9) alatti formulánk alkalmazásával

$$\nabla_\nu \left(\frac{S^{\nu\mu}}{\varkappa}\right) = -\frac{S^{\nu\mu}}{\varkappa}\frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{S^{\nu\mu}}{\varkappa}\right)\frac{\partial \tau}{\partial x^\nu} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{r_\nu S^{\nu\mu}}{\varkappa}\right).$$

Tehát

$$A_{(2)}^{(\alpha)\mu} = \frac{g(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2} \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{r_\nu S^{\nu\mu}}{\varkappa}\right) r^{\alpha-3} dr. \tag{11, 2}$$

A (10, 2) alatti segédtétel alapján, minthogy integrálunk $2 < \alpha < 5$ esetben konvergens, kapjuk $\alpha \to 2+0$ esetben, hogy

$$A_{(2)}{}^\mu = g\left\{\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{r_\nu S^{\nu\mu}}{\varkappa}\right)\right\}_0 \tag{11, 3}$$

vagy részletesen:

$$A_{(2)}{}^\mu = \frac{g}{(\mathbf{r}, \mathbf{v})^3}\{(r_\nu \dot{S}^{\nu\mu} - v_\nu S^{\nu\mu})(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + r_\nu S^{\nu\mu} - r_\nu S^{\nu\mu}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{v}})\}_0, \tag{11, 4}$$

ahol a zárójel mellé írt index mindkét esetben azt jelenti, hogy a zárójelben levő kifejezés retardált időben veendő.

Ezek a potenciálok már BHABHA és CORBEN dolgozatában is szerepelnek. Ők azonban más úton vezették le.

12. §. Az elektromágneses tértenzor. Az $A_{(1)}{}^\mu$ és $A_{(2)}{}^\mu$ potenciálok ismeretében most már megvan a lehetőség arra, hogy a (3, 2) alatt bevezetett $F_{(1)}{}^{\mu\nu}$ és $F_{(2)}{}^{\mu\nu}$ tenzorokat is meghatározhassuk. A szokott (4, 5) alatti rotációképzés segítségével formálisan közvetlenül előállíthatjuk őket

$$F_{(1)\mu\nu} = \nabla_{[\mu} A_{(1)\nu]} \text{ ill. } F_{(2)\mu\nu} = \nabla_{[\mu} A_{(2)\nu]}$$

alakban. Az explicit számításra azonban a (10, 3) és a (11, 4) formuláink nem alkalmasak, mert ezekben a formulákban a zárójelben levő mennyiségeket retardált időben kell venni, a τ_0 retardált idő viszont, amint arra a 4. §-ban már rámutattam, nem független x^μ-től.

A nehézséget igen egyszerűen elkerülhetjük, ha az $A_{(1)}^{(\alpha)\mu}$ és az $A_{(2)}^{(\alpha)\mu}$ RIESZ-potenciálok segítségével előbb definiáljuk az

$$(12,1) \qquad F_{(1)\mu\nu}^{(\alpha)} = \nabla_{[\mu} A_{(1)\nu]}^{(\alpha)} \text{ ill. } F_{(2)\mu\nu}^{(\alpha)} = \nabla_{[\mu} A_{(2)\nu]}^{(\alpha)}$$

tenzorokat, majd ezeket a RIESZ-féle módszert követve, az α paraméter függvényének tekintjük és $\alpha \to 2+0$, analitikus folytatással, a problémánk megoldását szolgáltató

$$(12,2) \qquad F_{(1)\mu\nu} = F_{(1)\mu\nu}^{(2)} \text{ ill. } F_{(2)\mu\nu} = F_{(2)\mu\nu}^{(2)}$$

tértenzorokat előállíthatjuk.

Rátérve már most az $F_{(1)\mu\nu}^{(\alpha)}$ tenzor explicit kiszámítására a (9, 9) alatti formulánk alkalmazásával kapjuk

$$\nabla_\mu \left(\frac{v_\nu}{\varkappa} \right) = \frac{\partial r_\mu}{\partial \tau} \frac{v_\nu}{\varkappa^2} + \frac{r_\mu}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{v_\nu}{\partial \varkappa} \right) = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_\mu v_\nu}{\varkappa} \right);$$

következésképpen:

$$(12,3) \qquad F_{(1)\mu\nu}^{(\alpha)} = \frac{-e(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2} \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_{[\mu} v_{\nu]}}{\varkappa} \right) r^{\alpha-3} dr.$$

Tehát (10, 2) alatti formulánk alapján a (12, 2) alatti határátmenettel kapjuk, hogy

$$(12,4) \qquad F_{(1)\mu\nu} = e \left\{ \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{v_{[\mu} r_{\nu]}}{\varkappa} \right) \right\}_0$$

ill. a számításokat explicite elvégezve

$$(12,5) \qquad F_{(1)\mu\nu} = e \left\{ \frac{v_{[\mu} r_{\nu]}}{(\mathbf{r}, \mathbf{v})^3} [1 - (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{v}})] - \frac{\dot{v}_{[\mu} r_{\nu]}}{(\mathbf{r}, \mathbf{v})^2} \right\}_0,$$

ahol az index ismét azt jelenti, hogy a zárójelbe tett mennyiség retardált időben veendő.

Hasonlóképpen számítjuk ki az $F_{(2)\mu\nu}$ tenzort is. Alkalmazva ismét a (9, 9) alatti formulát:

$$\nabla_\mu \nabla_\varrho \left(\frac{S^\varrho{}_\nu}{\varkappa} \right) = \nabla_\mu \left\{ \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_\varrho S^\varrho{}_\nu}{\varkappa} \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_\varrho S^\varrho{}_\nu}{\varkappa} \right) \right\}_\tau +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_\varrho S^\varrho{}_\nu}{\varkappa} \right) \right\} \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} = \frac{1}{\varkappa} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{S_{\mu\nu}}{\varkappa} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_\mu r_\varrho S^\varrho{}_\nu}{\varkappa} \right) \right] \right\}.$$

Közben felhasználtuk a (9, 7) alatti összefüggést. Behelyettesítve ezt a (12, 1) ill. a (11, 2) alatti egyenletbe kapjuk, hogy

$$(12,6) \qquad F_{(2)\mu\nu}^{(\alpha)} = \frac{g(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2} \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{S_{\mu\nu}}{\varkappa} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_\varrho r_{[\mu} S^{|\varrho|}{}_{\nu]}}{\varkappa} \right) \right] \right\} r^{\alpha-3} dr.$$

Ez az integrál $2 < \alpha < 7$ esetben konvergens, tehát a (12, 2) alatti analitikus folytatással

$$F_{(2)\mu\nu} = g\left\{\frac{1}{\varkappa}\left[2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{S_{\mu\nu}}{\varkappa}\right)+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{r_\varrho r_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\cdot\nu]}}{\varkappa}\right]\right)\right]\right\}_0 \tag{12,7}$$

valamint

$$\begin{aligned} F_{(2)\mu\nu} = g\Big\{ & 2\frac{1-\varkappa'}{\varkappa^2}S_{\mu\nu}+\frac{2}{\varkappa}\dot{S}_{\mu\nu}\Big)+ \\ & +3\frac{(1-\varkappa')^2}{\varkappa^4}r_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\cdot\nu]}r_\varrho-\frac{\varkappa''}{\varkappa^3}r_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\cdot\nu]}r_\varrho\Big)- \\ & -3\frac{1-\varkappa'}{\varkappa^3}\Big(v_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\cdot\nu]}r_\varrho+r_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\cdot\nu]}v_\varrho-r_{[\mu}\dot{S}^{|\varrho|}{}_{\cdot\nu]}r_\varrho+ \\ & +\frac{1}{\varkappa^2}\Big(-\dot{v}_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\cdot\nu]}r_\varrho+2v_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\cdot\nu]}v_\varrho-2v_{[\mu}\dot{S}^{|\varrho|}{}_{\cdot\nu]}r_\varrho\Big)- \\ & -r_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\cdot\nu]}\dot{v}_\varrho-2r_{[\mu}\dot{S}^{|\varrho|}{}_{\cdot\nu]}v_\varrho+r_{[\mu}\ddot{S}^{|\varrho|}{}_{\cdot\nu]}r_\varrho\Big\}_0 \end{aligned} \tag{12,8}$$

ahol $\varkappa' = (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{v}})$, $\varkappa'' = (\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{v}})$ és az index arra utal, hogy a zárójelben levő kifejezések retardált időben veendők.

Összehasonlítva eredményünket BHABHA és CORBEN más úton levezetett formuláival teljes egyezésben vagyunk. Egyedüli eltérést az jelent, hogy a (12, 8) formulában hátulról a negyedik tagban náluk $\dot{S}^{\varrho}_{\cdot\nu}$ helyett $S^{\varrho}_{\cdot\nu}$ és a harmadik tagban a „—" előjel helyett „+" előjel áll. Ez az eltérés azonban csak sajtóhiba következménye lehet.

Az energia-impulzus-tenzort most is úgy definiáljuk, mint az az elektromágneses tér esetében általában szokásos. Először értelmezzük az ún. RIESZ-féle

$$T^{(\alpha)}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left\{F^{(\alpha)}{}_{\mu\varrho}F^{(\alpha)\varrho}{}_{\cdot\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{(\alpha)}{}_{\varrho\sigma}F^{(\alpha)\varrho\sigma}\right\} \tag{12,9}$$

energia-impulzus tenzort, melyből azután analitikus folytatással előállítjuk az elektromágneses saját tér $T_{\mu\nu}$ energia-impulzus tenzorát. Ennek az explicit alakjára azonban a továbbiakban nem lesz szükségünk.

13. §. Az elektromágneses tértenzorok meghatározása az elektron világvonalán.

A sajáterő kiszámítása céljából, mindenekelőtt határozzuk meg az elektromágneses tértenzorok értékét az elektron világvonalán. Ily módon nyilvánvaló, hogy a mozgó elektron által keltett térnek az elektronra gyakorolt visszahatását kapjuk. Természetesen kifejezéseink az elektron világvonalán divergensek, a RIESZ-féle módszer segítségével azonban, analitikus folytatással egyszerűen kiszámíthatjuk a divergens integrálok *véges részét*.

Az előzőekkel ellentétben legyen tehát most a $P(\mathbf{x})$ pont az elektron világvonalának egy pontja és határozzuk meg a (12, 5) és a (12, 8) alatti $F_{(1)\mu\nu}$ és $F_{(2)\mu\nu}$ tértenzorokat ebben a pontban.

Számításaink megkönnyítése céljából ismét úgy járunk el, hogy előbb az $F^{(\alpha)}_{(1)\mu\nu}$ és az $F^{(\alpha)}_{(2)\mu\nu}$ tenzorok (12, 3) ill. (12, 6) alatti kifejezéseit megfelelően átalakítjuk és az analitikus folytatást azután eszközöljük.

Integrációsváltozóként vezessük be ismét a τ ívhosszúságparamétert, akkor (12, 3) a (9, 3) alatti formula felhasználásával és parciális integrálással a következő alakra hozható:

$$F^{(\alpha)}_{(1)\mu\nu} = -\frac{e(\alpha-2)(\alpha-4)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2}\int_{-\infty}^{\tau_0} r_{[\mu}v_{\nu]}r^{\alpha-6}d\tau. \tag{13, 1}$$

Hasonlóképpen

$$F^{(\alpha)}_{(2)\mu\nu} = \frac{g(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2}\int_{-\infty}^{\tau_0}\left\{2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{S_{\mu\nu}}{\varkappa}\right)+\right. \tag{13, 2}$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{r_\varrho r_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}}{\varkappa}\right)\right]\right\}r^{\alpha-4}d\tau$$

A (13, 1) alatti integrál $2<\alpha<5$, a (14, 2) alatti pedig $2<\alpha<7$ esetén az α reguláris függvénye és így az $\alpha\rightarrow 2+0$ határátmenet esetében analitikus folytatással a bennünket érdeklő $\alpha=2$ esetre is értelmezhető.

Bontsuk mindkét integrált két részre és integráljunk mindkét esetben részint a $(-\infty, A)$, részint pedig az (A, τ_0) intervallumon. Az első integrál mindkét esetben véges marad az $\alpha\rightarrow 2+0$ határátmenet esetén és $\alpha=2$-re az integrál előtti faktor következtében a megfelelő tagok eltűnnek.

A másik két integrál kiszámítása céljából az integranduszban szereplő mennyiségeket fejtsük sorba a τ_0 környezetében $|\tau-\tau_0|=\varepsilon>0$ hatványai szerint. Akkor kapjuk, hogy

$$r_\mu = -\varepsilon\left\{(v_\mu)_0+\frac{1}{2}(\dot v_\mu)_0\varepsilon+\frac{1}{6}(\ddot v_\mu)_0\varepsilon^2+\frac{1}{24}(\overset{(3)}{v_\mu})_0\varepsilon^3+\frac{1}{120}(\overset{(4)}{v_\mu})_0\varepsilon^4+0(\varepsilon^5)\right\}$$

ahol tekintetbe vettük, hogy $(r_\mu)_0=0$ és általában $0(\varepsilon^n)$ jelöli azokat a tagokat, melyek legalább ε^n-t tartalmazzák. Hasonlóképpen

$$v_\mu=(v_\mu)_0+(\dot v_\mu)_0\varepsilon+\frac{1}{2}(\ddot v_\mu)_0\varepsilon^2+\frac{1}{6}(\overset{(3)}{v_\mu})_0\varepsilon^3+\frac{1}{24}(\overset{(4)}{v_\mu})_0\varepsilon^4+0(\varepsilon^5)$$

$$\dot v_\mu=(\dot v_\mu)_0+(\ddot v_\mu)_0\varepsilon+\frac{1}{2}(\overset{(3)}{v_\mu})_0\varepsilon^2+\frac{1}{6}(\overset{(4)}{v_\mu})_0\varepsilon^3+\frac{1}{24}(\overset{(5)}{v_\mu})_0\varepsilon^4+0(\varepsilon^5)$$

stb., valamint

$$S_{\mu\nu}=(S_{\mu\nu})_0+(\dot S_{\mu\nu})_0\,\varepsilon+\frac{1}{2}(\ddot S_{\mu\nu})_0\varepsilon^2+\frac{1}{6}(\overset{(3)}{S_{\mu\nu}})_0\varepsilon^3+\frac{1}{24}(\overset{(4)}{S_{\mu\nu}})_0\varepsilon^4+0(\varepsilon^5)$$

stb. Ezeknek a felhasználásával

$$\varkappa=-\varepsilon\left\{1-\frac{1}{6}(\dot v^2)_0\varepsilon^2-\frac{5}{24}(\mathbf{\dot v},\mathbf{\ddot v})_0\varepsilon^3-\left[\frac{3}{40}(\mathbf{\dot v},\overset{(3)}{\mathbf{v}})_0+\frac{1}{15}(\ddot v^2)_0\right]\varepsilon^4+0(\varepsilon^5)\right\}$$

$$r_{[\mu}v_{\nu]}=-\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{(v_{[\mu}\dot{v}_{\nu]})_0-\frac{2}{3}(\ddot{v}_{[\mu}v_{\nu]})_0\varepsilon+0(\varepsilon^2)\right\}$$

$$r^2=\varepsilon^2\left\{1-\frac{1}{12}(\dot{v}^2)_0\varepsilon^2-\frac{1}{12}(\dot{\mathbf{v}},\ddot{\mathbf{v}})_0\varepsilon^3+0(\varepsilon^4)\right\}$$

stb. ahol közben figyelembe vettük, hogy

$$\mathbf{v}^2=1;\ (\mathbf{v},\ddot{\mathbf{v}})+\dot{\mathbf{v}}^2=0;\ (\mathbf{v},\overset{(4)}{\mathbf{v}})+4(\dot{\mathbf{v}},\overset{(3)}{\mathbf{v}})+3\ddot{\mathbf{v}}^2=0$$

$$(\mathbf{v},\dot{\mathbf{v}})=0;\ (\mathbf{v},\overset{(3)}{\mathbf{v}})+3(\dot{\mathbf{v}},\ddot{\mathbf{v}})=0;\ \text{stb.}$$

következésképpen az ε-t bevezetve új integrációs változónak kapjuk:

$$F^{(\alpha)}_{(1)\mu\nu}=-\frac{e(\alpha-2)(\alpha-4)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2}\int\limits_{\varepsilon_A}^{0}\varepsilon^{\alpha-4}\frac{1}{2}\left\{(v_{[\mu}\dot{v}_{\nu]})_0+\frac{2}{3}(\ddot{v}_{[\mu}v_{\nu]})_0\varepsilon+0(\varepsilon^2)\right\}d\varepsilon$$

és az analitikus folytatás azt adja, hogy

$$F_{(1)\mu\nu}=\frac{2e}{3}(\ddot{v}_{[\mu}v_{\nu]})_0. \tag{13,3}$$

Az elektron dipólmomentuma által keltett tér tértenzorát az elektron világvonalán hasonlóképpen számítjuk ki. Tekintettel azonban arra, hogy ez a tértenzor kissé sok tagból tevődik össze, a részletes számítást itt hosszadalmas volna közölni:

$$\begin{aligned}F_{(2)\mu\nu}=g\Big\{&\frac{2}{3}(\overset{(3)}{S}_{\mu\nu})_0+\frac{2}{3}(\dot{v}^2)_0(\dot{S}_{\mu\nu})_0-\frac{5}{6}(\dot{\mathbf{v}},\ddot{\mathbf{v}})_0(S_{\mu\nu})_0-\\&-\frac{1}{3}(v_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}\overset{(3)}{v}_\varrho)_0-\frac{4}{3}(v_{[\mu}\dot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]}\ddot{v}_\varrho)_0-2(v_{[\mu}\ddot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]}\dot{v}_\varrho)_0-\\&-\frac{4}{3}(v_{[\mu}\overset{(3)}{S}{}^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0-\frac{2}{3}(\dot{v}_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}\ddot{v}_\varrho)_0-2(\dot{v}_{[\mu}\dot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]}\dot{v}_\varrho)_0-\\&-2(\dot{v}_{[\mu}\ddot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0-\frac{2}{3}(\ddot{v}_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}\dot{v}_\varrho)_0-\frac{4}{3}(\ddot{v}_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0-\\&-\frac{1}{3}(\overset{(3)}{v}_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0-\\&-(\dot{v}^2)_0[(v_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}\dot{v}_\varrho)_0+(v_{[\mu}\dot{S}^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0+(\dot{v}_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0]-\\&-\left(\frac{3}{2}\right)^2(\dot{\mathbf{v}},\ddot{\mathbf{v}})_0(v_{[\mu}S^{|\varrho|}{}_{\nu]}v_\varrho)_0\Big\}.\end{aligned} \tag{13,4}$$

Eredményünket összehasonlítjuk részben DIRAC (1938) és FREMBERG (1946), részben pedig BHABHA és CORBEN (1941) eredményeivel. A DIRAC-féle nomenklatúrában a most kiszámított tértenzor éppen az

$$F^{\text{rad}}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(F^{\text{ret}}_{\mu\nu}-F^{\text{adv}}_{\mu\nu}).$$

ún. sugárzótérnek felel meg. Míg $F_{(1)\mu\nu}$ esetében a megegyezés közvetlenül ellenőrizhető, $F_{(2)\mu\nu}$ összehasonlításánál a BHABHA—CORBEN-féle (140) egyenletben $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = -\frac{7}{15}$, $k_3 = \frac{1}{3}$, $k_4 = \frac{4}{3}$, $k_6 = 0$ helyettesítést kell végezni. A k_5 határozatlan együtthatót tartalmazó tagban a faktorban eltérés mutatkozik, erre azonban már HARISH—CHANDRA (1946), valamint R. C. MAJUMDAR és S. GUPTA (1949) is felhívták a figyelmet; továbbá a harmadik tagban $\frac{5}{6}$ helyett $\frac{2}{3}$ szerepel.

Legyünk most tekintettel a (2, 1) alatti FRENKEL-féle feltételre, akkor

$$v_\varrho S^\varrho_{\cdot\nu} = 0 \quad ; \quad \overset{(3)}{v}_\varrho S^\varrho_{\cdot\nu} + 3\ddot{v}_\varrho \dot{S}^\varrho_{\cdot\nu} + 3\dot{v}_\varrho \ddot{S}^\varrho_{\cdot\nu} + v_\varrho \overset{(3)}{S}{}^\varrho_{\cdot\nu} = 0$$

$$\dot{v}_\varrho S^\varrho_{\cdot\nu} + v_\varrho \dot{S}^\varrho_{\cdot\nu} = 0 \quad ; \quad \text{stb.}$$

$$\ddot{v}_\varrho S^\varrho_{\cdot\nu} + 2\dot{v}_\varrho \dot{S}^\varrho_{\cdot\nu} + v_\varrho \ddot{S}^\varrho_{\cdot\nu} = 0 ;$$

melyeknek a felhasználásával

$$(13,5) \qquad F_{(2)\mu\nu} = g \Big\{ \frac{2}{3} (\overset{(3)}{S}_{\mu\nu})_0 + \frac{2}{3} (\dot{v}^2)_0 (\dot{S}_{\mu\nu})_0 - \frac{5}{6} (\dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}})_0 (S_{\mu\nu})_0 -$$
$$- \frac{1}{3} (v_{[\mu} \dot{S}^{|\varrho|}_{\cdot\nu]} \ddot{v}_\varrho)_0 - (v_{[\mu} \ddot{S}^{|\varrho|}_{\cdot\nu]} \dot{v}_\varrho)_0 - \frac{1}{3} (v_{[\mu} \overset{(3)}{S}{}^{|\varrho|}_{\cdot\nu]} v_\varrho)_0 -$$
$$- \frac{2}{3} (\dot{v}_{[\mu} \dot{S}^{|\varrho|}_{\cdot\nu]} \dot{v}_\varrho)_0 - \frac{4}{3} (\dot{v}_{[\mu} \ddot{S}^{|\varrho|}_{\cdot\nu]} v_\varrho)_0 - \frac{2}{3} (\ddot{v}_{[\mu} \dot{S}^{|\varrho|}_{\cdot\nu]} v_\varrho)_0 +$$
$$+ 2(\dot{v}^2)_0 (v_{[\mu} \dot{S}^{|\varrho|}_{\cdot\nu]} v_\varrho)_0 \Big\} .$$

Amivel a keresett végformulánkat megkaptuk. Ezeknek a birtokában könnyen meghatározhatjuk pl. az elektron sajátterének a feszültségenergia-tenzorát a világvonal mentén.

14. §. Megjegyzések a sajáterő explicit kiszámításával kapcsolatban. A sajáterő kiszámításánál ugyanazt a módszert kell lényegében véve követni, melyet az előző §-ban már alkalmaztunk:

A sajáterő (6, 4) alatti kifejezésében az egyedüli újabb problémát a $\nabla_\varrho F_{\mu\nu}$ explicit kiszámítása jelenti, melyet az alábbiakban részletezünk.

A (3, 2) alatti felbontásnak megfelelően

$$\nabla_\varrho F^{(\alpha)}_{\mu\nu} = \nabla_\varrho F^{(\alpha)}_{(1)\mu\nu} + \nabla_\varrho F^{(\alpha)}_{(2)\mu\nu} ,$$

következésképpen a (9, 9) alatti formulánk ismételt alkalmazásával, és a 12. §-ban részletezett módon kapjuk, hogy

$$(15,1) \qquad \nabla_\varrho F^{(\alpha)}_{(1)\mu\nu} = \frac{e(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2} \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \Big\{ \frac{g_{\varrho[\mu} v_{\nu]}}{\varkappa} +$$
$$+ \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{r_\varrho r_{[\mu} v_{\nu]}}{\varkappa} \right) \Big\} r^{\alpha-3} dr ,$$

valamint

$$(15,1)\qquad \nabla_\varrho F^{(\alpha)}_{(2)\mu\nu}=\frac{g(\alpha-2)}{2^{\alpha-2}\{\Gamma(\alpha/2)\}^2}\int_0^\infty \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[2\frac{r_\varrho S_{\mu\nu}}{\varkappa}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{r_{[\mu}S_{|\varrho|\nu]}}{\varkappa}+\frac{g_{\varrho[\nu}S^{|\sigma|}{}_{\cdot\nu]}r_\sigma}{\varkappa}+\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{r_\varrho r_{[\mu}S^{|\sigma|}{}_{\cdot\nu]}r_\sigma}{\varkappa}\right)\right]\right\} r^{\alpha-3}dr.$$

A (15, 1) alatti integrál $2<\alpha<7$ és a (15, 2) alatti $2<\alpha<9$ esetben az α reguláris függvénye. Az $\alpha=2$ esetet analitikus folytatással kapjuk:

$$(15,2)\qquad \nabla_\varrho F_{(1)\mu\nu}=-e\left\{\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{g_{\varrho[\mu}v_{\nu]}}{\varkappa}\right)+\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{r_\varrho r_{[\mu}v_{\nu]}}{\varkappa}\right)\right\}_0$$

$$(15,4)\qquad \nabla_\varrho F_{(2)\mu\nu}=g\left\{\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(2\frac{r_\varrho S_{\mu\nu}}{\varkappa}+\frac{g_{\varrho[\mu}S^{|\sigma|}{}_{\cdot\nu]}}{\varkappa}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{r_{[\mu}S_{|\varrho|\nu]}}{r}+\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{r_\varrho r_{[\mu}S^{|\sigma|}{}_{\cdot\nu]}r_\sigma}{\varkappa}\right\}\right)\right]\right\}_0,$$

ahol az index mindkét esetben azt jelenti, hogy a zárójelbe tett kifejezés retardált időben veendő.

A továbbiakban ugyanúgy kell eljárni, mint azt a 12. §-ban és a 13. §-ban részleteztük. Minthogy arra már ismételten utaltam, a sajáterővel kapcsolatos problémákkal a közeljövőben egy külön tanulmányban kívánok foglalkozni, a (15, 3) és (15, 4) alatti kifejezések, ill. azoknak a világvonalon felvett alakjának explicit felírását mellőzöm.

FÜGGELÉK. A RIESZ-FÉLE POTENCIÁLOK ALKALMAZÁSA HIPERBOLIKUS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSÁNÁL

1) Hiperbolikus differenciálegyenletek megoldásának klasszikus módszerei. Ismeretes, hogy a hiperbolikus differenciálegyenletek Cauchy-féle problémájának a megoldásánál, több mint két változó esetén speciális divergencia-nehézségek lépnek fel.

E divergencia-nehézségek lényegét könnyen megérthetjük, ha a potenciálegyenlet megoldásának az analógiájára gondolunk.[30] Legyen u a

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Laplace-féle egyenlet megoldása, mely a tekintetbe vett tartományon és az azt követő S' zárt felületen folytonos és kétszer folytonosan differenciálható, legyen továbbá

$$v=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}},$$

ahol $P(x_0, y_0, z_0)$ az S' felülettel határolt tartomány rögzített belső pontja. Vegyük körül ezt

[30] L. B. B. Baker and E. T. Copson (1950). 7. §.

a P pontot egy kis ε sugarú σ gömbbel, akkor a σ és az S' felületekkel határolt V tartományban

$$\int_V \{u\Delta v - v\Delta u\}\, dV = 0,$$

következésképpen a GREEN-tételből kapjuk, hogy

$$\int_S \left\{ u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right\} dS' + \int_\sigma \left\{ u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\sigma = 0,$$

ahol $\frac{\partial}{\partial n}$ a kifelémutató normális irányba vett differenciálást jelent. Már most a jól ismert módon $\varepsilon \to 0$ határmenettel kapjuk, hogy

$$u(P) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left\{ v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right\} dS'.$$

Ha tehát ismerjük a potenciál értékét a tartományt határoló S' felületen, akkor meghatározhatjuk formulánk segítségével a tartomány bármely belső pontjában is.

Helyettesítsük már most az x és az y változókat az ix és iy változókkal, akkor a háromdimenziós pszeudo-euklidesi metrikához jutunk és a fenti potenciálegyenlet átmegy a hengerhullámok

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

differenciálegyenletébe és

$$v = \frac{1}{\sqrt{(z-z_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}.$$

Természetesen most is érvényes, hogy

$$\int_V \{uL(v) - vL(u)\}\, dV = 0, \tag{1}$$

ha azonban most is alkalmazni akarjuk a GREEN-formulát, hogy $u(P)$ értékét a tartomány határán ismeretes $\bar{u}$ és $\frac{\partial u}{\partial n}$ segítségével meghatározhassuk olyan speciális nehézségek lépnek fel, melyekkel a potenciálelméleti problémánál nem találkozunk:

Így mindenekelőtt láthatjuk, hogy a v függvény csak akkor valós, ha

$$(z-z_0)^2 \geqq (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2.$$

Ennek megfelelően integrációs tartományul válasszuk a térnek az

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - (z-z_0)^2$$

kúppal (fénykúp abban az esetben, ha $z = ct$), valamint az S' felület azon tartományával határolt részét, melyet a fenti kúp az eredeti S' felületből kimetsz.

A GREEN-formula alkalmazásának azonban még így is van akadálya, ugyanis a v függvény a kúpon végtelenné válik, tehát az integrálelőállításban a felületi integrál divergens lesz.

Kétféle klasszikus módszer áll rendelkezésünkre e probléma leküzdésére.

V. VOLTERRA (1894) a v függvényt a z_0 szerinti integráljával helyettesíti:

$$\bar{v} = \int \frac{dz_0}{\sqrt{(z-z_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}} = \cosh^{-1}\left\{ \frac{|z-z_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \right\}$$

az (1) alatti indentitásban. Ennek a függvénynek nincsen szingularitása a kúpon, és csupán a kúp tengelyén válik végtelenné. A kúp tengelyét egy infinitezimális koaxális hengerrel kirekesztjük és így már alkalmazható a GREEN-féle formula. Ezzel a módszerrel VOLTERRA az

$$\int u(x_0 y_0 z_0)\, dz_0$$

számára vezetett le formulát az u és $\frac{\partial u}{\partial n}$ kerületi értékeinek a felhasználásával.

A másik módszert J. HADAMARD (1932) dolgozta ki. Módszerének lényege abban áll, hogy a GREEN-formula alkalmazásakor fellépő divergens integrálnak a *véges részét* határozza meg.[31]

RIESZ MARCEL (1936) kimutatta, hogy mindazok a nehézségek, melyek a HADAMARD-féle módszer alkalmazhatóságát korlátozzák, egyszerűen áthidalhatók, ha egy α komplex paraméter bevezetése után analitikus folytatással választjuk le a divergens integráljaink véges részét.

2) A Rieman—Liouville-féle integrál és annak általánosítása. Az $f(x)$ függvény n-szer megismételt integrálja

$$\int_a^{x_1}\int_a^{x_2}\cdots\int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n\,dx_{n-1}\cdots dx_1$$

áttranszformálható a következő alakra

$$J^{(\alpha)}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\alpha} f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt.$$

Ennek az integrálnak, melyet a klasszikus függvénytanban RIEMANN—LIOUVILLE-féle integrálnak hívunk, értelme van nemcsak $\alpha=n$ egész értékére, hanem, feltéve, hogy $\Re(\alpha)>0$,[32] az α komplex paraméter minden értékére, az $f(x)$-re vonatkozó igen általános folytonossági kikötések mellet. Ha az $f(x)$ függvény történetesen reguláris, akkor $J^{(\alpha)}f(x)$ értelmezhető, analitikus folytatással, $\alpha\leq 0$ esetben is. Speciálisan, ha $f(x)$ folytonos az x pontban

$$J^{(0)}f(x)=f(x)$$

és a $J^{(\alpha)}$ operátor kielégíti a következő alapvető relációkat:

$$J^{(\alpha)}J^{(\beta)}=J^{(\alpha+\beta)};\quad \frac{d}{dx}J^{(\alpha+1)}=J^{(\alpha)}.$$

RIESZ MARCEL (1936, 1948) általánosította a RIEMANN—LIOUVILLE-féle integrált[33] az m-dimenziós pszeudo-euklidesi térre:

$$J^{(\alpha)}f(P)=\frac{1}{H_m(\alpha)}\int_{D_S^P} f(Q)\,r_{PQ}^{\alpha-m}\,dQ, \tag{2}$$

ahol

$$H_m(\alpha)=2^{\alpha-1}\pi^{\frac{\alpha-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right).$$

A D_S^P tartomány az m-dimenziós térnek az a része, melyet a P tartójú fénykúp és a S' térszerű felület megfelelő tartománya[34] határol.

[31] L. R. COURANT und D. HILBERT (1937). 438 old.

[32] $\Re(\alpha)$ az α reális részének a rövidítése.

[33] A soron következő referátumot FREMBERG (1946) munkája alapján állítottam össze, hol az idézett tételek bizonyításai is megtalálhatók.

[34] Ugyanúgy mint azt az 1. §-ban $m=4$ esetén részleteztük.

Minthogy a fénykúpon $r_{PQ}^2=0$, a (2) integrál általában csak $\alpha > m-2$ esetben lesz konvergens. Ha azonban az $f(P)$ függvény és az S' felület, az alábbiakban pontosabban körvonalazott módon reguláris, akkor $I^{(\alpha)}f(P)$ analitikus folytatással $\alpha < m-2$ esetére is értelmezhető és érvényesek az alábbi alapvető formulák

(3) $$I^{(0)}f(P)=f(P)$$

valamint

(4) $$I^{(\alpha)}I^{(\beta)}=I^{(\alpha+\beta)}$$

és

(5) $$\Box I^{(\alpha+2)}=I^{(\alpha)}$$

3) A hullámegyenlet Riesz-féle megoldása. A hullámegyenlettel kapcsolatos CAUCHY-féle probléma megoldásánál már most a következőképpen járhatunk el:

Tekintsük a

(6) $$v=\frac{r_{PQ}^{\alpha+2-m}}{H_m(\alpha+2)}$$

függvényt, mely valahányszor $\alpha > m$ folytonos és eltűnik a tartományunkat határoló fénykúpon első differenciálhányadosával együtt. Minthogy tehát

$$\Box v=\frac{r_{PQ}^{\alpha-m}}{H_m(\alpha)}$$

írhatjuk, hogy

(7) $$I^{(\alpha)}f(P)=\frac{1}{H_m(\alpha+2)}\int_{D_S^P}\Box u(Q)r_{PQ}^{\alpha+2-m}\,dQ+$$
$$+\frac{1}{H_m(\alpha+2)}\int_{S^P}\left\{\frac{\partial u(Q)}{\partial n}r_{PQ}^{\alpha+2-m}-u(Q)\frac{\partial r_{PQ}^{\alpha+2-m}}{\partial n}\right\}dS.$$

Vezessük be az

$$I^{*(\alpha)}\{g,f,h\}(P)=\frac{1}{H_m(\alpha)}\int_{D_S^P}f(Q)r_{PQ}^{\alpha-m}\,dQ+$$
$$+\frac{1}{H_m(\alpha)}\int_{S^P}\left\{g(Q)r_{PQ}^{\alpha-m}-h(Q)\frac{\partial r_{PQ}^{\alpha-m}}{\partial n}\right\}dS'$$

jelölést, akkor kimutatható, hogy az $I^{*(\alpha)}$ operátor is kielégíti a (4) és (5) alatti relációkat és analitikus folytatással kimutatható, hogy

$$I^{*(0)}\{f,g,h)(P)=f(P).$$

Legyen a megoldandó hullámegyenlet

$$\Box u=f.$$

Az u függvény az S' felületen legyen g és $\frac{\partial u}{\partial n}$ legyen h (előre megadott kezdeti értékek). Akkor a probléma RIESZ-potenciálja

$$I^{(\alpha)}u(P)=I^{*(\alpha-2)}\left\{\Box u,\frac{\partial u}{\partial n},u\right\}(P)$$

és analitikus folytatással kapjuk, $\alpha = 0$ esetben, hogy

$$u(P) = I^{(0)} u(P) = I^{*(2)} \left\{ \Box u, \frac{\partial u}{\partial n}, u \right\} (P),$$

ami a hullámegyenlet keresett megoldását állítja elő.

Az

$$U^{(\alpha)}(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{D_S^P} f(Q) r_{PQ}^{\alpha-m} \, dQ$$

$$v^{(\alpha)}(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{S^P} g(Q) r_{PQ}^{\alpha-m} \, dS'$$

$$W^{(\alpha)}(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{S^P} h(Q) \frac{\partial r_{PQ}^{\alpha-m}}{\partial n} \, dS'$$

integrálokat rendre az $f(Q)$ térfogati, $g(Q)$ felületi és $h(Q)$ kettősréteg-eloszlás RIESZ-féle potenciáljának nevezzük.

4) Világvonal mentén eloszlott töltéssűrűség potenciálja. Az elektronelméleti alkalmazások során különösen fontos az a speciális eset, amikor a töltéseloszlás a térben egy görbére korlátozódik. Ezt a töltéseloszlást heurisztikusan egy $f_n(P)$ térbeli töltéseloszlas határesetének tekinthetjük. Tegyük fel, hogy bármely, az adott görbét nem tartalmazó, tartományban egyenletesen teljesül, hogy

$$\lim_{n \to \infty} f_n(P) = 0$$

azonban, ha a D tartomány az L görbét is tartalmazza, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{D} f_n(Q) dQ = \int\limits_{Q_1}^{Q_2} F(t) \, dt$$

ahol Q_1 és Q_2 a tartománynak és az L görbének a két metszéspontja, $F(t)$ pedig a görbén értelmezett sűrűségeloszlás.

Hogy a fizikai alkalmazásokhoz minél jobban alkalmazkodjunk, tegyük fel, hogy a $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ görbe, mely mentén az $F(t)$ töltéseloszlást, (mely folytonos és megfelelően sokszor folytonosan differenciálható függvénye a t paraméternek) értelmeztük időszerű, tehát

$$\left(\frac{d\mathbf{z}}{dt}\right)^2 = \mathbf{u}^2 > 0.$$

Tegyük továbbá még azt is fel, hogy

$$\frac{dz^0}{dt} > 0,$$

amivel azt biztosítsuk, hogy a görbe befutása a t paraméter változásával egyirányú.

Ezek előrebocsátása után a $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ világvonal mentén értelmezett $F(t)$ töltéssűrűség RIESZ-potenciálját a következőképpen adhatjuk meg

$$\Lambda^{(\alpha)}(P) = \int\limits_{Q_S}^{Q_{\mathrm{ret}}} F(t) r_{PQ}^{\alpha-m} \, dt, \tag{8}$$

ahol Q_S az a pont, ahol a görbe az S^P felületet metszi, Q_{ret} pedig a görbének a $P(\mathbf{x})$ ponthoz retardált pontja, melyet az

$$\{\mathbf{x}-\mathbf{z}(t_0)\}^2=0$$

egyenletből határozunk meg.

Ha a $P(\mathbf{x})$ pont nem fekszik a görbén, akkor $\Lambda^{(\alpha)}(P)$ az $\alpha>2$ esetben konvergens integrál és analitikus folytatással $\alpha\geq 2$ esetre is értelmezhető.

Az

$$R=r^2=r_{PQ}^2$$

definícióval vezessünk be új változót.

Tekintsük továbbá a következőkben az $\mathbf{x}$ és az R változókat függetleneknek. Ez azért lehetséges, mert az $\mathbf{x}$ és az R, valamint a t és az R változók között egyértelmű megfeleltetés lehetséges, melyet az alkalmazás során részleteztünk.

Az új változó bevezetésével írhatjuk, hogy

$$\Lambda^{(\alpha)}(P)=\frac{1}{H_m(\alpha)}\int\limits_L F(t)\frac{\partial t}{\partial R}R^{\frac{\alpha-m}{2}}dR. \tag{9}$$

Bevezetve továbbá a

$$c(\alpha)=\frac{1}{2^{\alpha-1}\pi^{\frac{m-2}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{10}$$

faktort $\Lambda^{(\alpha)}(P)$ a következő alakba írható

$$\Lambda^{(\alpha)}(P)=\frac{c(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-m+2}{2}\right)}\int\limits_L F(t)\frac{\partial t}{\partial R}R^{\frac{\alpha-m}{2}}dR.$$

Ebből parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\Lambda^{(\alpha)}(P)=\frac{c(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-m+4}{2}\right)}\left[F(t)\frac{\partial}{\partial R}\left\{R^{\frac{\alpha-m+2}{2}}\right\}\right]_{Q_S}^{Q_{\mathrm{ret}}}-$$
$$-\frac{c(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-m+4}{2}\right)}\int\limits_L\frac{\partial}{\partial R}\left\{F(t)\frac{\partial t}{\partial R}\right\}R^{\frac{\alpha-m+2}{2}}dR,$$

ahol a kiintegrált rész a felsőhatáron eltűnik, valahányszor $\alpha>m-2$. Az integrál $\alpha>m-4$ esetben konvergens, így formulánk megadja $\Lambda^{(\alpha)}(P)$ analitikus folytatását, valahányszor $\alpha>m-4$.

Ismételt parciális integrációval az N-ik lépés után kapjuk:

$$\begin{aligned}\Lambda^{(\alpha)}(P)&=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(-1)^{i+1}c(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-m+2}{2}+N\right)}\left\{\frac{\partial^i}{\partial R^i}\left(F(t)\frac{\partial t}{\partial R}\right)R^{\frac{\alpha-m+2}{2}+i}\right\}_{Q_S}+\\&+\frac{(-1)^N c(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-m+2}{2}+N\right)}\int\limits_L\frac{\partial^N}{\partial R^N}\left(F(t)\frac{\partial t}{\partial R}\right)R^{\frac{\alpha-m}{2}+N}dR.\end{aligned} \tag{11}$$

Definíció: Az $f(\beta,k_i)$ függvény az $A_\beta[\beta\geq b,E(k_i)]$ függvényosztályba tartozik, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

a) Az $f(\beta,k_i)$ egyértékű és folytonos függvény, valahányszor $\beta\geq b$ és k_i eleme az $E(k_i)$ tartománynak.

b) Az $f(\beta, k_i)$ az $E(k_i)$ tartomány minden $\{k_i\}$ pontjában analitikus holomorf függvény, valahányszor $\beta > b$.

Tétel: Valahányszor a $g(\beta, t, k_i)$ függvény az $A_\beta[\beta \geq 0,\ 0 \leq t \leq T, E(k_i)]$ függvényosztályba tartozik a

$$G(\beta, k_i) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^T g(\beta, t, k_i)\, t^{\beta-1}\, dt$$

függvény eleme az $A_\beta[\beta \geq 0, E(k_i)]$ függvényosztálynak és

$$G(0, k_i) = g(0, 0, k_i).$$

A tétel a segédtételünk közvetlen folyamánya.

Visszatérve már most a (11) alatti formulánkhoz tegyük fel, hogy az $F(t)$ és a $\mathbf{z}(t)$ elemei a $C_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}$ ill. a $C_{\left[\frac{m+1}{2}\right]}$ függvényosztályoknak, tehát $\left[\frac{m-1}{2}\right]$ ill. $\left[\frac{m+1}{2}\right]$-szer folytonosan differenciálhatók[35], akkor $N = \left[\frac{m-1}{2}\right]$ esetben (11) megadja $\Lambda^{(\alpha)}(P)$ analitikus folytatását, valahányszor $\alpha > 0$. Ha m páratlan, akkor a (11) alatti formulában szereplő integrál konvergens $\alpha = 0$ esetben, ha pedig páros, úgy alkalmazható a fenti tétel. Következésképpen $\Lambda^{(\alpha)}(P)$ eleme az $A\alpha[\alpha \geq 0, E(\mathbf{x})]$ függvényosztálynak. Minthogy továbbá $c(0) = 0$

$$\Lambda^{(0)}(P) = 0$$

ha a P pont nem pontja a görbénknek.

Bennünket a továbbiakban csak $\Lambda^{(2)}(P)$ érdekel. Legyen tehát a (11) alatti formulában $N = \left[\frac{m-3}{2}\right]$ akkor. (11) ellőállítja $\Lambda^{(\alpha)}(P)$-t $\alpha > 2$ esetben. Ha m páratlan, úgy a (11) alatti integrál konvergens $\alpha = 2$ esetben is, tehát $\Lambda^{(2)}(P)$ közvetlenül kiszámítható, ha F és $\mathbf{z}$, valamint a differenciálhányadosaik ismeretesek a Q_S pontban.

Ha m páros (ami bennünket is közelebbről érdekel) a (11) alatti összegezés a Γ faktorok következtében tagonként eltűnik, az integrál pedig segédtételünk alapján

$$\Lambda^{(\alpha)}(P) = \frac{(-1)^{N+1}}{2\pi^{N+1}} \left\{ \frac{\partial^N}{\partial R^N} \left(F(t) \frac{\partial t}{\partial R} \right) \right\}_{Q_{\text{ret}}}.$$

Minthogy

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial (r^2)}{\partial t} = -2(\mathbf{r}, \mathbf{u})$$

kapjuk, hogy

$$\frac{\partial t}{\partial R} = -\frac{1}{2(\mathbf{r}, \mathbf{u})}.$$

Következésképpen

$$\Lambda^{(\alpha)}(P) = \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+2} \pi^{N+1}} \left\{ \left(\frac{1}{(\mathbf{v}, \mathbf{u})} \frac{\partial}{\partial t} \right)^N \frac{F(t)}{(\mathbf{v}, \mathbf{u})} \right\}_{Q_{\text{ret}}}. \tag{12}$$

Ez a formula szolgáltatja $m = 4$ esetben, az elektronelméleti alkalmazás során a Lienard—Wiechert-féle potenciálokat.

5) A sugárzási probléma. Foglalkozzunk végül még egy exisztenciális jellegű kérdéssel. Az előzőkben említettük, hogy a görbe menti töltéseloszlás egy $f_n(P)$ térbeli eloszlás határ-

[35] $[x]$ az x egész részét jelenti.

esetének tekinthető. Legyen már most az $f_n(P)$ térbeli töltéseloszláshoz tartozó RIESZ-potenciál $U_n^{(\alpha)}(P)$, akkor (5) alapján

$$\Box U_n^{(\alpha)}(P) = U_n^{(\alpha-2)}(P)$$

és analitikus folytatással $\alpha = 2$ esetre kapjuk, hogy

$$U_n^{(0)}(P) = f_n(P).$$

Bizonyítás nélkül hivatkozom arra, hogy érvényes a következő formális számítás

$$\lim_{n\to\infty} \int_D f_n(Q)\,dQ = \lim_{n\to\infty} \left\{ \underset{\alpha\to 2}{\text{anal. folyt.}} \int_D U_n^{(\alpha-2)}(Q)\,dQ \right\} =$$

$$= \underset{\alpha\to 2}{\text{anal. folyt.}} \left\{ \lim_{n\to\infty} \int_D U_n^{(\alpha-2)}(Q)\,dQ \right\}.$$

Minthogy azonban definícióknak megfelelően

$$\lim_{n\to\infty} U_n^{(\alpha)}(P) = A^{(\alpha)}(P),$$

kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_D f_n(Q)\,dQ = \underset{\alpha\to 2}{\text{anal. folyt.}} \left\{ \int_D A^{(\alpha-2)}(Q)\,dQ \right\},$$

következésképpen

$$\underset{\alpha\to 2}{\text{anal. folyt.}} \left\{ \int A^{(\alpha-2)}(Q)\,dQ \right\} = \int_{Q_1}^{Q_2} F(t)\,dt. \tag{13}$$

Eredményünk a következőképpen értelmezhető: A görbénket vegyük körül egy időszerű pontokból álló infinitezimális koaxális henger felülettel, melyet a két végén egy-egy a Q_1 és Q_2 pontokon átmenő térszerű felülettel lezárunk. Alkalmazzuk erre a hengeres tartományra az

$$\int_D \Box \Phi\,dQ = -\int_\Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n}\,d\Sigma$$

GAUSS-tételt, akkor

$$\int_D A^{(\alpha-2)}(Q)\,dQ = \int_D \Box A^{(\alpha)}(Q)\,dQ = -\int_\Sigma \frac{\partial A^{(\alpha)}(Q)}{\partial n}\,d\Sigma,$$

következésképpen

$$-\int_\Sigma \frac{\partial A^{(\alpha)}(P)}{\partial n}\,d\Sigma = \int_{Q_1}^{Q_2} F(t)\,dt.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az $F(t)$ függvénynek a világvonal mentén a Q_1 és a Q_2 pontok között vett vonalmenti integrálja megadja a potenciál fluxusát, tehát a fizikai értelemben vett sugárzást, a görbénket körülvevő infinitezimális hengeren át.

6) Egyszerű alkalmazás a klasszikus elektromágneses tér esetében. Az elektromágneses potenciálok alapegyenlete

$$\Box \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{s}.$$

Az s-ről feltételezzük, hogy reguláris, az A-tól pedig megköveteljük, hogy $x^0 \to -\infty$ esetben első differenciálhányadosaival együtt eltűnjék.

A tér Riesz-potenciálja az előzőek alapján

$$A^{(\alpha)}(P) = -\frac{4\pi}{H_4(\alpha)} \int\limits_{D^P_{-\infty}} s(Q) r_{PQ}^{\alpha-4} dQ.$$

Vezessünk be új változókat

$$\{(x^i - z^i)(x_i - z_i)\}^{1/2} = \varrho,$$

ahol a latin indexek az 1, 2, 3, értékeket vehetik fel, tehát ϱ a térbeli távolság;

$$r_{PQ}^2 = R \qquad z^i - x^i = \xi^i$$

$$z^0 = x^0 - (R + \varrho^2)^{1/2}$$

$$dQ = dz^0 dz^1 dz^2 dz^3 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{R + \varrho^2}} dR\, d\xi$$

akkor kapjuk, hogy

$$A^{(\alpha)}(P) = \frac{\alpha - 2}{2^{\alpha-2} \left\{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}^2} \int\limits_0^\infty R^{\frac{\alpha-4}{2}} \iiint\limits_V \frac{s(x^0 - \sqrt{R+\varrho^2}, \xi^i)}{\sqrt{R+\varrho^2}} d\xi \cdot dR.$$

A (10, 2) alatti formulánkat alkalmazva kapjuk, hogy

$$A(P) = \iiint\limits_V \frac{s(x^0 - \varrho, \xi^i)}{\varrho} d\xi,$$

ami viszont éppen a klasszikus elektrodinamikából jólismert retardált potenciál.

Szegedi Tudományegyetem
Elméleti Fizikai Intézet.

IRODALOM

Baker, B. B. and E. T. Copson, 1950, *The mathematical theory of* Huygens' *principle,* Oxford.
Bhabha, H. J. and H. C. Corben, 1941, Proc. Roy. Soc. London. A. **178**. 273.
Courant, R. und D. Hilbert, 1937, *Methoden der math. Physik.* Bd. 2.
Dirac, P. A. M. 1938, Proc. Roy. Soc. London. A. **167**. 148.
Fokker, A. D. 1929, Zs. f. Phys. **58**. 386.
Fremberg, N. E. 1946, *A study of generalized hyperbolic potentials.* Medd. Lunds. Univ. Math. Sem. Bd. 7. Lund.
Frenkel, J. I. 1926, Zs. f. Phys. **37**. 243.
Harish—Chandra. 1946, Proc. Roy. Soc. London. A. **185**. 267.
Horváth, J. I. und A. Moór, 1952, Zs. f. Phys. **131**. 544.
Kramers, H. A. 1938, *Handbuch der Chem. Phys.* Bd. 1. Leipzig.
Lattes, C. M., M. Schönberg and W. Schützer, 1947, An. da Acad. Brasileira de Cienc. **19**. 193.
Lorentz, H. A. 1916, *Theory of the electron.* Leipzig.
MacManus, H. 1949, Proc. Roy. Soc. London. A. **195**. 323.
Majumdar, R. C. and S. Gupta, 1949, Phys. Rev. **75**. 1788.

MARX, G. 1952, Acta Physica Acad. Scient. Hung. **2**. 67.
MIE, G. 1912, Ann. d. Phys. **37**. 511; **39**. 1; 1913, ibid. **40**. 1.
PAULI, W. 1921. *Relativitätstheorie*. (*Enzykl. d. math. Wissensch.* Bd. 5.) Leipzig.
RIESZ, M. 1936, Comptes Rendus du Congr. internat. Les math. Oslo. Vol. II. 44. 1948, Acta Math. **81**. 1.
SCHOUTEN, J. A. 1924, *Der Ricci-kalkül.* Berlin.
TETRODE, H. 1922. Zs. f. Phys. **10**. 317.
THIRRING, H. 1927, *Elektrodynamik bewegter körpen.* (H. GEIGER—K. SCHEEL: *Handb. d. Phys.* Bd. 12). Berlin.
WENTZEL, G. 1949, *Quantum theory of fields.* New York.
WEYL, H. 1918, *Raum, Zeit, Materie,* Berlin.

MEGJEGYZÉSEK A GYENGÉN-KOMPLEMENTUMOS HÁLÓKRÓL*

SZÁSZ GÁBOR

1. §. Bevezetés

Ismeretes [1], hogy legkisebb elemmel rendelkező hálók bármely kongruenciarelációjában, a gyűrűk esetéhez hasonlóan, a legkisebb elemmel kongruens elemek a hálónak egy ideálját alkotják, melyet a *kongruenciareláció magjá*nak nevezünk. Azonban, míg gyűrűkben minden egyes kongruenciarelációt egyértelműen meghatároz a magja, addig legkisebb elemmel rendelkező hálók esetén hasonló állítás általában nem érvényes.

Egyes speciális esetekben azonban, például komplementumos disztributív hálók (azaz Boole-algebrák) esetén ugyanaz a helyzet, mint a gyűrűknél: ha a háló minden egyes kongruenciarelációjához hozzárendeljük a kongruenciareláció magját, akkor a háló összes kongruenciarelációi és összes ideáljai közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleléshez jutunk. Ez a tény egyszerű következménye annak a STONE-tól származó eredménynek [2], hogy a Boole-algebrák és az egységelemes idempotens gyűrűk kölcsönösen egyértelmű megfelelésbe hozhatók egymással, de ettől függetlenül, tisztán hálóelméleti úton is kimutatható [3].

A fenti eredmények nyomán G. BIRKHOFF azt az igen érdekes problémát vetette fel [4], mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy legkisebb elemmel rendelkező hálóra nézve a kongruenciarelációk és az ideálok között a komplementumos disztributív hálóknál tapasztalt kölcsönösen egyértelmű megfelelés fennálljon. Ez a probléma, teljes általánosságban tekintve, még megoldatlan; disztributív hálókra nézve azonban ARESKIN nemrég megoldotta. Mégpedig kimutatta [5], hogy *legkisebb elemmel rendelkező disztributív L hálóra nézve a kongruenciarelációknak és az ideáloknak — mint a kongruenciarelációk magjának — kölcsönösen egyértelmű hozzárendelése akkor és csak akkor áll fenn, ha minden egyes K kongruenciareláció esetén az L/K faktorháló*** *gyengén-komplementumos* a következő, szintén általa bevezetett értelemben:

* A hálóelmélet alapfogalmaira és a jelölésmódra vonatkozólag l. G. BIRKHOFF [1].

** Egy L háló valamely K kongruenciarelációja esetén az L-nek mod K tekintett maradékosztályai ismét egy hálót adnak, amely az L-nek homomorf képe; ezt az L háló K szerinti faktorhálójának nevezzük, s L/K-val jelöljük.

1. DEFINÍCIÓ. *Egy O legkisebb elemmel rendelkező L hálót gyengén-komplementumosnak nevezünk, ha L minden egyes u, v $(u \neq v)$ elempárjához található olyan $x(\in L)$, hogy*

$$x \cap (u \cap v) = O, \quad x \cap (u \cup v) > O.$$

ARESKIN igen értékes és mély eredményének egyetlen szépséghibája, hogy a gyengén-komplementumos hálók definíciója nem elég egyszerű. E rövid dolgozat egyik célja éppen az, hogy áttekinthetőbb definíciót adjon a gyengén-komplementumos hálókra, a szerző által régebben bevezetett félkomplementum segítségével. Továbbá, az Areskin-féle eredmény szerint a gyengén-komplementumos hálók a legkisebb elemmel rendelkező hálók osztályának igen fontos alosztályát képezik, s úgy hiszem, hogy csak a dolgozat megjelenése óta eltelt rövid idővel magyarázható, hogy a gyengén-komplementumos hálók tulajdonságait vizsgáló dolgozat még nem jelent meg. Jelen dolgozatnak éppen az a másik célja, hogy ilyen természetű kérdéseket tárgyaljon; részletesebben, a dolgozat utolsó részében a gyengén-komplementumos hálóknak a komplementumos, relatív komplementumos és félkomplementumos hálókkal való logikai kapcsolatait vizsgáljuk.

2. §. A gyengén-komplementumos hálók egyszerű jellemzése

A félkomplementum fogalmának jelen dolgozatunkban való felhasználásával kapcsolatban megragadjuk az alkalmat, hogy az eredetileg adott definíción [6] egy apró, de igen hasznos módosítást hajtsunk végre, s a félkomplementumot a következőképpen definiáljuk:

2. DEFINÍCIÓ. *Egy O legkisebb elemmel rendelkező L háló valamely x elemének félkomplementumán értjük az L minden olyan y elemét, amelyre $x \cap y = O$. Az x-nek O-tól különböző félkomplementumait valódi félkomplementumoknak nevezzük.**

Ennek megfelelően a „félkomplementumos hálók" (tartalmilag változatlan) definícióját a következőképpen fogalmazzuk meg:

3. DEFINÍCIÓ. *Valamely legkisebb elemmel rendelkező hálót félkomplementumosnak nevezünk, ha a háló minden egyes — az esetleg létező legnagyobb elemtől különböző — elemének van valódi félkomplementuma.*

Ezek után a gyengén-komplementumos hálókat a következőképpen jellemezhetjük:

* Régebbi definíciónkkal szemben tehát azt a változtatást tettük, hogy minden elem triviális félkomplementumának tekintjük az O elemet. E változtatás célszerűségét mutatja többek között az, hogy az új definícióval érvényes a következő két könnyen belátható állítás: Ha y az x-nek félkomplementuma, akkor minden olyan z elem is, amelyre $z \leq y$; legkisebb elemes disztributív háló esetén pedig bármely x elem összes félkomplementumai ideált alkotnak.

1. TÉTEL. *Az O legkisebb elemmel rendelkező L háló akkor és csak akkor gyengén-komplementumos, ha az L minden u, v ($u < v$) elempárja esetén az u-nak van olyan x félkomplementuma, amely v-nek már nem félkomplementuma* (azaz, van olyan x, amelyre $u \cap x = O$, $v \cap x > O$).

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel először, hogy L gyengén-komplementumos, s tekintsük L valamely u, v ($u < v$) elempárját. Az 1. definíció szerint, található olyan $x(\in L)$, amelyre

$$x \cap (u \cap v) = O, \quad x \cap (u \cup v) > O,$$

azaz, $u < v$ miatt,

$$x \cap u = O, \quad x \cap v > O.$$

Vagyis, találtunk olyan x elemet L-ben, amely u-nak félkomplementuma, v-nek viszont nem; eszerint a tételben szereplő feltétel szükséges.

Fordítva, tegyük fel, hogy L-nek van egy O legkisebb eleme, és eleget tesz a tételben szereplő feltételnek. Legyen u, v az L tetszés szerinti olyan elempárja, amelyre $u < v$. De akkor $u \cap v < u \cup v$, s így a feltevésünk szerint az $u \cap v$ elemnek van olyan félkomplementuma L-ben, amely $u \cup v$-nek nem félkomplementuma, azaz, amelyre

$$x \cap (u \cap v) = O$$
$$x \cap (u \cup v) > O$$

érvényes. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy L gyengén-komplementumos. Ezzel a feltétel elegendőségét is kimutattuk.

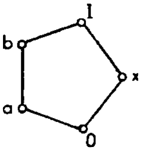
A most bebizonyított tétel szerint az 1. definícióval ekvivalens a következő:

4. DEFINÍCIÓ. *Egy O legkisebb elemmel rendelkező L hálót gyengén-komplementumosnak nevezünk, ha az L bármely olyan u, v elempárjához, ahol $u < v$, található u-nak olyan félkomplementuma, amely v-nek nem félkomplementuma.*

A továbbiakban mindig ezt a definíciót tartjuk szem előtt.

3. §. A gyengén-komplementumos hálók kapcsolata a komplementumos, relatív komplementumos és félkomplementumos hálókkal

Könnyű látni, hogy a gyengén-komplementumosság a komplementumosságtól független tulajdonság: *a komplementumosság sem nem elegendő, sem nem szükséges a gyengén-komplementumossághoz.* Előbbit az

(1) 

diagrammal megadott komplementumos háló mutatja, amelyben az a elem félkomplementumai (azaz az O és x elemek) az a-nál nagyobb b-nek is félkomplementumai, tehát (1) nem gyengén-komplementumos. Utóbbival kapcsolatban elegendő pl. utalni arra, hogy léteznek legnagyobb elemmel nem rendelkező (s így szükségképpen nem-komplementumos) gyengén-komplementumos hálók, például a négyzetmentes pozitív egészek oszthatóság szerint rendezett hálója*.

Egészen más a helyzet a relatív komplementumos hálók esetében:

2. TÉTEL. *Minden olyan relatív komplementumos háló, amelynek van legkisebb eleme, gyengén-komplementumos.*

KÖVETKEZMÉNY. Ha egy komplementumos háló moduláris, akkor gyengén-komplementumos is.

BIZONYÍTÁS. Legyen L a feltételeknek eleget tevő háló, O legkisebb elemmel, a és b pedig az L két tetszés szerinti olyan eleme, amelyre $a < b$ érvényes. Jelöljük x-szel az a-nak $[O, b]$-re vonatkozó (valamely) relatív komplementumát. Akkor a relatív komplementum definíciója folytán

(2) $$O \leqq x \leqq b,$$

(3) $$x \cap a = O,$$

(4) $$x \cup a = b.$$

A (2)-ből azonnal következik

(5) $$x \cap b = x.$$

Mivel (3) szerint x az a-nak félkomplementuma, ezért (5) szerint elegendő kimutatni, hogy $x \neq O$. Ez azonban, $a \neq b$ miatt, azonnal következik (4)-ből.

A következmény állításának bizonyításával kapcsolatban elegendő arra a jól ismert tényre utalnunk, hogy minden komplementumos moduláris háló relatív komplementumos [7]; ebből ugyanis most bebizonyított tételünk miatt azonnal adódik a következmény állítása.

A következmény állítására azonban igen egyszerű közvetlen bizonyítás is adható. Legyen L a mondott feltételeknek eleget tevő háló, a és b pedig az L-nek két olyan eleme, amelyre $a < b$ áll. A háló legkisebb elemét jelöljük ismét O-val, legnagyobb elemét pedig I-vel. Tekintsük az a elem valamely x komplementumát; a komplementum definíciója szerint fennállnak az

(6) $$a \cap x = O, \quad a \cup x = I$$

* Ebben a hálóban ugyanis, mint ismeretes, a $\cap$-nek a legnagyobb közös osztó, az $\cup$-nek a legkisebb közös többszörös képzése, az O-elemnek pedig az 1 egész szám felel meg; márpedig, ha a és b négyzetmentes számok és b az a-nak többszöröse, akkor b-nek van olyan prímtényezője, amely a-hoz relatív prím. Ezen a tényen különben az sem változtat, ha a 0 számot is hozzávesszük a hálóhoz, amely, mint minden szám többszöröse, a háló legnagyobb eleme lesz.

egyenletek. A 4. definíció szerint elegendő kimutatnunk, hogy

$$b \cap x > O.$$

Ez pedig azonnal következik abból, hogy $b > a$ miatt

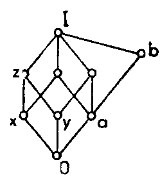
$$b \cup x \geqq a \cup x = I,$$

azaz

$$b \cup x = I; \tag{7}$$

ha ugyanis $b \cap x = O$ lenne, akkor $a < b$, valamint (6) és (7) szerint az O, a, b, x, I elemek egy (1) szerinti részhálót alkotnának L-ben. Mivel azonban egyetlen moduláris hálónak sem lehet ilyen részhálója [8], ezért valóban $b \cap x > O$.

Ezzel szemben, félig-moduláris komplementumos háló nem feltétlenül gyengén-komplementumos. Ezt mutatja például a



háló, amelyben az a és b elem összes félkomplementumai egyaránt az O, x, y, z elemek.

Végül kimutatjuk a következő, igen egyszerűen adódó tételt:

3. TÉTEL. *Minden gyengén-komplementumos háló félkomplementumos.*

BIZONYÍTÁS. Legyen ugyanis L gyengén-komplementumos háló, O legkisebb elemmel. Nyilvánvaló, hogy az L bármely olyan a eleméhez, amely különbözik a háló esetleg létező legnagyobb elemétől, található olyan $b(\in L)$, amelyre $a < b$. De akkor, mivel L gyengén-komplementumos, van olyan $x(\in L)$, amelyre

$$a \cap x = O, \quad b \cap x > O.$$

Utóbbi miatt $x \neq O$, tehát x az a-nak valódi félkomplementuma; ez pedig a 3. definíció szerint éppen azt jelenti, hogy az L háló félkomplementumos.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete.

IRODALOM

[1] G. Birkhoff, Lattice theory, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, **25**, revised edition, New York, 1948, 21.

[2] M. H. Stone, Subsumption of Boolean algebras under the theory of rings, *Proc. Nat. Acad. Sci.* U. S. A., **21** (1935), 103—105.

[3] G. Birkhoff, id. mű, 159.

[4] G. Birkhoff, id. mű, 73. probléma, 161.

[5] Г. Я. Арещкин, Об отношениях конгруенции в дистрибутивных структурах с нулевым элементом, Доклады Акад. Наук СССР, **90** (1953), 485-486.

[6] G. Szász, Dense and semi-complemented lattices, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (3), **1** (1953), 42—44.

[7] J. Neumann, Continuous geometry, Princeton, 1936. Az idézett tétel a mű 7. oldalán található. (Vagy pedig: G. Birkhoff, id. mű, 114. o.)

8] G. Birkhoff, id. mű, 66. o., 2. tétel.

FOURIER-SOROK ERŐS SZUMMÁCIÓJÁRÓL

TANDORI KÁROLY

Bemutatta Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag az 1955. április 29-én tartott felolvasó ülésen

1. §. Bevezetés

Az $f(x) \in L[0, 2\pi]$ függvény

$$\mathfrak{S}(f) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourier-sorát az x_0 pontban r-edrendben erősen szummálhatónak, vagy egyszerűbben H_r-szummálhatónak nevezzük, ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(f; x_0) - f(x_0)|^r = 0,$$

ahol $s_\nu(f; x)$ jelöli a $\mathfrak{S}(f)$ sor ν-edik részletösszegét.

G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD [2] bebizonyították, hogy ha $f(x) \in L^p[0, 2\pi]$ $(p > 1)$, akkor $\mathfrak{S}(f)$ az $f(x)$ függvény bármely p-edrendű Lebesgue-pontjában minden pozitív r rendben erősen szummálható. A $p = 1$ esetben ennek a tételnek érvényessége sokáig kétséges volt, míg G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD [3] példát adtak olyan integrálható függvényre, amelynek az $x = 0$ pontban Lebesgue-pontja van, mégis Fourier-sora az $x = 0$ pontban nem H_1-szummálható; egyúttal felvetették a következő problémát: igaz-e, hogy integrálható függvény Fourier-sora valamilyen pozitív rendben majdnem mindenütt erősen szummálható. Ezt a problémát J. MARCINKIEWICZ [4] oldotta meg; megmutatta, hogy integrálható függvény Fourier-sora majdnem mindenütt H_2-szummálható. Később A. ZYGMUND [5] bebizonyította, hogy integrálható függvény Fourier-sora bármely pozitív r rendben majdnem mindenütt erősen szummálható.

Mivel G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD említett példája szerint integrálható függvény Fourier-sora a függvény valamely Lebesgue-pontjában nem szükségképpen H_1-szummálható és így annál inkább nem H_2-szummálható, ezért felvetődik az a kérdés, hogy megadható-e olyan, aránylag egyszerű analitikus reláció, amely majdnem mindenütt teljesül és amelynek egy x_0 pontban való teljesüléséből következik a függvény Fourier-sorának az x_0 pontban való H_2-szummálhatósága. Ezzel a kérdéssel foglalkozunk ebben a dolgozatban. A H_{2m}-szummálhatóság kérdése (m természetes szám) hasonlóan tárgyalható, mégis az egyszerűbb számolás kedvéért a H_2-szummáció esetére szorítkozunk.

2. §. Tételek integrálható függvényekre

1. TÉTEL. *Ha $f(t)$ 1-periódusú függvény és $f(t) \in L[0,1]$, akkor $[0,1]$-en majdnem mindenütt $k(>0)$-ban egyenletesen*

$$(1) \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3+hk} \int_{-h}^{h} |f(x+u)-f(x)|\, du \int_{u-k}^{u+k} |f(x+v)-f(x)|\, dv = 0 \qquad (h>0).$$

A tétel bizonyítására felhasználjuk J. MARCINKIEWICZ (lásd pl. [4]) következő két lemmáját.

1. LEMMA. *Ha az $f^*(t) \in L[0,1]$ függvény egy $E(\subseteq[0,1])$ mérhető halmazon 0-val egyenlő, akkor minden $\eta>0$ számhoz van olyan $F\subseteq E$ perfekt halmaz és olyan M pozitív szám, hogy*

$$\operatorname{mes} F \geqq \operatorname{mes} E - \eta,$$

$$\int_{-k}^{k} |f^*(x+v)|\, dv \leqq Mk \qquad (x\in F)$$

és

$$\int_{I_\nu} |f^*(v)|\, dv \leqq M \operatorname{mes} I_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots),$$

ahol I_ν-k jelölik az F halmaznak a $(0,1)$ intervallumban levő komplementer-intervallumait.

2. LEMMA. *Legyen $F\subseteq[0,1]$ perfekt halmaz és legyenek I_ν $(\nu=1,2,\ldots)$ F-nek a $(0,1)$ intervallumban lévő komplementer-intervallumai. Ha a $\Phi(t)$ 1-periódusú függvény az F halmazon 0-val egyenlő és $\Phi(t)=\operatorname{mes} I_\nu$, ha $t\in I_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$, akkor a $[0,1]$ intervallum majdnem minden x pontjában*

$$\int_0^1 \frac{\Phi(x+t)}{t^2}\, dt < \infty.$$

AZ 1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Csak azt fogjuk részletesen megmutatni, hogy majdnem minden x pontra $k(>0)$-ban egyenletesen teljesül a

$$(2) \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3+hk} \int_0^1 |f(x+u)-f(x)|\, du \int_u^{u+k} |f(x+v)-f(x)|\, dv = 0 \qquad (h>0)$$

reláció; ennek alapján (1) egyszerűen adódik.

Legyen η tetszőleges pozitív szám és ω-át válasszuk olyan nagyra, hogy az $E=\underset{t}{E}[|f(t)|\leqq\omega;\ 0\leqq t\leqq 1]$ halmazra teljesüljön a

$$\operatorname{mes} E \geqq 1-\eta$$

feltétel. Legyen

$$f^*(t)=\begin{cases} f(t), & \text{ha } |f(t)|>\omega, \\ 0, & \text{ha } |f(t)|\leqq\omega \end{cases}$$

és $f^{**}(t)=f(t)-f^*(t)$.

Mivel az E halmazon $f^*(t)=0$, azért az 1. lemma szerint van olyan $F\subseteqq E$ perfekt halmaz és olyan M pozitív szám, hogy

$$\text{mes}\, F\geqq \text{mes}\, E-\eta\geqq 1-2\eta, \tag{3}$$

$$\int_{-k}^{k}|f^*(x+v)|\,dv\leqq Mk \qquad (x\in F) \tag{4}$$

és

$$\int_{I_\nu}|f^*(v)|\,dv\leqq M\,\text{mes}\, I_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots), \tag{5}$$

ahol $I_\nu=(a_\nu, b_\nu)$ $(\nu=1,2,\ldots)$ jelölik az F halmaznak a $(0,1)$ intervallum-ban levő komplementer-intervallumait.

Legyen $x_0\in F$ olyan hely, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\text{mes}\,(F\cap[x_0-h, x_0+h])}{2h}=1 \qquad (h>0), \tag{6}$$

$$\int_{-h}^{h}|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du=o(h) \qquad (0<h\to 0), \tag{7}$$

$$\int_{0}^{1}\frac{\Phi(x_0+t)}{t^2}\,dt<\infty. \tag{8}$$

Továbbá legyen ε tetszőleges pozitív szám és a $h_0(>0)$ pozitív számot válasz-szuk olyan kicsinynek, hogy $0<h\leqq h_0(\leqq 1)$ esetén teljesüljön az

$$\int_{-h}^{h}|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du<\varepsilon h \tag{9}$$

egyenlőtlenség.

Mivel $f(t)=f^*(t)+f^{**}(t)$ és $f^*(x_0)=0$, ezért érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\int_0^h|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du\int_u^{u+k}|f(x_0+v)-f(x_0)|\,dv\leqq$$

$$\leqq\int_0^h|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du\int_u^{u+k}|f^*(x_0+v)|\,dv+$$

$$+\int_0^h|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du\int_u^{u+k}|f^{**}(x_0+v)-f^{**}(x_0)|\,dv=J_1+J_2.$$

Mivel $|f^{**}(t)| \leqq \omega$, ezért (9) alapján

(10) $$J_2 \leqq 2\omega\varepsilon h k,$$

ha $0 < h \leqq h_0$.

(4) és (5) alapján adódik, hogy

$$\int_u^{u+k} |f^*(x_0+v)|\, dv = \int_0^k |f(x_0+u+v)|\, dv \leqq \begin{cases} Mk, & \text{ha } x_0+u \in F, \\ M(\operatorname{mes} I_\nu + k), & \text{ha } x_0+u \in I_\nu, \end{cases}$$

tehát

$$\int_u^{u+k} |f^*(x_0+v)|\, dv \leqq M\{\Phi(x_0+u)+k\},$$

ahol $\Phi(t)$ jelöli a 2. lemmában definiált függvényt. Ebből az egyenlőtlenségből (9) alapján nyerjük, hogy

(11) $$J_1 < M\varepsilon h k + M \int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\, \Phi(x_0+u)\, du,$$

ha $0 < h \leqq h_0$. Nyilvánvaló, hogy

$$\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\, \Phi(x_0+u)\, du = \int_0^h u^2 |f(x_0+u)-f(x_0)| \frac{\Phi(x_0+u)}{u^2}\, du \leqq$$

$$\leqq \sum_\nu{}' \frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(a_\nu-x_0)^2} \int_{I_\nu} (u-x_0)^2 |f(u)-f(x_0)|\, du,$$

ahol az összegezés az olyan ν indexekre van kiterjesztve, amelyekre $I_\nu \subseteq [x_0, x_0+h]$. (6) miatt van olyan $N = N(x_0)$ pozitív szám, amelyre $(b_\nu - x_0)/(a_\nu - x_0) \leqq N$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ és így érvényes a következő becslés:

$$\sum_\nu{}' \frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(a_\nu-x_0)^2} \int_{I_\nu} (u-x_0)^2 |f(u)-f(x_0)|\, du \leqq N^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(b_\nu-x_0)^2} \int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\, du.$$

Mivel $\Phi(t)$ definíciója szerint

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(b_\nu-x_0)^2} \leqq \int_0^1 \frac{\Phi(x_0+t)}{t^2}\, dt,$$

ezért a fentiek alapján

$$\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\, \Phi(x_0+u)\, du \leqq$$

$$\leqq N^2 h^2 \int_0^1 \frac{\Phi(x_0+t)}{t^2}\, dt \int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\, du.$$

Ebből (8), (9) és (11) szerint nyerjük, hogy

$$J_1 < A\varepsilon(h^3 + hk),$$

ha $0 < h \leqq h_0$, ahol A egy ε-tól, h-tól és k-tól független állandó. Ebből és (10)-ből nyerjük végül, hogy az x_0 pontban (2) teljesül. A Lebesgue-féle tétel és a 2. lemma szerint (6), (7) és (8) F-en majdnem mindenütt teljesül és így (2) is F-en majdnem mindenütt érvényes. Mivel η tetszőleges, ezért (3) miatt (2) majdnem mindenütt fennáll.

Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

Egyszerűen bizonyítható a következő tétel:

2. TÉTEL. *Legyen $f(t) \in L[0, 1]$ 1-periódusú függvény. Ha az x_0 pontban* (1) *teljesül, akkor az $f(t)$ függvénynek az x_0 pontban Lebesgue-pontja van, azaz*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} |f(x_0+u) - f(x_0)|\, du = 0 \qquad (h > 0).$$

BIZONYÍTÁS. Ha majdnem mindenütt $f(t) = f(x_0)$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ellenkező esetben

$$a = \int_0^1 |f(x_0+v) - f(x_0)|\, dv > 0$$

és így (1)-ből $k = \frac{1}{2}$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$\int_{-h}^{h} |f(x_0+u) - f(x_0)|\, du =$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-h}^{h} |f(x_0+u) - f(x_0)|\, du \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} |f(x_0+v) - f(x_0)|\, dv,$$

amiből az állítás következik.

3. §. Integrálható függvények Fourier-sorának H_2-szummálhatósága

3. TÉTEL. *Legyen $f(x) \in L[0, 2\pi]$ 2π-periódusú függvény. Ha az x_0 pontban* (1) *teljesül, akkor az x_0 pontban $\mathfrak{S}(f)$ H_2-szummálható.*

BIZONYÍTÁS. A tétel bizonyítására GRÜNWALD GÉZA [1] alapgondolatát használjuk fel. Feltehetjük, hogy $x_0 = 0$ és $f(0) = 0$. Legyen ε tetszőleges pozitív szám és δ $(0 < 2\delta < \pi)$ olyan kicsiny, hogy $0 < h \leqq 2\delta$ esetén teljesüljenek az

$$\text{(12)} \qquad \int_{-h}^{h} |f(u)|\, du \int_{u-k}^{u+k} |f(v)|\, dv < \varepsilon(h^3 + hk) \qquad (k > 0)$$

és

(13) $$\int_{-h}^{h} |f(u)|\, du < \varepsilon h$$

feltételek.

Legyen $f_1(t) = f(t)$, ha $|t| \leqq \delta$ és $f_1(t) = 0$, ha $\delta < |t| \leqq \pi$, továbbá legyen $f_2(t) = f(t) - f_1(t)$. A Riemann-lemma szerint

(14) $$\lim_{\nu \to \infty} s_\nu(f_2; 0) = 0.$$

Mivel $s_\nu^2(f; 0) \leqq 2(s_\nu^2(f_1; 0) + s_\nu^2(f_2; 0))$ és mivel (14) szerint

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^2(f_2; 0) = 0,$$

ezért elég a $\mathfrak{S}(f_1)$ sornak az $x = 0$ pontban való H_2-szummálhatóságát megmutatni. Minthogy

$$s_\nu^2(f_1; 0) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f(u) f(v) \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) u \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) v}{2 \sin \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2}}\, du\, dv,$$

ezért

(15) $$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^2(f_1; 0) = \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f(u) f(v) k_n(u, v)\, du\, dv,$$

ahol

$$k_n(u, v) =$$
$$= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2}} \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(u - v)}{\sin \frac{u-v}{2}} - \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(u + v)}{\sin \frac{u+v}{2}} \right|.$$

Tekintsük az

$$\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f(u) f(v) k_n(u, v)\, du\, dv - \left(\int_0^{\delta}\int_0^{\delta} + \int_0^{\delta}\int_{-\delta}^{0} + \int_{-\delta}^{0}\int_0^{\delta} + \int_{-\delta}^{0}\int_{-\delta}^{0} \right) f(u) f(v) k_n(u, v)\, du\, dv$$

felbontást. A tétel bizonyítására elég megmutatni, hogy a jobboldali tagok abszolút értékben elég nagy n-re kisebbek lesznek, mint ε-nak egy ε-tól független konstansszorosa. Csak a

$$J = \int_0^{\delta}\int_0^{\delta} f(u) f(v) k_n(u, v)\, du\, dv = 2 \int_0^{\delta}\int_0^{u} f(u) f(v) k_n(u, v)\, du\, dv$$

integrált becsüljük részletesen, a többi integrál hasonlóan becsülhető.

Legyen n olyan nagy, hogy teljesüljön a $2\pi/n \leqq \delta$ feltétel és tekintsük a következő tartományokat:

$$\sigma_1 = \underset{(u,v)}{E}[0 \leqq u \leqq 2\pi/n;\ 0 \leqq v \leqq u],\quad \sigma_2 = \underset{(u,v)}{E}[2\pi/n \leqq u \leqq \delta;\ 0 \leqq v \leqq \pi/n],$$

$$\sigma_3 = \underset{(u,v)}{E}[2\pi/n \leqq u \leqq \delta;\ u-\pi/n \leqq v \leqq u],$$

$$\sigma_4 = \underset{(u,v)}{E}[2\pi/n \leqq u \leqq \delta;\ \pi/n \leqq v \leqq u-\pi/n].$$

A következőkben jelöljenek $c_1, c_2, \dots$ n-től és δ-tól független állandókat. Érvényesek a következő becslések (lásd pl. GRÜNWALD G. [1]):

$$|k_n(u,v)| \leqq \begin{cases} c_1 n^2, & \text{ha } (u,v) \in \sigma_1, \\ c_2 \dfrac{1}{u^2}, & \text{ha } (u,v) \in \sigma_2, \\ c_3 \dfrac{1}{uv}, & \text{ha } (u,v) \in \sigma_3, \\ \dfrac{1}{nuv(u-v)}, & \text{ha } (u,v) \in \sigma_4. \end{cases}$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} |J| &\leqq 2c_1 n^2 \iint_{\sigma_1} |f(u)f(v)|\,du\,dv + 2c_2 \iint_{\sigma_2} \frac{|f(u)f(v)|}{u^2}\,du\,dv + \\ &+ 2c_3 \iint_{\sigma_3} \frac{|f(u)f(v)|}{uv}\,du\,dv + \frac{2}{n} \iint_{\sigma_4} \frac{|f(u)f(v)|}{uv(u-v)}\,du\,dv = J_1+J_2+J_3+J_4. \end{aligned} \tag{16}$$

(13)-ból következik, hogy

$$J_1 \leqq 2c_1 n^2 \int_0^{2\pi/n} |f(u)|\,du \int_0^{2\pi/n} |f(v)|\,dv < c_4\varepsilon. \tag{17}$$

(12) alapján parciális integrálással nyerjük, hogy

$$J_2 = 2c_2 \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2}\,du \int_0^{\pi/n} |f(v)|\,dv < 2c_2\varepsilon \frac{\pi}{n} \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2}\,du < c_5\varepsilon. \tag{18}$$

Mivel a σ_3 tartományon $v \geqq u$, $\dfrac{\pi}{n} \geqq \dfrac{u}{2}$, ezért

$$J_3 \leqq 4c_3 \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2}\,du \int_{u-\pi/n}^{u} |f(v)|\,dv.$$

Bevezetve a

$$\psi(t) = \int_0^t |f(u)|\,du \int_{u-\pi/n}^{u} |f(v)|\,dv$$

függvényt, (12) szerint parciális integrálással adódik, hogy

$$\int\limits_{2\pi/n}^{\delta}\frac{|f(u)|}{u^2}du\int\limits_{u-\pi/n}^{u}|f(v)|\,dv=\left[\frac{\psi(t)}{t^2}\right]_{2\pi/n}^{\delta}+2\int\limits_{2\pi/n}^{\delta}\frac{\psi(t)}{t^3}dt<$$

$$<c_6\varepsilon+2\varepsilon\int\limits_{2\pi/n}^{\delta}\frac{t^3+t\pi/n}{t^3}dt<c_7\varepsilon+2\varepsilon\pi/n\int\limits_{2\pi/n}^{\delta}\frac{dt}{t^2}<c_8\varepsilon,$$

tehát

$$J_3<c_9\varepsilon. \tag{19}$$

Ha $v\leqq\frac{u}{2}$, akkor $u-v\geqq\frac{u}{2}$ és így J_4-re érvényes a következő becslés:

$$J_4=\frac{2}{n}\int\limits_{2\pi/n}^{\delta}\frac{|f(u)|}{u}du\int\limits_{\pi/n}^{u-\pi/n}\frac{|f(v)|}{v(u-v)}dv\leqq\frac{4}{n}\int\limits_{2\pi/n}^{\delta}\frac{|f(u)|}{u^2}du\int\limits_{\pi/n}^{u/2}\frac{|f(v)|}{v}dv+$$

$$+\frac{4}{n}\int\limits_{2\pi/n}^{\delta}\frac{|f(u)|}{u^2}\int\limits_{u/2}^{u-\pi/n}\frac{|f(v)|}{(u-v)}du=J_1^*+J_2^*. \tag{20}$$

(13) alapján parciális integrálással adódik, hogy

$$\int\limits_{2v}^{\delta}\frac{|f(u)|}{u^2}du<c_{10}\varepsilon\frac{1}{v},$$

így (13) alapján egy újabb parciális integrálással nyerjük, hogy

$$J_1^*=\frac{4}{n}\int\limits_{\pi/n}^{\delta/2}\frac{|f(v)|}{v}dv\int\limits_{2v}^{\delta}\frac{|f(u)|}{u^2}du<\frac{c_{11}}{n}\varepsilon\int\limits_{\pi/n}^{\delta/2}\frac{|f(v)|}{v^2}<c_{12}\varepsilon. \tag{21}$$

Legyen végül p olyan természetes szám, amelyre $2^p\pi/n\leqq\delta<2^{p+1}\pi/n$. Akkor érvényes a következő becslés:

$$J_2^*\leqq\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{p}\int\limits_{2^i\pi/n}^{2^{i+1}\pi/n}\frac{|f(u)|}{u^2}du\left(\sum_{j=0}^{i-1}\int\limits_{u-2^{j+1}\pi/n}^{u-2^j\pi/n}\frac{|f(v)|}{u-v}dv\right)\leqq$$

$$\leqq\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{n}{2^i\pi}\frac{n}{2^j\pi}\int\limits_{2^i\pi/n}^{2^{i+1}\pi/n}|f(u)|\,du\int\limits_{u-2^{j+1}\pi/n}^{u-2^j\pi/n}|f(v)|\,dv<$$

$$<\frac{c_{13}}{n}\varepsilon\sum_{i=1}^{p}2^i\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{2^j}+c_{14}\varepsilon\sum_{i=1}^{p}\frac{i}{2^i}<c_{15}\varepsilon.$$

Ebből és (21)-ből nyerjük (20) szerint, hogy $J_4 < c_{16}\varepsilon$. Ebből, (16), (17), (18) és (19) alapján adódik, hogy $|J| < c_{17}\varepsilon$, ha n elég nagy.

Ezzel a 3. tételt teljesen bebizonyítottuk.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete.

IRODALOM

[1] G. GRÜNWALD, Über die Summabilität der Fourierschen Reihe, *Acta Sci. Math. Szeged,* **10** (1941—43), 55—63.

[2] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, Note on the theory of series (IV.), On the strong summability of Fourier series, *Proceedings of the London Math. Society,* **26** (1927), 273—286.

[3] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, The strong summability of Fourier series, *Fundamenta Math.,* **25** (1935), 162—189.

[4] J. MARCINKIEWICZ, Sur la sommabilité forte de séries de Fourier, *Journal of the London Math. Society,* **14** (1939), 162—168.

[5] A. ZYGMUND, On the convergence and summability of power series on the circle of convergence (II), *Proceedings of the London Math. Society,* **47** (1942), 326—350.

AZ ÁLTALÁNOS VALÓSZÍNŰSÉGI TÉTELRŐL

TAKÁCS LAJOS

Bemutatta Jordan Károly lev. tag az 1954. november 26-án tartott felolvasó ülésen

Jacobus Bernoulli 300-adik születésnapjára, 1954. dec. 27-ére

Bevezetés

Tekintsünk egy véletlen kísérletet, melynek kimenetelét az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események bekövetkezése szempontjából vizsgáljuk. Jelölje η_n valószínűségi változó az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül előfordulók számosságát. Az η_n valószínűségi változó a $0, 1, 2, \ldots, n$ értékeket veheti fel. Legyen a rövidség kedvéért $\mathbf{P}(\eta_n = k) = P_k$ és $\mathbf{E}\left\{\binom{\eta_n}{k}\right\} = B_k \; (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, ahol $\mathbf{P}$ a valószínűség és $\mathbf{E}$ a várható érték szimbóluma.

JORDAN KÁROLY [1], 1927-ben megjelent dolgozatában közölte az ún. *általános valószínűségi tételt*, amely a fenti jelölésben a következőképpen fejezhető ki:

$$P_k = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} B_j, \tag{1}$$

ahol $B_0 = 1$ és $j = 1, 2, \ldots, n$-re

$$B_j = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_j)} \mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_j}). \tag{2}$$

(2)-ben az összegezés kiterjesztendő az $(1, 2, \ldots, n)$ számokból alkotható valamennyi $(i_1, i_2, \ldots, i_j)$, j-edosztályú ismétlés nélküli kombinációra.

JORDAN KÁROLY [1] dolgozatában a B_j mennyiség még formálisan van definiálva a (2) összeggel. Későbbi (2) munkájában azonban kimutatja, hogy a B_j mennyiségek az η_n változó binomiális momentumaival egyeznek meg. Megjegyezzük, hogy JORDAN KÁROLY rámutatott arra is, hogy az (1) képlet általános érvényű olyan értelemben, hogy egy $0, 1, 2, \ldots, n$ értékkészletű, egyébként tetszőleges változó $\{P_k\}$ valószínűségeloszlása és $\{B_k\}$ binomiális momentumai között fennáll az (1) összefüggés.

JORDAN KÁROLY (1) tételének történelmi gyökerei egészen JACOBUS BERNOULLInak a valószínűségszámítás zseniális úttörőjének eredményéig nyúlnak vissza. JACOBUS BERNOULLI (1654—1705) állapította meg, hogy mi a valószínűsége annak, hogy n kísérlet során valamilyen esemény pontosan k-szor következzék be. Az (1) tétel ennél általánosabban, tetszőleges eseményekre is megadja ezt a valószínűséget. Megjegyezzük, hogy JORDAN KÁROLY tétele magában foglalja POINCARÉ tételét is, amely azt adja meg, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül legalább egy előfordulásának a valószínűsége $\mathbf{P}(A_1+A_2+\cdots+A_n)=B_1-B_2+B_3-\ldots+(-1)^{n-1}B_n$. Erre a valószínűségre JORDAN KÁROLY tétele az $1-P_0$ eredményt szolgáltatja, ami megegyezik az előzővel.

A fenti tételeknek fontos speciális esetét kapjuk, ha feltesszük, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események *ekvivalens események*. Ez alatt azt értjük, hogy bárhogyan is választunk ki az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül j különbözőt $(j=1,2,\ldots,n)$, ezen események együttes bekövetkezésének a valószínűsége független a kiválasztás módjától és csupán a j számtól függ, azaz fennáll

$$\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j})=\mathbf{P}(A_1A_2\ldots A_j), (1\leqq i_1<i_2<\ldots<i_j\leqq n; j=1,2,\ldots,n).$$

Vezessük be ekkor a következő jelölést: $\pi_0=1$ és $j=1,2,\ldots,n$-re:

$$\mathbf{P}(A_1A_2\ldots A_j)=\pi_j.$$

Ekkor speciálisan ekvivalens eseményekre (1) és (2) a következő egyszerűbb alakot ölti:

$$(1') \qquad P_k=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\binom{n}{j}\pi_j=\binom{n}{k}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{n-k}{n-j}\pi_j,$$

és

$$(2') \qquad B_j=\binom{n}{j}\pi_j.$$

A következőkben JORDAN KÁROLY (1) és (2) képletekben kifejezésre jutó eredményeivel foglalkozunk. Mégpedig az általános esetre két bizonyítást és az ekvivalens események speciális esetére egy harmadik bizonyítást is adunk. Bár JORDAN KÁROLY fenti tételeire eredeti bizonyítása óta több más bizonyítást is adtak (M. FRÉCHET [3], W. FELLER [4], K. L. CHUNG és L. C. HSU [5] stb.), mégis úgy véljük, hogy nem szaporítjuk feleslegesen ezen bizonyítások számát a következőkben közölt, aránylag egyszerű bizonyításokkal. Végül az általános valószínűségi tételnek a sztochasztikus folyamatok körében való néhány új alkalmazási lehetőségére mutatunk példát.

1. §. Első bizonyítás

A bizonyítás gondolatmenete abban áll, hogy először megmutatjuk, hogy a (2) alatti B_j mennyiségek valóban az η_n változó binomiális momentumaival egyeznek meg, azaz, hogy fennáll

$$B_j=\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}P_k, \qquad (j=0,1,2,\ldots,n).$$

Ezután az egyelőre ismeretlen $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ valószínűségeket ezen egyenletrendszerből meghatározzuk és így megkapjuk az (1) eredményt is.

Mindenekelőtt emlékeztetünk arra, hogy az I biztos esemény a következő szorzat alakjában írható fel:

$$I=(A_1+\bar{A}_1)(A_2+\bar{A}_2)\cdots(A_n+\bar{A}_n),$$

ahol $\bar{A}$ jelöli A esemény ellentétét. Ha most a jobboldalon álló szorzásokat elvégezzük, akkor ezzel az I eseményt előállítottuk egymást páronként kizáró események összegeként. Nevezzük ezt I felbontásának.

Tekintsük most a (2) összeget:

$$B_j=\sum_{(i_1,\, i_2,\ldots,\, i_j)}\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j}).$$

Ebben az összegben az egyes $\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j})$ valószínűségek annak az eseménynek a valószínűségét jelentik, hogy $A_1, A_2,\ldots, A_n$ események közül $A_{i_1}, A_{i_2},\ldots, A_{i_j}$ mindenesetre előfordul. Ez az utóbbi esemény pedig megegyezik I említett felbontásában szereplő azon események összegével, amelyek az $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j}$ szorzatot tartalmazzák. Ezek egymást páronként kizáró események és így összegüknek a valószínűsége egyenlő az egyes események valószínűségeinek összegével, azaz a $\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j})$ valószínűség előállítható, mint I felbontásában szereplő bizonyos események valószínűségeinek az öszszege. Végezzük el a B_j összeg minden tagjára ezt az előállítást és csoportosítsuk a kapott valószínűségeket aszerint, hogy megfelelő esemény az $A_1, A_2,\ldots, A_n$ események közül hányat tartalmaz (a többi eseménynek nyilvánvalóan az ellentéteit fogja tartalmazni). Ez a szám $k=j, j+1,\ldots, n$ lehet. Tekintsük a k-adik csoportot. Ebben egyrészt mindazon események valószínűségeinek összege előfordul, amelyek az $A_1, A_2,\ldots, A_n$ események közül pontosan k-nak a szorzatát (és a többi ellentétének szorzatát) tartalmazzák, másrészt minden ilyen valószínűség $\binom{k}{j}$-szer fordul elő, ugyanis minden ilyen valószínűség a B_j összeg annyi tagjának kifejtésében fog szerepelni, ahányféleképpen a tekintett k esemény közül kiválasztható j. Így a k-adik csoporthoz tartozó valószínűségek összege $\binom{k}{j}P_k$ és ezt $k=j, j+1,\ldots,$ n-re összegezve nyerjük B_j-t, azaz

$$B_j=\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}P_k,\qquad (j=0,1,2,\ldots,n).$$

Ezzel igazoltuk (2) helyességét.

A fenti egyenletrendszer a P_k ismeretlenekre a legegyszerűbben úgy oldható meg, hogy a j-edik egyenletet $(-1)^{j-k}\binom{j}{k}$-val szorozzuk és összegezzük az egyenleteket. Ekkor ugyanis

$$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}B_j=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\sum_{l=j}^{n}\binom{l}{j}P_l=\sum_{l=k}^{n}P_l\sum_{j=k}^{l}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\binom{l}{j}$$

és itt

$$\sum_{j=k}^{l}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\binom{l}{j}=\begin{cases}1 \text{ ha } l=k\\ 0 \text{ ha } l\neq k,\end{cases}$$

ami könnyen belátható $\binom{j}{k}\binom{l}{j}=\binom{l}{k}\binom{l-k}{l-j}$ átalakítással. Így tehát

$$P_k=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}B_j,$$

amivel az (1) állítást is igazoltuk.

2. §. Második bizonyítás

Egy kísérlettel kapcsolatban értelmezzük a ξ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ valószínűségi változókat úgy, hogy $\xi_i=1$ ha A_i előfordul és $\xi_i=0$ ha A_i nem fordul elő. Ekkor nyilvánvalóan az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül előfordulók számosságát $\eta_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$ szolgáltatja. Miként az első bizonyításnál, most is először η_n, j-edik binomiális momentumát, azaz $\binom{\eta_n}{j}$ várható értékét határozzuk meg. Vegyük tekintetbe, hogy az ismert Cauchy-féle formula szerint

$$\binom{\eta_n}{j}=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=j}\binom{\xi_1}{k_1}\binom{\xi_2}{k_2}\cdots\binom{\xi_n}{k_n}$$

és nyilvánvalóan $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_j\leqq n$-re

$$\mathbf{E}\{\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_j}\}=\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j}).$$

Így tehát

$$B_j=\mathbf{E}\left\{\binom{\eta_n}{j}\right\}=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=j}\mathbf{E}\left\{\binom{\xi_1}{k_1}\binom{\xi_2}{k_2}\cdots\binom{\xi_n}{k_n}\right\}=\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_j)}\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j}).$$

Ugyanis fennáll, hogy valószínűségi változók összegének a várható értéke egyenlő az egyes tagok várható értékeinek összegével. Most zérustól különböző tagokat csak akkor nyerünk, ha $k_1, k_2, \ldots, k_n$ a 0 vagy 1 értékeket veszik fel éspedig kell, hogy közülük j számú 1 és $n-j$ számú 0 legyen, mégpedig legyen $k_{i_1}=k_{i_2}=\cdots=k_{i_j}=1$. Így nyerjük a jobboldalt, amivel (2) fennállását igazoltuk. Innen (1) fennállása az első bizonyításban követett számolással adódik.

3. §. Harmadik bizonyítás

Most szorítkozzunk arra a speciális esetre, midőn $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *ekvivalens események.*

Először az (1′) képletet igazoljuk. Jelölje V_k annak a valószínűségét, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül kiválasztott k előfordul és a többi nem fordul elő. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események ekvivalenciájából következik, hogy ez a valószínűség nem függ a kiválasztás módjától, azaz írható $V_k = \mathbf{P}(A_1 A_2 \ldots A_k \bar{A}_{k+1} \ldots \bar{A}_n)$. Ekkor viszont fennáll, hogy

$$P_k = \binom{n}{k} V_k, \qquad (k=0,1,2,\ldots,n).$$

Ugyanis V_k annak az eseménynek a valószínűségét jelenti, hogy pontosan k kiválasztott esemény fordul elő és n esemény közül k, $\binom{n}{k}$-féleképpen választható ki.

A V_k valószínűségek meghatározására a következő egyenletrendszer írható fel:

$$(*) \qquad \pi_j = \sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{n-k} V_k, \qquad (j=0,1,2,\ldots,n).$$

Itt a baloldal annak a valószínűségét jelöli, hogy kiválasztott j esemény mindenesetre előfordul és ez több egymást kizáró módon jöhet létre, mégpedig a többi $n-j$ esemény közül még előfordulhat: $0,1,2,\ldots,n-j$. A jobboldal éppen ezen utóbbi esemény valószínűségét szolgáltatja. Ha most a fenti egyenletrendszer j-edik egyenletét $(-1)^{j-k}\binom{n-k}{n-j}$-vel szorozzuk és az egyenleteket összegezzük, úgy azt kapjuk, hogy

$$V_k = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{n-k}{n-j} \pi_j.$$

Mivel $P_k = \binom{n}{k} V_k$, tehát ezzel (1')-et igazoltuk.

Továbbá B_j-re most fennáll, hogy

$$B_j = \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} P_k = \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j}\binom{n}{k} V_k = \binom{n}{j} \sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{n-k} V_k = \binom{n}{j} \pi_j,$$

ahol az utolsó egyenlőség (*)-ból adódik. Ezzel (2') fennállását is bebizonyítottuk.

1. *Megjegyzés:* Speciálisan ekvivalens eseményekre az η_n változó várható értéke

$$(3) \qquad \mathbf{E}\{\eta_n\} = B_1 = n\pi_1$$

és szórásnégyzete

$$(4) \qquad \mathbf{D}^2\{\eta_n\} = 2B_2 + B_1 - B_1^2 = n^2(\pi_2 - \pi_1^2) + n(\pi_1 - \pi_2).$$

Az η_n változó s-edik hatványmomentuma pedig

$$(5) \qquad \mathbf{E}\{\eta_n^s\} = \sum_{j=1}^{s} \mathfrak{S}_s^j \, j! \, B_j = \sum_{j=1}^{s} \mathfrak{S}_s^j \, j! \binom{n}{j} \pi_j,$$

ahol $\mathfrak{S}_s^j$ a másodfajú Stirling számokat jelöli (lásd pl. CH. JORDAN [6] p. 168).

2. *Megjegyzés:* Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ekvivalens események, úgy könnyen beláthatό, hogy $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$ események is ekvivalensek. Annak a valószinűsége, hogy $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$ események közül pontosan k fordul elő nyilván megegyezik annak a valószinűségével, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ közül pontosan $n-k$ fordul elő és ezen utóbbi valószínűség megállapítása szintén az (1′) képlettel történik. Persze közvetlenül is meghatározhatjuk ezen utóbbi valószinűséget JORDAN KÁROLY tétele alapján, de ahhoz ismernünk kell a

$$\pi_j^* = \mathbf{P}(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_j)$$

valószínűségeket. Ezek a π_j valószínűségekkel a következőképpen függnek össze

$$\pi_j^* = 1 - \binom{j}{1}\pi_1 + \binom{j}{2}\pi_2 - \ldots + (-1)^j \binom{j}{j}\pi_j,$$

ami szintén JORDAN (1′) tétele alapján nyerhető, ha azt arra az esetre alkalmazzuk, midőn arról van szó, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_j$ események közül egy sem fordul elő. Gyakorlati feladatok megoldásánál π_j és π_j^* közül mindig azt célszerű tekinteni, amelyiket könnyebb meghatározni.

4. §. Alkalmazások

Ebben a fejezetben azt szeretnénk megmutatni, hogy JORDAN KÁROLY általános valószínűségi tétele mennyire hasznos eredménye a valószínűségszámításnak. Az (1) és (2) képletekben kifejezésre jutó tételek segítségével a valószínűségszámítás sok olyan problémája egyszerűen megoldható, amelyeket eddig csak bonyolultabb módszerek alkalmazásával sikerült tárgyalni. Ez a megállapítás a valószínűségszámítás újabb fejezetére, a sztochasztikus folyamatok elméletére is érvényes, amit néhány példa megoldásával mutatunk meg.

A következőkben mindvégig feltesszük, hogy a vizsgálatunk tárgyát képező $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események ekvivalensek, $\pi_j = \mathbf{P}(A_1 A_2 \ldots A_j)$ és η_n valószínűségi változó jelöli az n esemény közül előfordulók számát.

1. A valószínűségszámításról szóló kézikönyvekben és tudományos értekezésekben gyakori feladat, hogy egy bizonyos, a fentiekben értelmezett, η_n valószínűségi változó várható értékének, szórásának, vagy magasabbrendű momentumainak meghatározásáról van szó. Ilyenkor sok esetben meghatározzák η_n valószínűségeloszlását és ennek ismeretében terjedelmes számítással nyerik a szóban forgó mennyiségeket. Most arra a tényre szeretnénk rámutatni, hogy a (3), (4) és (5) formulák közvetlenül alkalmazhatók ezen mennyiségek kifejezésére és erre elegendő csupán a π_j valószínűségeket ismerni, amelyek sokszor könnyen meghatározhatók. Az alábbiakban néhány példára megadjuk a π_j valószínűségek értékeit, amelyek ismeretében a fent adott általános tárgyalás alkalmazható.

a) Tekintsünk egy urnát, amelyben K fehér és $N-K$ fekete golyó van. Egymásután visszatevés nélkül kiveszünk n golyót. Jelölje A_i esemény azt, hogy az i-edik húzásra fehér golyót kapunk. Ekkor az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események ekvivalensek és η_n jelöli a fehér golyók számát a kihúzottak között. Most

$$\pi_j = \frac{(K)_j}{(N)_j} = \frac{\binom{K}{j}}{\binom{N}{j}}$$

és (1') alkalmazásával

$$P_k = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{K}}.$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy az n egymásutáni húzás egyenértékű n golyó egyszerre történő kivételével, úgy közvetlenül azt kapjuk, hogy

$$P_k = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

ami az előzővel megegyezik.

Most (3) és (4) szerint

$$\mathbf{E}\{\eta_n\} = \frac{nK}{N}$$

és

$$\mathbf{D}^2\{\eta_n\} = \frac{nK}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).$$

b) Elhelyezünk N számú golyót n dobozban. Legyen minden egyes elhelyezkedés egyenlően valószínű. Jelölje A_i esemény azt, hogy az i-edik doboz üres. Ekkor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ekvivalens események és

$$\pi_j = \left(1-\frac{j}{n}\right)^N.$$

c) Az előző kísérletnél jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik dobozban ν golyó van. Ekkor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ekvivalens események és

$$\pi_j = \frac{N!}{(\nu!)^j (N-j\nu)!}\,\frac{1}{n^N}$$

ha $j \leqq N/\nu$, különben $\pi_j = 0$.

d) Elhelyezünk N számú golyót n dobozba a Bose-Einstein statisztika feltevése szerint (az egyes golyók megkülönböztethetetlenek, azaz két különböző dobozban levő golyó felcserélése nem ad új elhelyezkedést). Minden egyes elhelyezkedés egyenlően valószínű. Jelölje A_i esemény azt, hogy az i-edik doboz üres. Ekkor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ekvivalens események és

$$\pi_j = \frac{\binom{N+n-j-1}{N}}{\binom{N+n-1}{N}}$$

e) Tekintsük az előző feladatot azzal a módosítással, hogy A_i esemény azt jelöli, hogy az i-edik dobozban ν golyó van. Ekkor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ekvivalens események és

$$\pi_j = \frac{\binom{N+n-j(\nu+1)-1}{N-j\nu}}{\binom{N+n-1}{N}}$$

2 a) A $(0, t)$ intervallumon válasszunk $n-1$ számú egymástól független egyenletes eloszlást mutató pontot. Ez az $n-1$ pont a $(0, t)$ intervallumot (1 valószínűséggel) n szakaszra osztja. Jelölje ezen szakaszok hosszát rendre $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ valószínűségi változó és A_i esemény legyen az, hogy $\delta_i > \alpha$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Könnyen megmutatható, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események ekvivalensek és fennáll

$$\pi_j = \begin{cases} \left(1-\dfrac{j\alpha}{t}\right)^{n-1} & \text{ha } 0 \leqq j\alpha \leqq t \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k szakasz nagyobb α-nál, (2′) szerint

$$P_k = \binom{n}{k} \sum_{j=k}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]} (-1)^{j-k} \binom{n-k}{n-j} \left(1-\frac{j\alpha}{t}\right)^{n-1}.$$

Ez az eredmény a valószínűségszámítás múlt századbeli irodalmától kezdve egészen napjainkig számos helyen újra és újra előfordul, de mindig bonyolult számításokkal, vagy geometriai megfontolásokkal igazolják fennállását.

b) Tekintsünk most egy t kerületű kört. Ezen a körön válasszunk n számú független, egyenletes eloszlást mutató pontot. Ez az n pont a kör kerületét n szakaszra osztja. Jelölje a szakaszok hosszát rendre $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ valószínűségi változó és legyen A_i esemény az, hogy $\delta_i > \alpha$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ekkor az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események ekvivalensek és a π_j és P_k mennyiségek szószerint megegyeznek az előző feladat eredményeivel.

3) C. Levert és W. L. Scheen [7] munkájukban részecskeszámlálókkal kapcsolatosan foglalkoznak a következő problémával: Egy λ eseménysűrűségű

Poisson-folyamat $(0, t)$ időközben előforduló valamennyi eseménye elindít egy-egy α időtartamú impulzust. Regisztrált eseményeknek nevezzük azokat, amelyek olyankor fordulnak elő, midőn nincs folyamatban impulzus. Meghatározandó a $(0, t)$ időközben regisztrált események számának eloszlása. LEVERT és SCHEEN ezt a problémát úgy oldják meg, hogy a $(0, t)$ intervallumot egy körkerülettel helyettesítik. Ezzel a problémát módosítják, mert a $(0, t)$ intervallum végén kezdődő impulzusok esetleg befolyást gyakorolnak a kezdeti állapotra és így lehetséges, hogy az első esemény nem lesz regisztrált, pedig különben az lenne. Megjegyezzük, hogy a probléma eredeti alakjában könnyen megoldható és általánosítható tetszőleges eloszlású impulzusokra is ([8] 535. o. és [9] 148 o.). Mindazonáltal a módosított probléma matematikai szempontból érdekes. LEVERT és SCHEEN a módosított problémát is terjedelmes és bonyolult számítással oldják meg. Most megmutatjuk, hogy JORDAN KÁROLY (1') tételének alkalmazásával a probléma egyszerűen megoldható.

Annak a valószínűsége, hogy a Poisson-folyamatban $(0, t)$ időközben pontosan n esemény fordul elő

$$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Ha tudjuk, hogy a $(0, t)$ intervallumban pontosan n számú esemény fordult elő, akkor ezen feltétel mellett az n esemény előfordulási pontjai úgy tekinthetők, mint n számú független, egyenletes eloszlású pont elhelyezkedése, ezen az intervallumon, illetve a körkerületen. Ez az n pont a körkerületet n szakaszra osztja. Legyenek ezek hosszai rendre $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. Az n esemény közül pontosan k lesz regisztrálva akkor, ha a $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ távolságok közül k számú nagyobb, mint α. Ezen utóbbi esemény valószínűsége pedig 2.b) szerint

$$\binom{n}{k}\sum_{j=k}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]}(-1)^{j-k}\binom{n-k}{n-j}\left(1-\frac{j\alpha}{t}\right)^{n-1}.$$

Jelölje $P(t,k)$ annak a valószínűségét, hogy a $(0, t)$ időközben regisztrált események száma pontosan k. Ha tekintetbe vesszük, hogy több egymást kizáró módon nyerhetünk k regisztrált eseményt, mégpedig úgy, hogy $(0, t)$ időközben a Poisson-folyamatban $n=k, k+1, k+2, \ldots$ esemény fordul elő, akkor a teljes valószínűségek tétele szerint

$$P(t, k)=\sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\binom{n}{k}\sum_{j=k}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]}(-1)^{j-k}\binom{n-k}{n-j}\left(1-\frac{j\alpha}{t}\right)^{n-1}$$

adódik. Ha az n szerinti összegezést végrehajtjuk, úgy azt kapjuk, hogy

$$P(t,k)=\sum_{j=k}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\frac{e^{-\lambda\alpha j}(\lambda t)^j}{j!}\left(1-\frac{j\alpha}{t}\right)^{j-1},$$

ami megegyezik C. LEVERT és W. L. SCHEEN [7] eredményével.

Most meghatározzuk a $\{P(t,k)\}$ valószínűségeloszlás $B_s(t)$ binomiális momentumait. Ha tudjuk, hogy $(0,t)$ intervallumban pontosan n esemény fordult elő, akkor ezen feltétel mellett a regisztrált események száma eloszlásának s-edik binomiális momentuma (2') szerint $\binom{n}{s}\pi_s$, ahol most 2.b) szerint $\pi_s = \left(1-\frac{s\alpha}{t}\right)^{n-1}$ ha $0 \leqq s\alpha \leqq t$. Mivel a $(0, t)$ intervallumban előforduló események száma valószínűségi változó ($\{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!\}$ eloszlással), ezért a $(0, t)$ intervallumban regisztrált események száma eloszlásának s-edik binomiális momentumát a feltételes várható érték definiciója alapján a következő kifejezés szolgáltatja:

$$B_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\binom{n}{s}\left(1-\frac{s\alpha}{t}\right)^{n-1} = \frac{e^{-\lambda\alpha s}(\lambda t)^s}{s!}\left(1-\frac{s\alpha}{t}\right)^{s-1},$$

ha $0 \leqq s\alpha \leqq t$, különben $B_s(t) = 0$.

LEVERT és SCHEEN is meghatározták a $B_s(t)$ binomiális momentumokat, de $P(t, k)$ ismeretében történő számítással. Az itteni számítás ezzel szemben közvetlen, amely nem támaszkodik $P(t, k)$ ismeretére. Ez egy új lehetőséget is ad $P(t, k)$ kiszámítására. A bevezetésben ugyanis említettük, hogy JORDAN KÁROLY észrevette, hogy az (1) összefüggés általánosan érvényes egész értékeket felvevő valószínűségi változók eloszlása és binomiális momentumai között. Így tehát eszerint fennáll

$$P(t, k) = \sum_{j=k}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]} (-1)^{j-k}\binom{j}{k} B_j(t),$$

ami megegyezik a korábbi eredménnyel.

IRODALOM

[1] JORDAN KÁROLY: A valószínűségszámítás alapfogalmai. *Matematikai és Fizikai Lapok* 34 (1927) 109—136.

[2] CH. JORDAN: Problèmes de la probabilité des épreuves répétées dans le cas général. *Bulletin de la Société Mathematique de France*, 1939.

[3] M. FRÉCHET: Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants. *Actualités scientifiques et industrielles*, Paris, 1940.

[4] W. FELLER: An introduction to probability theory and its applications. New-York, 1950.

[5] K. L. CHUNG AND L. C. HSU: A combinatorial formula and application to the theory of probability of arbitrary events. *Annals of Mathematical Statistics* **16** (1945) 91—95.

[6] CH. JORDAN: Calculus of finite differences. Budapest, 1939.

[7] C. LEVERT AND W. L. SCHEEN: Probability fluctuation of discharges in a Geiger—Müller counter produced by cosmic radiation. *Physica*, **10** (1943) 225—238.

[8] TAKÁCS L.; Poisson folyamat által származtatott történésfolyamatokról. *MTA III. Oszt. Közl.* **4** (1954) 526—541.

[9] TAKÁCS L.: Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál *MTA. Alk. Mat. Int. Közl.* **2** (1953) 135—151.

ORTOGONÁLIS SOROKRÓL

TANDORI KÁROLY

Bemutatta Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag az 1955. április 29-én tartott felolvasó ülésen

1. Legyen $\{\varphi_n(x)\}$ az $[a, b]$ intervallumon ortogonális és normált rendszer. Tekintsük a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{1}$$

ortogonális sort, ahol az a_k valós együtthatók eleget tesznek a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$$

feltételnek. Legyen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

és az $\{[s_\nu(x)-f(x)]^2\}$ $(\nu=0, 1, \ldots)$ sorozat $(C, \alpha>0)$-közepét jelöljük $\sigma_n^{(\alpha)}([s_\nu-f]^2; x)$-szel:

$$\sigma_n^{(\alpha)}([s_\nu-f]^2; x) = \frac{1}{A_n^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\alpha-1)} [s_\nu(x)-f(x)]^2,$$

$$A_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{n}.$$

A. ZYGMUND [2] bebizonyította a következő tételt: ha az (1) sor az $[a, b]$ intervallumon majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummálható az $f(x)$ függvényhez, akkor az $[a, b]$ intervallumon majdnem mindenütt

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(1)}([s_\nu-f]^2; x) = 0.$$

Felvethető az a kérdés, hogy a fenti feltételek mellett az $\{[s_\nu(x)-f(x)]^2\}$ $(\nu=0, 1, \ldots)$ sorozat (C, α)-közepei $(0<\alpha<1)$ is $[a, b]$-n majdnem mindenütt 0-hoz konvergálnak. Ezzel a kérdéssel kapcsolatban bebizonyítjuk a következő tételt:

TÉTEL: *Ha az* (1) *sor az* $[a, b]$ *intervallumon majdnem mindenütt* $(C, 1)$-*szummálható az* $f(x)$ *függvényhez, akkor* $[a, b]$-*n majdnem mindenütt*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu-f]^2; x) = 0.$$

A tétel bizonyítására előrebocsátunk egy segédtételt. Definiáljuk az m_ν $(\nu=0, 1, \ldots)$ indexsorozatot a következő módon: legyen $m_0=0$, $m_1=1$, és ha $\nu>1$, $2^m<\nu\leqq 2^{m+1}$, akkor legyen $m_\nu=2^m$.

SEGÉDTÉTEL. *Négyzetesen integrálható kifejtés esetén $[a, b]$-n majdnem mindenütt*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(1)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) = 0.$$

A segédtétel bizonyítására elég megmutatni, hogy a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2}{\nu} \tag{2}$$

sor $[a, b]$-n majdnem mindenütt konvergál; ebből egy ismert tétel szerint (lásd pl. A. ZYGMUND [3], 43. o.) adódik a segédtétel. Mivel

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \frac{[s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2}{\nu} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{a_{2^n+1}^2 + \cdots + a_\nu^2}{\nu} \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} (a_{2^n+1}^2 + \cdots + a_\nu^2) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty,$$

így a B. Levi-féle konvergencia-tétel alkalmazásával nyerjük, hogy a (2) sor $[a, b]$-n majdnem mindenütt konvergál. Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

3. A TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Az $(u+v)^2 \leqq 2(u^2+v^2)$ egyenlőtlenség alkalmazásával adódik, hogy

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - f]^2; x) \leqq 2\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) + 2\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_{m_\nu} - f]^2; x).$$

A. N. KOLMOGOROV [1] ismert tétele szerint a tétel feltevései mellett $[a, b]$-n majdnem mindenütt $\lim_{m\to\infty} s_{2^m}(x) = f(x)$, így $[a, b]$-n majdnem mindenütt

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) = 0. \tag{3}$$

Mivel $A_{2^n}^{(\alpha)} \sim 2^{n\alpha}$ és $A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} \leqq c2^{n(\alpha-1)}$, ha $0 \leqq \nu \leqq 2^{n-1}$, ezért érvényes a következő becslés:

$$\sigma_{2^n}^{(\alpha)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) = O(1)\sigma_{2^{n-1}}^{(1)}([s_\nu - s_{m_\nu}]^2; x) +$$

$$+ \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2.$$

A segédtétel alkalmazásával nyerjük, hogy a jobboldali első tag $[a, b]$-n majdnem mindenütt 0-hoz tart, ha $n \to \infty$, így (3) bizonyítására elég megmutatni, hogy a jobboldali második tag is $[a, b]$-n majdnem mindenütt 0-hoz tart, ha $n \to \infty$. Ehhez elegendő megmutatni, hogy a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} [s_\nu(x) - s_{m_\nu}(x)]^2 \tag{4}$$

sor $[a, b]$-n majdnem mindenütt konvergál. Mivel $A_k^{(\alpha)} \sim (k+1)^\alpha$, ezért tagonként integrálva nyerjük, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} \int_a^b [s_\nu(x)-s_{m_\nu}(x)]^2 dx = \tag{5}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n - \nu + 1)^{\alpha-1} (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_\nu^2).$$

Minthogy

$$\frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} (2^n - \nu + 1)^{\alpha-1} (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_\nu^2) =$$

$$= O(1) (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_{2^n}^2) \frac{1}{2^{n\alpha}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} k^{\alpha-1} = O(1) (a_{2^{n-1}+1}^2 + \cdots + a_{2^n}^2),$$

ezért (5) alapján nyerjük, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{A_{2^n}^{(\alpha)}} \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} A_{2^n-\nu}^{(\alpha-1)} \int_a^b [s_\nu(x)-s_{m_\nu}(x)]^2 dx \leqq M \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$$

és így a B. Levi-féle tétel alkalmazásával nyerjük, hogy a (4) sor $[a, b]$-n majdnem mindenütt konvergál.

Ezzel tételünket teljesen bebizonyítottuk.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete.

IRODALOM

[1] A. N. Kolmogorov, Une contribution a l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), 96—97.

[2] A. Zygmund, Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356—362.

[3] A. Zygmund, *Trigonometrical series* (Warszawa—Lwów, 1935).

Po-Be NEUTRONFORRÁS ENERGIASPEKTRUMÁNAK VIZSGÁLATA FOTOEMULZIÓS MÓDSZERREL

MEDVECZKY LÁSZLÓ

Bemutatta Szalay Sándor lev. tag az 1954. november 26-án tartott felolvasó ülésen

A természetes rádioaktív α sugárral keltett neutronforrások közül a $Be^9(\alpha, n)C^{12}$ atommagfolyamatot kíséri a legintenzívebb neutronemisszió. Sok esetben előnyösebb polóniumot használni α forrásul, a Ra, illetve a Rn-nál jelentékenyen kisebb intenzitású γ sugárzás, valamint a homogénebb α energia miatt.

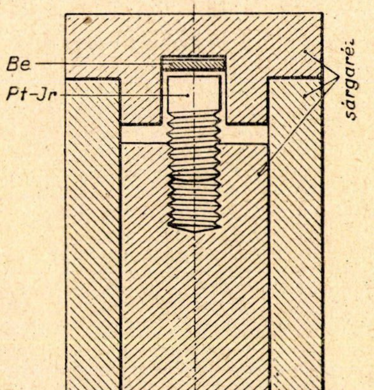
A Po-Be neutronforrások energiaspektrumának tanulmányozásával ezért az irodalomban számos dolgozat foglalkozik, és napjainkban sem érdektelen kérdés. Az eredmények egybehangzóan a sugárzás felső határát 11 MeV-ban, az intenzitás maximumát általában 2—5 MeV között állapítják meg, de a maximumok száma, helye, intenzitások aránya között már elég nagy eltérés tapasztalható.

E munka célja kis kiterjedésű Po-Be neutronforrásból kilépő gyors neutronok energia szerinti eloszlásának megvizsgálása fotoemulziós módszer felhasználásával.

MÉRÉSI TECHNIKA

Neutronforrás

A Po-Be neutronforrások legtöbbször oldatban lévő polóniumnak berillium-porral való homogén keveréke, de vékony Pt fólián lévő Po-nak berillium hengerben való elhelyezése is szokásos [1]. A jelen méréseknél használt neutronforrás inkább ez utóbbihoz hasonló, de igen kis kiterjedésű. (1. ábra) A 12 mC polónium 3 mm átmérőjű Pt—Ir korongra lett volatilizálva, SZALAY-féle eljárás [2] szerint. Vele szemben 0,2 mm távolságra volt a Po α részecskéi által bombázott fémes Be pikkelyek formájában. A Be rögzítése a forrást körülvevő 5 mm vastag sárgaréz köpenyhez híg zapponlak segítségével történt.



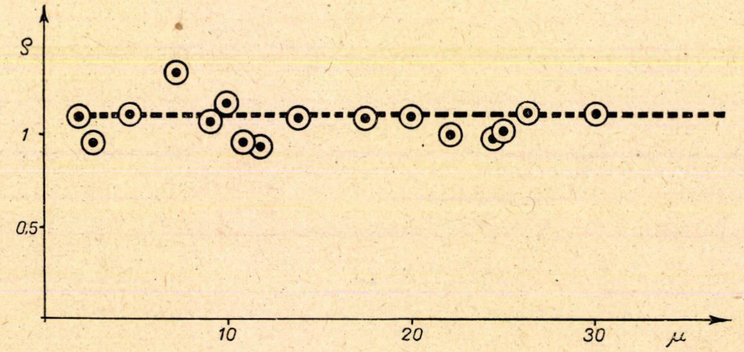
1. ábra.
A neutronforrás hosszirányú metszete

Besugárzás

Besugárzáskor az elrendezés ugyanaz volt, mint az előzőkben már leírt [3] vizsgálatoknál. A magfizikai fotolemezeket a besugárzáskor a Be síkjában kettesével az emulziós oldalukkal összefordítva alumínium fóliába és fekete papírba csomagolva a neutronforrás középvonalától 40, illetve 100 mm-re helyeztük el. Az emulziót érő neutron-nyaláb irány-homogenitása igen kedvező volt, mert az emulzió bármely pontjába érkező sugárnyaláb szélső neutronjai 100 mm besugárzási távolságnál maximálisan 2°, de 40 mm-nél is 5°-nál kisebb szöget zártak be. E rövid besugárzási távolságból is szembeötlő, hogy mily előnyös a kisfelületű pontszerű Po forrás alkalmazása. Más szerzők ezt a feltételt csak lényegesen nagyobb besugárzási távolság esetén tudják megvalósítani. Az emulziók besugárzása több részletben történt 2—14 nap között változó, különböző hosszú időtartamig.

Emulzió és kezelése

A vizsgálatokhoz Ilford C2 100 μ vastag emulziójú atommagfizikai fotolemezeket használtunk. Az összesen kimért emulzió területe 229,5 cm^2. A besugárzások 1951-ben, az emulziók gyártása után kb. 2 évvel történtek, tehát az emulziók már meglehetősen régiek voltak. Feltétlenül szükséges volt közvetlenül besugárzás előtt a bennük létrejött különböző nyomokat törölni. Az eradikálás telített vízgőzben történt 35±1 C°-on 90 órán keresztül, mely után az emulziókat exszikkátorban szárítottuk meg. Az eljárás lényegében a WIENER és YAGODA [4] által leírt módszer, de az idézett szerzők által közölt időtartamnak csak a hatszorosa bizonyult elégségesnek.



2. ábra. Az 1 μ hosszon levő átlagos szemcsék száma az előhívott emulzió különböző mélységében. (Az előhívás egyenletességének ellenőrzésére.)

A lemezek előhívása gyenge hidrochinonos hívóval WIENER és YAGODA közlése szerinti eljárással történt, de a folyamat egyes időit a rétegvastagságnak megfelelően alkalmaztuk. Az előhívási eljáráshoz szükséges hőmérsékletek tartására jól beváltak a házilag készült egyszerű termosztátok, amelyek tulajdonképpen duplafalú, vízköpenyes, fénymentesen záró faládák. A fixáláshoz szükséges „ringatás"-t gramofonmotor végezte excenter segítségével.

Hogy az emulziók előhívása teljes rétegvastagságukban megfelelően egyenletes-e, arról az emulzióban különböző mélységben fekvő proton nyomok szemcsesűrűségének vizsgálatával lehetett meggyőződni, megszámolva az emulzió síkjához kis dőlési szöggel futó, ugyanolyan hosszúságú protonnyomok azonos szakaszának szemcséit. A szakasz kiválasztását úgy célszerű végezni, hogy a proton nyomok lassú vége, ahol a szemcsék szinte teljesen összefolynak, ne kerüljön vizsgálat alá. Azért a nyomok végétől számítva kihagyott 13,8 μ-os részt követő 55,2 μ hosszú szakaszban történt szemcseszámolás 1700 ×-os nagyítással. A 2. ábrán az emulzió felszínétől számított különböző mélységben fekvő pályákban 1 μ hosszon levő átlagos szemcseszámot (ϱ) láthatjuk, és ezek alapján az emulziók előhívása teljes vastagságukban megfelelően egyenletesnek mondható.

Mikroszkóp

A pályahosszak zömének lemérése Zeiss LgOG laboratóriumi mikroszkóppal, de Leitz gyártmányú, magfizikai emulziós munkához készült speciális, kis mélységélességű immerziós objektívekkel (22×, 53× és 100×) és 6×, illetve 12,5× mérőokulár felhasználásával, kisebb hányad pedig Leitz Ortholux II. mikroszkóppal, de a fentivel azonos optikával történt. A pályák emulzió síkbeli vetületének a hosszát okulármikrométerrel, az arra merőleges tengelyre való vetület hosszát pedig a mikroszkópok finom beállító csavarja segítségével mértük meg. A mikroszkóp binokuláris tubusának bal szára a hosszúság mérésére, a jobb — házilag készült szögmérőfej segítségével — az azimutális szög mérésére szolgált. Az okulárskálák hitelesítése 1/100-as tárgymikrométerrel történt.

A méréseket hat személy végezte, de a pályák zömét két mikroszkópos mérte ki. Az egyes mikroszkópizálók mérési eredménye közötti eltérés az észlelési hibahatárokon belül volt, tehát a mérési eredmények összesíthetők. Erről külön összehasonlító mérések elvégzésével győződtünk meg, az egyéni eredmények összehasonlításán kívül. [17 különböző energiájú proton nyomát mérte meg egymástól függetlenül valamennyi észlelő, és ugyanazon pálya hosszának kimérését pár nap mulva, többször, újból elvégezte. A pályahosszmérés 2 $^0/_0$-nál kisebb eltérést mutatott, a szögmérés középérték közepes hibájának pedig 0°16′ adódott.]

Zsugorodási tényező megállapítása

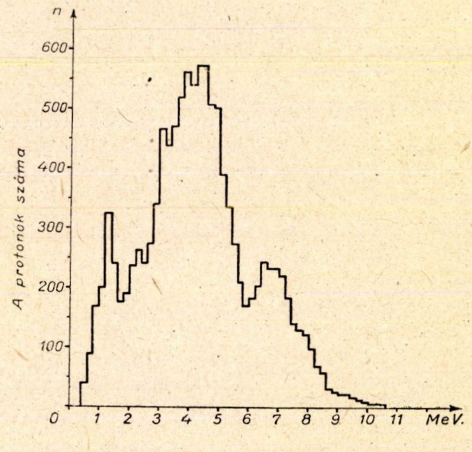
Ismeretes, hogy a magfizikai emulziók előhívás és fixálás után eredeti rétegvastagságukból sokat vesztenek. Az előhívás előtti és utáni rétegvastagság hányadosát szokták nevezni zsugorodási tényezőnek, és a pályák hosszának meghatározásához az emulzió síkjára merőleges irányba eső vetület kiszámításánál ezt tekintetbe kell venni. Méréseinkben a zsugorodási tényezőnek 2,7 értékével számoltunk, amit az előhívás előtti és utáni rétegvastagság 1 μ-os beosztású mérőórával történt lemérésével határoztunk meg. Valamennyi mérésnél — hogy a mérőóra csúcsa az emulziót ne deformálja — az emulzió és a csúcs közé ugyanazon mikroszkóp fedőlemezt helyeztük.

Hatótávolság-energia összefüggés

A mérésekből származó pályák energia értékét MeV-ban LATTES, FOWLER, CUER [5] mérési eredménye alapján állapítottuk meg. Az összefüggés felrajzolásához azonban a YAGODA [6] és a BEISER [7] által megadott ugyancsak fenti szerzők közleményére támaszkodó extrapolációkat is felhasználtuk. Korábbi saját mérések szerint [3] a törölt lemezek hatótávolság-energia összefüggése a LATTES, FOWLER, CUER által közölt adatokkal a mérési hibahatáron belül megegyezik.

MÉRÉSI ADATOK ÉS EREDMÉNYEK

A magfolyamatot kísérő neutronsugárzás energiájának meghatározása a visszalökött protonnyomok kimérésén alapult. Szokásos külső proton forrásul nagy hidrogéntartalmú vegyületből készült fóliát alkalmazni. Jelen méréseknél az emulzió zselatinjának hidrogéntartalma szolgált proton forrásul.



3. ábra. A proton nyomok 0° irányra vonatkoztatott energia eloszlása. (Korrekciók nélküli nyers mérési eredmény.)

A pontszerű neutronforrások fotoemulziós úton való energia mérése közül ez a módszer a legelterjedtebb. A neutron energiáját E_n-nek, a protonét E_p-nek, a neutron és a proton iránya által bezárt szöget Θ-val jelölve, rugalmas ütközés után érvényes az

$$E_p = E_n \cdot \cos^2 \Theta$$

összefüggés. A neutronok irányának a bombázott Be céltábla középpontját és a létrejött protonpálya kezdőpontját öszszekötő egyenest vettük. A mérési eredményeknél csak a fenti irányhoz 15° félnyílású kúpszögbe eső protonok nyomát vettük tekintetbe, és azokat az őket létrehozó neutron irányára vonatkoztattuk. Az energia szerinti eloszlást a 3. ábrán láthatjuk 12 315 pálya kimérése alapján valamennyi mikroszkópos mérési eredményéből összesítve.

Az észlelések természetes effektusa. Korrekciók

A neutronok helyes intenzitás-eloszlásának nyeréséhez a 3. ábrán közölt mérési eredményt korrigálnunk kell

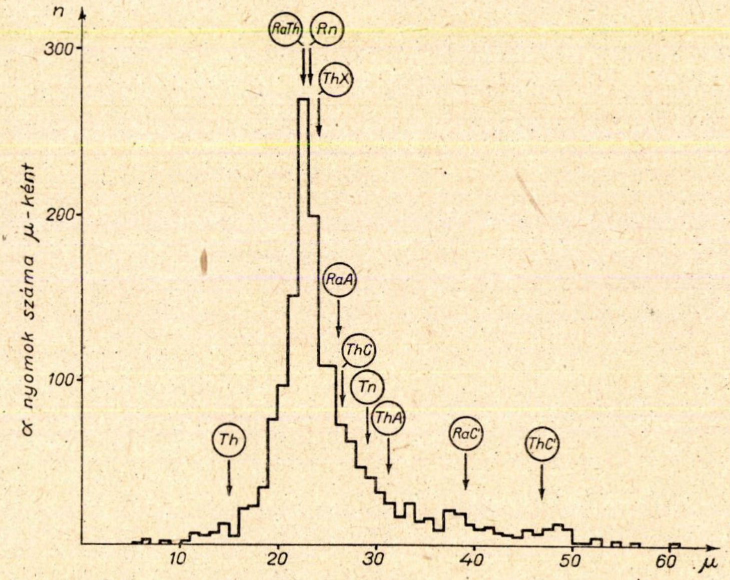
1. a természetes effektus,
2. a neutron-proton ütközési hatáskeresztmetszet energiától való függése,
3. továbbá a különböző hosszúságú pályák adott emulzió vastagságbani eltérő előfordulási valószínűsége miatt (geometriai korrekció).

A mérések természetes effektusa a kozmikus sugárzáson kívül a magfizikai emulziók, illetve az azokat hordozó üveglemezek — sajnos számottevő — rádioaktív szennyeződésétől származik.

Erre vonatkozóan az irodalomban is több utalás [8] található. Megállapítására összehasonlító méréseket végeztünk. Ugyanazon vízgőzben törölt lemez egyik felét közvetlenül a törlés után előhíva az emulzióban legfeljebb egy-két pályát találtunk. Ugyanazon lemez másik felében amit 10—12 napig a besugárzott lemezekkel kb. azonos hőmérsékleten és légnedvesség mellett, de „neutronsugárzás mentes“ helyen más épületben tartottunk, 45—50 nyomot mérhettünk ki — az elhanyagolt néhány α csillagon kívül.* A pályák hossza a természetes rádioaktív α nyomok hosszának értékével volt megegyező. A pályák eredetének biztos megállapítására és egyben méréseink természetes effektusának pontos meghatározásához összehasonlító vizsgálatokat végeztünk a gyártás után néhány hónappal előhívott, de besugárzatlan emulziókon is. Ezen emulziókban jóval több (1800 mm^2-en közel 2000) pályát találtunk, melyeknek hossz szerinti eloszlása éles maximumot mutatott 23 μ-nál (4. ábra) és irányuk a szögmérések szerint gömbszimmetrikus eloszlású. Helyes tehát, ha méréseink természetes effektusául az összehasonlító törölt lemezeken végzett mérések eredményéből nyert pályák 15° félnyílású kúpszögbe eső százalékát tekintjük.

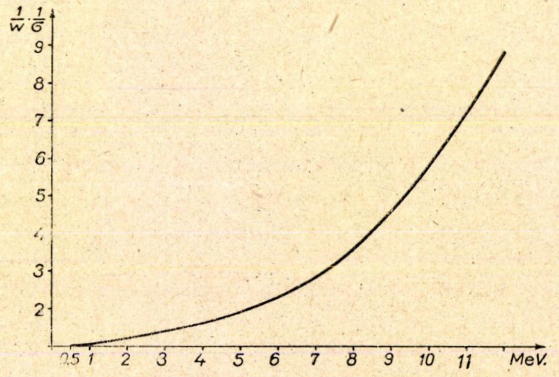
* Külön megvizsgáltuk azt is, hogy a fenti rádioaktív szennyeződés ténylegesen az emulziók alaptulajdonsága, vagy csak a törlés utáni esetleges hibás kezelésből származik-e. Ezért megfigyeltünk és feljegyeztünk valamennyi — a természetes effektus vizsgálatánál mutatkozó — pályát, hogy az az emulzió mely síkjában helyezkedik el. A törölt emulziókon észlelt pályák kizárólag az emulzió üveg felőli oldalában voltak találhatók és a fent jelzett számon kívül észleltünk még sok olyan nyomot is, melyek az üvegből kiindulva nem voltak teljes hosszukban az emulzió térfogatában. Hibás kezelésből származó szennyezés viszont nyilván elsősorban az emulzió felszínén hozott volna létre nyomokat.

Észleltünk kivételesen a 4. ábrán megadottnál hosszabb pályát is, de ezek összes száma sok mérésből is igen kevés — 0,2 % alatt — maradt és



4. ábra. A magfizikai emulziók rádioaktív szennyeződésétől származó α nyomok hatótávolság szerinti eloszlása besugárzatlan emulzióban. ($n = \alpha$ nyomok száma μ-ként.)

valamennyi különböző hosszúságú volt. E pályák kozmikus sugárzásból származnak és mivel a mérési eredményt nem befolyásolhatják jelentékenyen, ezért



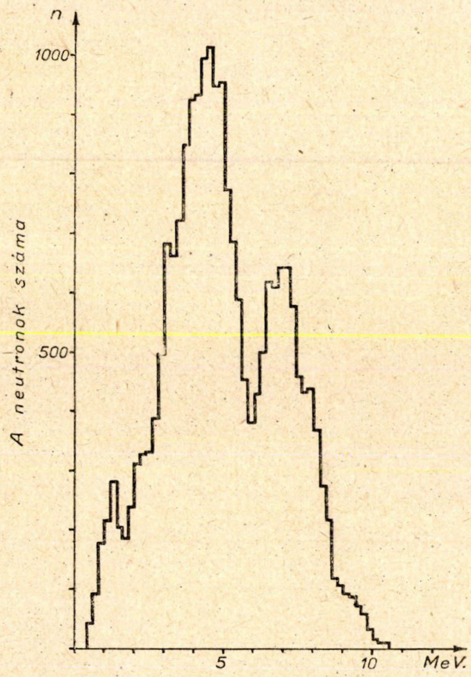
5. ábra. Egyesített korrekció 100 μ vastag emulzióra. (Geometriai és n—p ütközési hatáskeresztmetszet korrekciók.)

a természetes effektus megállapításánál eltekinthettünk azoktól. A természetes effektus levonása után nyert eloszláson a szükséges további két korrekciót egyesítve végezzük el. A különböző hosszú nyomok eltérő előfordulási valószínűségét

(W) 100 μ vastag emulzióra RICHARDS [9] nyomán számoltuk ki. A neutron-proton ütközési hatáskeresztmetszet (σ) összefüggésére az adatokat az irodalomból [10] vettük. Az egyesített korrekciót fenti két érték reciprokának szorzatával nyerjük és azt az 5. ábrán mutatjuk be.

A NEUTRONOK ENERGIA SZERINTI ELOSZLÁSA. DISZKUSSZIÓ

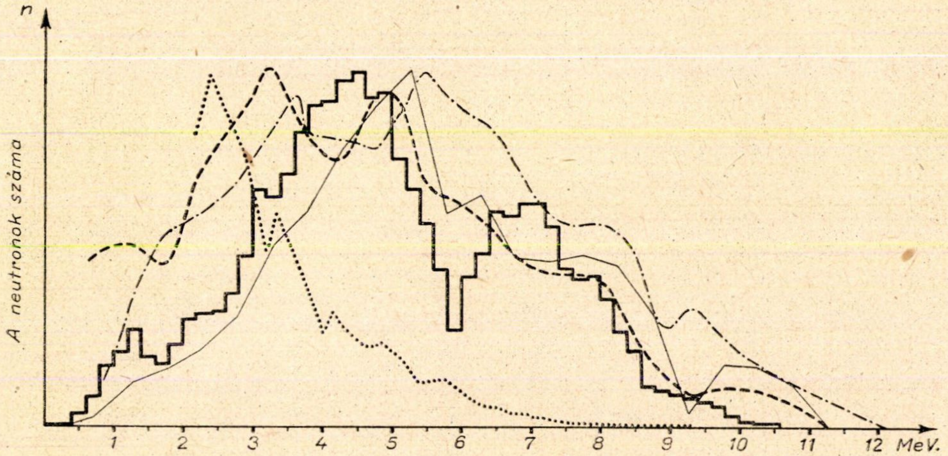
A 6. ábrán tüntetjük fel a korrekciók után nyert eloszlási függvényt, melyet a leírt kis-kiterjedésű Po-Be neutronforrás energia szerinti eloszlásának tekinthetünk. Ezek szerint a neutronforrás, illetve a $Be^9(\alpha, n)C^{12}$ atommagfolyamatot kísérő neutronok maximális energiája 10,7 MeV. A neutronok energia szerinti eloszlásában 1,3; 4,4 és 6,9 MeV-nál összesen három jól kiemelkedő maximum látható. További maximum helyének megállapítása igen kétes volna. Legnagyobb intenzitású a 4,4 MeV-nál mutatkozik. A mérési eredményeket összehasonlítva az irodalomból legismertebb [11], illetve legújabb [12] eredményekkel (7. ábra), így elsősorban WHITMORE és BAKER [11] sokat idézett energia-spektrumával, elég lényeges eltérést észlelünk a maximumok számában és helyében. Különösen feltűnő ez az intenzitásmaximumnál, ahol az idézett külföldi szerzők munkájában 3,2 és 4,8 MeV-nál mutatkozó két maximum helyett a jelen vizsgálatok eredménye csak egyetlen határozott maximumot állapít meg. WHITMORE és BAKER mérési eredményéből a C^{12} atommag 2,5 MeV-os gerjesztési nívójának biztos létezésére következtet és ezen energiaspektrumhoz hasonlót kapott több más szerző is különböző módszerrel végzett újabb mérésekben [12], [13].



6. ábra. A Po-Be-neutronforrás energiaspektruma a végzett mérésekből az összes szükséges korrekcióval.

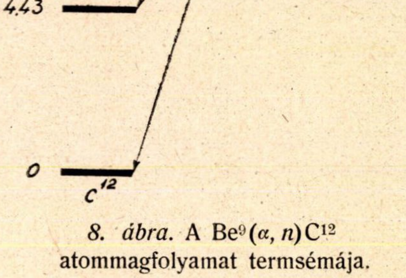
Nincs azonban eltérés a neutronok energia szerinti eloszlásában GUIER, BERTINI és ROBERTS [14] vékony rétegen történt méréseivel való összehasonlításban. Utóbbi szerzők a $Be^9(\alpha, n)C^{12}$ atommag folyamatot kísérő neutronsugárzást a sugárzás irányához viszonyított két irányban (0°, 180°) mérték és vizsgálatuk eredménye szerint a kibocsátott neutronok a C^{12}-es atommag alap-, és két gerjesztési nívójához (4,2 és 7,5 MeV) tartozik.

Mi is ugyanezen három energiacsoportot észleltük. A 6,9 MeV-nál mutatkozó maximum felel meg az alapállapotnak és rendre tovább a 4,4 MeV-os

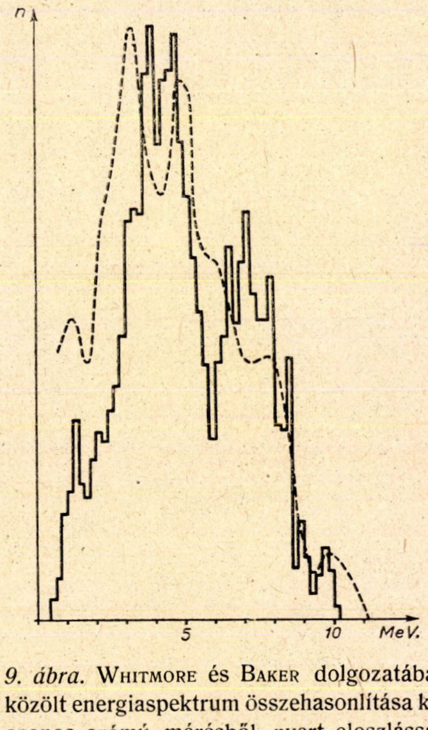


7. ábra. 6. ábrán közölt Po-Be energiaspektrum egybevetése néhány irodalmi eredménnyel. (A neutronok száma a mérési adatok mennyiségétől függetlenül a maximumban közös ordináta értékkel.)

···········	BERNARDINI	(1936)
————	DEMERS	(1945)
— — — —	WHITMORE—BAKER	(1950)
—·—·—	ELLIOT, McGARRY, FAUST	(1954)



8. ábra. A $Be^9(\alpha, n)C^{12}$ atommagfolyamat termsémája.



9. ábra. WHITMORE és BAKER dolgozatában közölt energiaspektrum összehasonlítása kb. azonos számú mérésből nyert eloszlással.

maximum az első (4,2 MeV) végül az 1,3 MeV-nál mutatkozó pedig a második (7,5 MeV) gerjesztési nívónak. A mérések vastag rétegen történtek, tehát természetes, hogy a spektrumban az energiavonalak helyett szélesebb, egymást részben fedő sávok jelentkeznek. Ezért jelen mérésünk nem is alkalmas a C^{12} atommag energianívóinak meghatározására, vagy esetleg az arra vonatkozó újabb irodalmi adatok [15] módosítására (8. ábra). Annyi azonban minden kétséget kizárólag megállapítható, hogy a 4,2 MeV alatti gerjesztési nívónak megfelelő maximum a neutronok energiájának mérési eredményünk szerinti eloszlásában nem mutatkozik.

Az intenzitásmaximumban kettőséget WHITMORE és BAKER-ével kb. azonos számú mérésnél mi is észleltünk, mint az a 9. ábrán adott összehasonlításból látható. Az észleléseket tovább folytatva, a lemért pályák számát jelentősen növelve a maximum kettőssége azonban megszűnt.

A végeredményekben mutatkozó eltérés okát a neutronforrás, valamint a mérések geometriájának különbözőségében, továbbá a külföldi szerzőkénél lényegesen nagyobb észlelési számnak kell tulajdonítanunk. Ez utóbbi miatt a mérési eredményünkben mutatkozó statisztikai ingadozás sokkal kisebb.

* * *

Ezen a helyen is köszönetet mondok SZALAY SÁNDOR professzornak munkámat jelentősen segítő, érdeklődő támogatásáért és a Po preparátum elkészítéséért is. A fáradságos mikroszkópiai mérések elvégzésében BUJDOSÓ ERNŐ, HALÁSZ TIBORNÉ, JOST FRANCISKA, MEDVECZKY LÁSZLÓNÉ és PERCZEL DÉNESNÉ volt segítségemre, akiket lelkiismeretes munkájukért köszönet illet.

Összefoglalás

Kisfelületű Po preparátum α sugaraival bombáztunk vastag Be réteget. A $Be^9(\alpha, n)C^{12}$ atommagfolyamatot kísérő neutronsugárzás energiaszerinti eloszlását a magfizikai emulzióban létrejött visszalökött protonok nyomainak megméréséből a szükséges korrekciók elvégzésével állapítottuk meg. A 12 000-nél több pálya méréséből nyert energiaspektrum három maximumot mutat (1,3; 4,4; 6,9 MeV) és a neutronenergia észlelt felső határa 10,7 MeV.

A Po-Be neutronforrásokra vonatkozó az irodalomból ismeretes eredményekhez viszonyítva az energia szerinti eloszlásban jelentős eltérés észlelhető. Az eltérés okai: jelen eredmény lényegesen több mérési adatra támaszkodik, továbbá a besugárzási geometria különbözősége, ami a kisfelületű forrás alkalmazása miatt az észlelésben igen kedvező lehetőségeket teremt.

Debreceni Fizikai Kutató Intézet.

IRODALOM

[1] J. W. Spinks, G. A. R. Graham: Can. J. Research **28** A. 60 (1950).
[2] A. Szalay: *Z. f. Phys.* **112**, 29 (1938).
[3] Medveczky L.: *Fiz. Szemle* II. 117 (1952).
[4] M. Wiener, H. Yagoda: *Rev. Sci. Inst.* **21**, 39 (1950).
[5] C. M. G. Lattes, P. H. Fowler, P. Cuer: *Proc. Phys. Soc.* **59**, 883 (1947).
[6] H. Yagoda: Radioactive Measurements with Nuclear Emulsions, John Wiley & Sons. New York (1949).
[7] A. Beiser: *Revs. Modern Phys.* **24**, 273 (1952).
[8] H. Yagoda, N. Kaplan: *Phys. Rev.* **73**, 634 (1948).
Chas. H. Millar: *Can. J. Phys.* **31**, 262 (1953).
S. Deutsch, E. C. Dood: *Nouvo Cimento* **10**, 853 (1953).
[9] H. T. Richards: *Phys. Rev.* **59**, 796 (1941).
[10] W. Sleator: *Phys. Rev.* **72**, 207 (1947).
E. Lampi: *Phys. Rev.* **80**, 853 (1950).
E. Bretscher, E. B. Martin: *Helv. Phys. Acta* XXIII. **15** (1950).
Neutron cross sections. A compilation of the AEC neutron cross section advisory group. AECU 2040 (1952).
E. M. Haffner, W. F. Hornyak, C. E. Falk, G. Snow, T. Coor: *Phys. Rev.* **89**. 204 (1953).
Lásd ezen kívül még:
L. Rosenfeld: *Nuclear Forces*, 1948. Amsterdam, 121. o. felsorolt és
Robert K. Adair: *Revs. Mod. Phys.* **22**, 249 (1950) 2. ábra alatt idézett irodalmat.
[11] G. Bernardini: *Züricher Vorträge* 1936. L. E. Bretscher: *Kernphysik* 58—62. o. J. Springer (1936).
P. Demers: Nat. Research Council Can N. R. C. No 1571 (1945).
B. G. Whitmore, W. B. Baker: *Phys. Rev.* **78**, 799 (1950).
[12] J. O. Elliot, V. I. McGarry, W. R. Faust: *Phys. Rev.* **93**, 1348 (1954).
[13] H. Gursky, B. Winnemore, D. A. Cowan: *Phys. Rev.* **91**, 209 (A), (1953).
[14] W. H. Guier, H. W. Bertini, J. H. Roberts: *Phys. Rev.* **85**, 426 (1952).
[15] F. Ajzenberg, T. Lauritsen: *Revs. Mod. Phys.* **24**, 321 (1952).

CSOPORTOKRÓL, AMELYEKNEK ÖSSZES NEM-TRIVIÁLIS HATVÁNYAI CIKLIKUS ALCSOPORTOK

SZÁSZ FERENC

Szele Tibor professzor, korán elhunyt szeretett Mesterem emlékének

A korábbi dolgozatok egyikében sikerült leírni az összes olyan csoportot, amelynek bármely ciklikus alcsoportja a tekintett csoportnak bizonyos hatványa, éspedig ez a csoportosztály éppen a ciklikus csoportok osztálya [2]. Most ennek az itt említett csoportelméleti problémának megfelelő duális problémát fogjuk tárgyalni, amelyet egy korábbi dolgozat kéziratának átolvasása után FUCHS LÁSZLÓ professzor vetett fel.

Egy tetszőleges (tehát nem szükségképpen kommutatív) és multiplikatív módon írt *G csoport k-adik hatványa* olyan G^k alcsoport, amelyet a G csoport összes eleme k-adik hatványaiból álló halmaz generál. Ha a k hatványkitevő 1, 0 vagy -1, akkor a G^k hatványt *triviális*nak nevezzük.

Egy tetszőleges G csoportot akkor fogunk *T-tulajdonságú csoport*nak nevezni, ha a G csoportnak bármely nem-triviális hatványa ciklikus. Például bármely ciklikus csoport T-tulajdonságú.

Jelen dolgozatunknak a célja annak megmutatása, hogy *a T-tulajdonság az összes* (vagyis nemcsak a kommutatív) *csoportok közt a ciklikus csoportokat jellemzi.* Tehát az összes nem triviális hatványok csak úgy lehetnek ciklikusak, ha a triviális hatványok is ciklikusak.[1]

Most mindenekelőtt néhány terminológiai megjegyzést teszünk. Minthogy a tekintett csoportok kommutativitását nem tételezzük fel, *multiplikatív* írásmódot használunk. A csoport K részhalmazával generált alcsoportot a $\{K\}$ szimbólummal, a g csoportelem rendjét az $O(g)$ szimbólummal fogjuk jelölni. Egy G csoportot *végesen generált*nak nevezünk, ha van a G csoportnak olyan véges F részhalmaza, amellyel $G=\{F\}$. Végesen generált Abel-féle csoport mindig ciklikus csoportok direkt szorzata. Egy csoportot *torziómentes*nek nevezünk, ha a csoportban az 1 egységelem az egyetlen végesrendű elem. *Torziócsoport*nak az olyan csoportot nevezzük, amelynek minden eleme végesrendű.[2]

Ezek után kimondhatjuk a tételt:

[1] Az természetesen triviális, hogy egy tetszőleges csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha a csoportnak minden (vagyis egyáltalán nem szükségképpen csak a nem-triviális) hatványa ciklikus.

[2] Megjegyezzük, hogy a tárgyalásainkhoz szükséges és más csoportelméleti fogalmakkal és kérdésekkel bővebben foglalkozik például az [1] szakkönyv is.

TÉTEL. *Egy tetszőleges G csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha a G csoport T-tulajdonságú.*

BIZONYÍTÁS. Legyen G tetszőleges T-tulajdonságú csoport. Legyen előbb G torziócsoport, továbbá g ennek tetszőleges eleme és $O(g)=n$. Ha $k>1$ olyan természetes szám, amelyre $(n,k)=1$ teljesül, akkor létezik olyan r természetes szám, amely kielégíti a $kr\equiv 1 \pmod n$ kongruenciát. Van olyan h elem a G csoportban, hogy $G^k=\{h\}$. Ezért valamilyen m kitevővel fennáll a $g^k=h^m$ egyenlet, amiből $g=h^{mr}$ következik. Tehát $g\in\{h\}$ ennélfogva $G=\{h\}$.

Ha pedig a G csoport tartalmaz végtelenrendű elemeket is, akkor a $G^2=\{a\}$ és $G^3=\{b\}$ egyenletekben szereplő a és b elem nyilván végtelenrendű. A k-adik csoporthatvány definíciója szerint a G^k alcsoport a G csoportban normálosztó, ezért $\{a\}$ és $\{b\}$ is normálosztó. Ekkor van olyan r és s kitevő, hogy $b^2=a^r$ és $b^{-1}ab=a^s$, ennélfogva írhatjuk, hogy $b^2=b^{-1}a^rb=(b^{-1}ab)^r=a^{rs}=b^{2s}$, ami csak úgy lehetséges, ha $2s=2$ és $s=1$, vagyis $ab=ba$. Legyen most x tetszőleges elem a G csoportban, akkor $x=x^{-2}\cdot x^3$ és $x^2\in\{a\}=G^2$ illetve $x^3\in\{b\}=G^3$ miatt nyilván $G=\{a,b\}$, vagyis G T-tulajdonságú végesen generált torziómentes Abel-féle csoport. Ezért a G csoport a végesen generált Abel-féle csoportok alaptétele szerint csak úgy lehet T-tulajdonságú, ha ciklikus.

Fordítva, természetesen minden ciklikus csoport T-tulajdonságú, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

Végül hálás köszönetet mondok FUCHS LÁSZLÓ professzornak, hogy ezt a csoportelméleti problémát számomra szives volt felvetni, továbbá ezen dolgozat kéziratának elolvasása után dolgozatommal kapcsolatos értékes javaslatait és észrevételeit is szives volt megtenni.

Debrecen.

IRODALOM

[1] A. G. KUROS, Теория групп, Москва (1953).

[2] F. SZÁSZ, On groups every cyclic subgroup of which is a power of the group, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (Sajtó alatt.)

KÖNYVISMERTETÉSEK

A. O. Gelfond „Differenciaszámítás" című könyvének ismertetése

A. O. GELFOND „Differenciaszámítás" című munkája, amelyet az Akadémiai Kiadó adott közre, e tárgykörben az első *magyar nyelvű* összefoglaló munka.

A differenciaszámítás az elmélet és gyakorlat számára egyaránt jelentős stúdium, melynek hazai művelése terén komoly kezdeményezések és eredmények mutathatók fel. Az elmélet klasszikus irányában JORDAN KÁROLY ért el jelentős eredményeket, de munkássága nálunk eléggé elszigetelt maradt. Számos tudományos közlemény mellett e tárgykör klasszikus fejezeteit összefoglaló nagyterjedelmű munkát írt, amely 1939-ben Magyarországon jelent meg angol nyelven „Calculus of Finite Differences" címen. (E munka jelentőségére utal az a körülmény is, hogy a második világháború után az Egyesült Államokban is kiadták, bár szerzője erről csupán utólag szerzett tudomást.) A differenciaszámítás klasszikus problémaköréből fakadt a konstruktív függvénytan, mely alapvető, jelentős eredményeket köszönhet magyar matematikusoknak. FEJÉR LIPÓT e téren kezdeményező munkásságát méltó módon folytatta számos tanítványa, mint ALEXITS GYÖRGY, GRÜNWALD GÉZA, ERDŐS PÁL, FELDHEIM ERVIN, FREUD GÉZA, TURÁN PÁL és mások.

Az a körülmény, hogy e stúdium hazai művelésében éppen a klasszikus terület nem keltett kellő érdeklődést, indokolja, hogy a könyv áttekintő ismertetése előtt — igen röviden — a differenciaszámítás elméletének történeti vonatkozásait ismertessük.

1. A differenciaszámítás klasszikus problémái az interpoláció, a mechanikus kvadratúra, a sorösszegezés és az ezzel rokon differenciaegyenletek kérdései köré csoportosultak. NEWTONt csillagászati problémák vezetik a mechanikus kvadratúra és interpoláció kérdéseihez. STIRLING az itt felmerülő problémák tárgyalásával vezeti be a hatványfüggvény helyett az általánosított hatvány fogalmát $(x)_n = x(x-h)\ldots(x-\overline{n-1}\,h))$, amelyet egyes szerzők faktoriálisnak neveznek és amelynek kifejtésénél lépnek fel az ún. Stirling-féle számok.

NEWTON és STIRLING kezdeményező vizsgálatai jellegzetesen az alkalmazások ösztönző hatásának eredményei és a problémák matematikai érdekessége mellett elsősorban a gyakorlat szükségletei adtak impulzust további jelentős eredmények elérésére, valamint újabb problémakörök felvetésére. A legkiválóbb matematikusok, mint EULER, GAUSS, JACOBI, CSEBISEV, MARKOV nevéhez fűződik a differenciaszámítás kialakulása.

EULERtől származik a klasszikus összegezési formula. GAUSS előtt az a feladat állt, hogy az átlagos napi középhőmérsékletet egyes időpontokban mért adatokból határozza meg. Ennek kapcsán a mechanikus kvadratúránál ő tér el először az ekvidisztáns alappontoktól. JACOBI egyszerűsíti GAUSS bizonyításait és általánosítja az eredményeket. HERMITE komplex integrál alakjában állítja elő valamely analitikus függvény és interpolációs polinomjának eltérését. A legkülönfélébb numerikus eljárások, a valószínűségszámítás, a számelmélet, a differenciálegyenletek elmélete is hatásos apparátust nyer e vizsgálatok során és ugyanakkor további lendületet ad elsősorban a differenciaszámítás formális apparátusának kibontakozásához. CSEBISEV és STIELTJES hívják fel először a figyelmet a konvergenciakérdésekre, ami újabb nagy ösztönzést ad a további fejlődésnek, elsősorban az interpoláció és mechanikus kvadratúra kérdéseiben.

TURÁN PÁL GELFOND könyvének magyarnyelvű kiadásához írott előszavában helyesen utal arra, hogy ez a módszereiben eddig egységes és alkalmazási területeiben a matematika számos ágára kiterjedő elmélet itt válik először ketté. BERNSTEIN, FABER, FEJÉR vizsgálatai a konstruktív függvénytannak — a matematika önálló fejezetének — vetik meg alapjait. Röviddel ezután FEJÉR, GELFOND, KALMÁR, NÖRLUND, WHITTAKER és mások a komplex interpoláció kérdéseivel hoznak létre újabb irányzatot a differenciaszámítás elméletében. Emellett a klasszikus irányzat is tovább fejlődik, amely irányban méltán említhetjük meg JORDAN KÁROLY eredményes munkásságát.

A differenciaszámítás elméletének ezt az alakulását tükrözik az eredmények tankönyvszerű feldolgozásai. BOOLE, SELIVANOV és MARKOV munkái a klasszikus elméletet — elsősorban a formális apparátust — dolgozzák fel. Hosszabb szünet után JORDAN KÁROLY „Calculus of Finite Differences“ című említett munkája átfogó tárgyalását és alapos rendszerezését adja az addigi — a klasszikus differenciaszámítás szorosan vett tárgykörébe vágó — irodalomnak. Különös érdeme emellett a könyvnek a gyakorlati alkalmazások, numerikus számítások elősegítése és a történeti vonatkozások gondos feldolgozása.

A konstruktív függvénytani irány, mint említettük, ma már teljesen önállósult és művelői nem is juttatják kifejezésre vonatkozásukat a differenciaszámítás elméletével. Viszont a differenciaszámítás problémáinak a komplex változós függvényekre való kiterjesztése továbbra is az alapvető stúdiumhoz sorolja magát, amiről NÖRLUNDnak 1913-ban megjelent munkája után GELFOND könyve is tanúskodik.

2. A könyv a differenciaszámítás alapvető feladatainak megfogalmazása után öt fejezetben foglalkozik — sorrendben — az interpoláció feladataival, a Newton-sor tárgyalásával, adott elemekkel bíró egész függvény előállításával, függvények összegezésének kérdéseivel, végül a differenciaegyenletek tárgyalásával. A differenciaszámítás formális apparátusának módszeres kifejtését nem tekinti céljának, hanem a szokásos jelölések és összefüggések a felhasználás szüksége szerint kerülnek ismertetésre. A könyv célja sokkal inkább a differenciaszámítás komplex változós függvénytani vonatkozású eredményeinek összefoglalása, és a formális módszerek konvergenciakérdéseinek vizsgálata. Ily módon a munka a konstruktív fügvénytan számos kérdéskörével foglalkozik. Alkalmazásként a komplex függvénytan végesrendű egész függvényeire vonatkozó számos eredményt bizonyít be, továbbá a differenciaszámítás apparátusával kezelhető számelméleti tételeket.

E témakörben az elmúlt két évtized során a Szovjetunióban GELFOND maga igen jelentős eredményeket ért el, melyek nagy részét könyvében feldolgozta.

Szerző előszavában — követésre méltó módon — utal arra, hogy munkájának mely részét tartja alkalmasnak egyetemi előadások anyagául, illetve diplomamunka és disszertáció témaköréül. A könyv tárgyalásmódja, stílusa ugyanakkor nagymértékben elősegíti a könyv olvashatóságát egyetemi hallgatók számára is. Nagy gondot fordít a problémák megfogalmazására, azok megvilágítására, az eredmények elméleti és gyakorlati értékelésére, valamint alkalmazásként példák, feladatok, speciális esetek ismertetésére. A bizonyításokban nem takarékoskodik az analízis alapvető tételeire való hivatkozásokkal — szemben sok szerző „könnyű belátni" szokásos utalásával. A magyarnyelvű kiadás szerkesztése és a fordítás, bár általában gondos munkára vall, de az eredeti mű itt említett előnyös tulajdonságait a fordítás néhol túlságosan hű és így nehézkes fogalmazásai nem adják kellően vissza. Ugyancsak nem könnyítik meg az olvasást az értelemzavaró sajtóhibák sem.*

Tekintettel a differenciaszámítás elméletének a könyvben feldolgozott számos igen értékes alkalmazására, alábbi, fejezetenkénti ismertetésünkben ezek közül néhányat kiemelünk.

3. Első „Az interpoláció feladatai" című fejezetben a feladat megfogalmazásával bevezeti az osztott differenciák fogalmát, majd a Lagrange- és Newton-interpolációs formulákat ismerteti. A maradéktag javításával jut a Csebisev-polinomokhoz. Megemlíti azonban, hogy a Csebisev-abszcisszák használata esetén a numerikus munka fokozódása általában nem teszi indokolttá az ekvidisztans alappontrendszertől való eltérést; ezért NEWTON formuláját erre az esetre is részletesen tárgyalja.

Ezután az osztott differenciák különböző előállításait és a velük elérhető néhány maradéktag becslést ismerteti. E fejezetben rátér a függvényközelítés néhány tételére (Weierstrass, Bernstein tételei, stb.) mind valós, mind komplex interpoláció esetén.

Megemlítjük, hogy a Bernstein polinomok általánosításával jut MÜNTZ ismert tételének következő nevezetes kiterjesztésére:

Az

$$x^{\gamma_k}\, ln^m x,\ m=0,1,2,\dots \nu_{k-1},\ k=1,2,\dots$$
$$0<\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_n<\dots,\ \gamma_n\to\infty$$

függvényrendszer a (0, 1) intervallumban folytonos függvények osztályában teljes, ha még a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu_k+1}{\gamma_k}=\infty$$

feltétel is teljesül.

4. A második fejezetben a komplex változós függvények Newton-sorfejtésével és ezek alkalmazásaival foglalkozik. Néhány aszimptotikus formula, majd a gamma-függvényekre vonatkozó tudnivalók ismertetése után az analitikus egész függvények növekedési rendjének és típusának fogalmát, továbbá néhány rokon fogalmat vezet be. Ezután végesrendű és véges típusú egész függvény Borel transzformáltja szingularitásainak geometriai elhelyezkedését vizsgálja.

* Hogy csak néhányat említsünk a sok közül: 12. oldal első mondatában: ... „fokszáma n-nél nagyobb".. (?); a 104. oldal utolsót megelőző két formulájában a hiányzó szumma jelek; 353. oldalon a címben „differenciál"-egyenletek szerepelnek.

Majd rátér a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}$$

Newton-sor konvergencia abszcisszájának vizsgálatára és a Newton-sorral előállítható függvények tulajdonságainak vizsgálatára, végül analitikus függvények Newton-sorba való fejtésének kérdésére.

Az utolsó paragrafus a Newton-sort tetszőleges interpolációs-alappontok esetén tárgyalja. Alkalmazásként két számelméleti tételt bizonyít be. Ezek egyike a β^n ($\beta > 1$, egész, $n = 1, 2, \ldots$) helyeken egész értékeket felvevő egész függvények növekedési rendjére vonatkozik.

Másik számelméleti alkalmazásként bebizonyítja azt a tételt, hogy az $\alpha \neq 0$ és $\beta = e^\alpha$ (e a természetes logaritmus alapszáma) számok nem lehetnek mindketten algebraiak. E tétel egyszerűbb esete HILBERT azon nevezetes sejtésének — melyet 1934-ben GELFOND és tőle függetlenül SCHNEIDER bizonyítottak be — mely szerint ha $\alpha \neq 0, 1$ és β algebraiak és β irracionális, akkor α^β (valós értéke) transzcendens.

A könyvben bebizonyított tételből egyszerűen következik e és π transzcendens volta. Az előbbi $\alpha = 1$, az utóbbi $\alpha = 2\pi i$ választásával.

Ezen igen mély számelméleti eredményeknek a differenciaszámítás eszközei segítségével való elérése egyrészt megvilágítja a stúdium jelentőségét, ugyanakkor a differenciaszámítás és számelmélet termékeny kölcsönhatására utal, amelynek kiépítésében éppen GELFONDnak vannak kiemelkedő érdemei.

5. A harmadik fejezet címe „Adott elemekkel bíró egész függvény előállítása". Az első paragrafusban foglalkozik először az egész függvény előállításával adott pontsorozaton felvett értékei alapján, majd adott pontsorozaton a szukcesszív differenciálhányadosok értékei alapján. Az első esetben tételeket ad racionális egész és törtfüggvényekkel való interpolációs eljárás konvergenciájára bizonyos egész függvények esetében.

A második paragrafus a komplex sík zárt görbéjén értelmezett momentumok kérdéseivel foglalkozik, elsőnél nem magasabbrendű, normál-típusú egészfüggvények esetében. Az itt adott tételek néhány konkrét alkalmazását tartalmazza a következő paragrafus.

A fejezet utolsó paragrafusa néhány olyan interpolációs feladatot tárgyal, amelyek állandó együtthatós végtelen rendű lineáris differenciálegyenletre vezetnek.

6. A negyedik fejezet a klasszikus elmélet további kifejtéseként a függvények összegezésének problémájából indul ki és előkészíti a differenciaegyenletek tárgyalását. A függvények összegezésének problémája vezet a legegyszerűbb típusú $F(x+1) - F(x) = \varphi(x)$ differenciaegyenlethez s ha a $\varphi(x)$ ismert függvény polinom, akkor a differenciaszámítás elméletében igen jelentős Bernoulli számok és polinomok fogalmához jutunk. Ezeknek alapvető tulajdonságait ismerteti a második paragrafusban, ahol kitér a Bernoulli számok számelméleti vonatkozásaira is. Így bizonyítja STAUDT következő nevezetes tételét: Minden B_ν Bernoulli-szám előállítható a

$$B_\nu = C_\nu - \sum \frac{1}{k+1}$$

alakban, ahol C_ν egész és az összegezés olyan pozitív k értékekre vonatkozik, ahol $k+1$ törzsszám és osztója ν-nek. — E tétel értelmében tehát a a Bernoulli-számok törtrészét indexük prímtényezős előállítása teljesen meghatározza. E paragrafust néhány feladat zárja be.

A fejezet 3. §-a EULER összegezési képletét adja a maradéktag kétféle változatával. Alkalmazásként a Stirling formulát vezeti le. Végül néhány feladat következik.

7. Különös figyelmet érdemel a könyv ötödik — utolsó — fejezete, amely a differenciaegyenletek tárgyalását adja. E tárgy hosszú szünet után GELFOND könyvében került ismét összefoglaló feldolgozásra és a fejezet közel száz oldalon valóban modern tárgyalását nyújtja e témakörnek. A fejezet általában a valós problémákkal foglalkozik és csupán az állandó együtthatós végtelenrendű lineáris differenciaegyenletek tárgyalásánál foglalkozik komplex változós függvénytani vonatkozásokkal, amikor is az egyenlet jobboldala transzcendens egész függvény.

E fejezetben bebizonyítja POINCARÉ alapvető tételét, amely homogén lineáris differenciaegyenlet megoldásainak asszimptotikus viselkedésére vonatkozik az együtthatók asszimptotikus viselkedésére vonatkozó feltevés mellett.

A differenciál- és differenciaegyenletek megoldásfüggvényeinek különböző természetét kívánja megvilágítani HÖLDER következő ismert, nevezetes tételével, amelynek OSTROWSZKI-tól származó — egyik legegyszerűbb — bizonyítását adja: A

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

függvény, amely a

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

igen egyszerű algebrai differenciaegyenletet elégíti ki, egyetlen polinom együtthatós algebrai differenciálegyenletnek sem tesz eleget.

8. A könyv vázlatosan ismertetett anyaga is igazolja, hogy mind alapvető ismeretek nyújtása szempontjából, mind tudományos vizsgálatok forrásmunkájaként helyes és szükséges volt GELFOND könyvének magyarnyelvű kiadása. Érdeklődésre tart számot ezért mind az alkalmazott matematikusok, mind a matematika számos ágának művelői részéről. GELFOND írás- és tárgyalásmódja viszont nagyban megkönnyíti és élvezetessé teszi e stúdium tanulmányozását.

Vincze István
a matematikai tudományok kandidátusa

I. M. Gelfand „Előadások a lineáris algebráról" c. könyvének ismertetése

Egy újabb értékes művel gyarapodott a magyar nyelvű matematikai irodalom: I. M. GELFAND Sztálin-díjas matematikus kitűnő munkáját, amelyben a lineáris algebráról szóló előadásait tette közzé, magyar nyelvű fordításban olvashatja az érdeklődő közönség. Nagy örömmel vesszük kézbe a kiváló szerzőnek e művét nemcsak azért, mert e tárgykörből ez az első magyar nyelvű monográfia, hanem azért is, mert e könyvből az elméletet a modern tudományos felfogásnak megfelelően olyan formában ismerhetjük meg, amely alkalmas arra is, hogy a funkcionálanalízis igényeinek megfelelően végtelen dimenziószámú terekre könnyen általánosítható legyen. A szerző ui. nagy gondot fordít az elméletnek a koordinátarendszertől független részeire, ami által egyes fogalmak és tételek nagyobb szemléletességet, geometriai jelentést is nyernek. Emellett természetesen nagy szerep jut a koordinátáknak is, amint ez a következő áttekintésből is kiviláglik.

Az I. fejezet (Az n-dimenziós tér. Lineáris és bilineáris formák.) az alapfogalmak ismertetésével (mint pl. lineáris tér, bázis, koordináták, lineáris alterek stb.) kezdődik, majd a (valós) euklideszi tér fogalmának bevezetésére kerül sor, a következő axiómákkal definiálva a *skaláris szorzatot:* (x, y) oly valós szám, amelyre 1. $(x, y) = (y, x)$; 2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ minden valós λ-ra; 3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$; 4. $(x, x) \geqq 0$ és itt egyenlőség csak $x = 0$-ra áll. — E fogalom felhasználásával értelmezhető a vektorok szöge, ortogonalitása, továbbá bebizonyítható, hogy minden n-dimenziós euklideszi térben léteznek ortogonális bázisok. A következő § tárgya a bilineáris és a kvadratikus alak. Az affin tér minden x vektorához hozzárendelve egy $f(x)$ számot az $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ feltételeket kielégítő módon, *lineáris függvényről* beszélünk; mármost $A(x; y)$ akkor lesz az x és y vektor *bilineáris függvénye,* ha mind x-nek, mind pedig y-nak lineáris függvénye. Mint ismeretes, az $A(x; y)$ bilineáris formából a neki megfelelő kvadratikus alak az $y = x$ behelyettesítéssel áll elő. A bilineáris formák az $A(x; y) = \sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \eta_k$ alakra hozhatók, ahol ξ_i az x, η_k pedig az y vektor koordinátáit jelöli a tér tetszőleges bázisára vonatkoztatva. A szerző megmutatja, miként transzformálódik a bilineáris alak a_{ik} együtthatóiból álló kvadratikus mátrix új bázis bevezetése esetén. A kvadratikus alakok négyzetösszeggé való átalakításának kétféle módszerét is tárgyalja a könyv (a Lagrange- és a Jacobi-félét). Fontos helyet foglal el a kvadratikus alakok tehetetlenségi törvénye, mely szerint a kvadratikus alak négyzetösszeg-alakjában mindig ugyanannyi pozitív és negatív előjelű együttható lép fel, függetlenül a négyzetösszeggé való átalakítás módjától. A fejezet utolsó §-a a komplex n-dimenziós teret tárgyalja. Az e térben definiált, általában komplex értékű (x, y) skaláris szorzatot ugyanazok az axiómák értelmezik, mint a valós esetben, azzal a különbséggel, hogy most 1. helyett az $(x, y) = \overline{(y, x)}$ reláció[1] teljesülése van kikötve. Az alkalmasan értelmezett bilineáris formáról szerző megmutatja, hogy — a valós esettől eltérően — a hozzátartozó kvadratikus alak által egyértelműen meg van határozva. Ezután az Hermite-féle formák négyzetösszeggé való transzformálásával s a megfelelő tehetetlenségi törvénnyel ismerkedünk meg. (Az $A(x; y)$ bilineáris forma akkor Hermite-féle, ha $A(x; y) = \overline{A(y; x)}$.)

A lineáris transzformációkról szóló II. fejezetet a lineáris transzformációkkal való műveleteknek, valamint a lineáris transzformációk s a mátrixok kapcsolatának az ismertetése vezeti be. Szerző megmutatja, hogy új bázisra való áttérés esetén a transzformáció $\boldsymbol{A}$ mátrixa a $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ mátrixba megy át, ahol $\boldsymbol{C}$ jelöli a régi bázisról az újra való áttérés mátrixát. Külön § foglalkozik az invariáns alterekkel, a lineáris transzformáció sajátvektoraival és sajátértékeivel, amelyek alapvető szerepet játszanak az alkalmazásokban is. A bilineáris alakok és a lineáris transzformációk összefüggésére térve, a szerző bebizonyítja, hogy minden $A(x; y)$ bilineáris alaknak megfelel egy olyan A

[1] A vonás a konjugált komplex értéket jelzi.

lineáris transzformáció, amelyre $A(x;y)=(Ax,y)$, s megfordítva: minden A lineáris transzformációra az utóbbi összefüggés bilineáris alakot definiál. Az A^* *adjungált* transzformáció fogalmára (ez az $(Ax,y)=(x,A^*y)$ képlet alapján egyértelműen van definiálva) épül az *Hermite-féle* vagy *önadjungált* $(A^*=A)$, az *unitér* $(A^*=A^{-1})$ s a *normális* $(A^*A=AA^*)$ lineáris transzformáció definíciója. Alapvető tétel, hogy az n-dimenziós euklideszi tér minden önadjungált lineáris transzformációjának van n páronként merőleges sajátvektora és a hozzájuk tartozó sajátértékek valósak; a sajátvektorok bázisában a transzformáció mátrixa valós elemű diagonális mátrix s a megfelelő kvadratikus alak négyzetösszegként áll elő. Szó van két Hermite-féle kvadratikus alak egyidejű négyzetösszeggé való transzformálásáról is, ha legalább az egyik forma pozitív definit (ez a feltétel nem hagyható el). Az n-dimenziós euklideszi tér unitér transzformációiról ki van mutatva, hogy van nekik n, páronként ortogonális, egység abszolút értékű sajátértékekkel bíró sajátvektoruk, a sajátértékek bázisában a megfelelő mátrix diagonális alakú, a fődiagonálisban egységnyi abszolút értékű komplex számokkal. A lineáris transzformáció normalitása szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a transzformáció mátrixa ortogonális bázisban diagonális alakra legyen hozható. Érdekesek a felcserélhető mátrixokról bizonyított tételek; a főeredmény szerint a komplex n-dimenziós tér két önadjungált lineáris transzformációja akkor és csakis akkor állítható elő egyidejűleg diagonális alakban a tér valamely ortogonális bázisában, ha a transzformációk felcserélhetők. A következőkben az el nem fajuló lineáris transzformációk felbonthatósága van bizonyítva egy el nem fajuló pozitív definit[2] és egy unitér transzformáció szorzatára (a szokástól eltérően GELFAND pozitív definit transzformáción azt érti, amit általában pozitív szemidefinitnek szokás mondani; az el nem fajuló pozitív definit transzformációk a szokott értelemben vett pozitív definit transzformációk). A rákövetkező § a valós euklideszi tér lineáris transzformációit diszkutálja. Minden ilyen lineáris transzformációnak van egy- vagy kétdimenziós invariáns altere, az önadjungáltaknak feltétlenül van egydimenziós invariáns alterük. Önadjungált transzformációk mátrixa szimmetrikus s van oly ortogonális normált bázis, amelyben a transzformáció diagonális alakú mátrixszal bír. A főtengelytranszformáció, majd két kvadratikus forma egyidejű négyzetösszegre való transzformációja után a könyv az ortogonális lineáris transzformációkkal foglalkozik (A ortogonális, ha $(Ax,Ay)=(x,y)$ bármely x, y-ra), megmutatva, hogy a térnek van olyan ortogonális normált bázisa, amelyben az ortogonális transzformáció mátrixa ilyen alakú:

$$\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&& \\
&& 1 &&&&&& \\
&&& -1 &&&&& \\
&&&& \ddots &&&& \\
&&&&& -1 &&& \\
&&&&&& \begin{matrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{matrix} && \\
&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&& \begin{matrix}\cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k\end{matrix}
\end{pmatrix}$$

[2] A „pozitív definit" tulajdonságba már beleértetődik GELFAND szerint az, hogy a lineáris transzformáció önadjungált.

A fejezet utolsó §-ában, amelyet a szerző műve második kiadásában szerepeltet első ízben, a sajátértékek ismert extremális tulajdonságával foglalkozik, előbb a valós, majd a komplex euklideszi térben.

A III. fejezetet (Általános lineáris transzformáció kanonikus alakja.) a lineáris transzformációk Jordan-féle normálalakjának szenteli a szerző. Ha egy lineáris transzformáció lineárisan független sajátvektorainak száma n-nél, a tér dimenziószámánál kisebb (amikor is a karakterisztikus polinomnak vannak többszörös gyökei is), akkor a transzformáció mátrixát nem lehet diagonális alakra hozni, hanem csupán a fődiagonális mentén elhelyezkedő

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

alakú tömbökből álló mátrixszá lehet átalakítani, mégpedig egyértelműen.[3] Ez a mátrix *Jordan-féle normálalakja.* Szerző megmutatja, miként lehet egyszerűen kiszámítani Jordan-féle normálalakra hozott mátrixok skaláregyütthatós polinomjait. A következőkben a mátrixok közt értelmezett hasonlóságról ($\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ hasonlóak, ahol $\boldsymbol{C}$ tetszőleges el nem fajuló mátrix) és ennek invariáns faktorokkal való jellemzéséről van szó. Az $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$ mátrix ($\boldsymbol{E}$ az egységmátrix) k-adrendű aldeterminánsai λ-nak polinomjai; ha ezek legnagyobb közös osztója $D_k(\lambda)$, úgy az

$$E_k(\lambda)=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$$

polinomokat nevezzük az $\boldsymbol{A}$ mátrix invariáns faktorainak. Két mátrix hasonlóságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy invariáns faktoraik megegyezzenek. Egy, a második kiadásba újonnan felvett §-ban GELFAND bebizonyítja, hogy oly mátrixok, melyeknek elemei λ polinomjai, elemi átalakítások (sor- vagy oszlopcsere, sornak vagy oszlopnak nemzérus konstanssal való szorzása, egy sor vagy oszlop polinomszorosának egy másik sorhoz, ill. oszlophoz való adása) révén az egyértelmű

$$\begin{pmatrix} E_1(\lambda) & & & \\ & E_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

alakra hozhatók, ahol az $E_i(\lambda)|E_{i+1}(\lambda)$ oszthatósági reláció teljesül.

A IV. fejezet tárgya: a tenzorfogalom. Mindenekelőtt az R n-dimenziós tér $\bar{R}$ konjugált terét kell értelmezni mint az R-en definiált lineáris függvények lineáris terét. Fontos fogalom R és $\bar{R}$ reciprok bázisai, amelyek exisztenciájának bizonyítása után a két tér egyenrangúságáról, továbbá arról van szó, miként változik koordinátatranszformáció esetén R bázisa s $\bar{R}$-nak reciprok bázisa. Egy $l(x, y, \dots; f, g, \dots)$ függvényt, ahol p számú R-beli

[3] A normálalakban szereplő λ_i számok a mátrix sajátértékei.

$x, y, \ldots$ vektor és q számú $\bar{R}$-beli $f, g, \ldots$ vektor (azaz $\bar{R}$-beli lineáris függvény) szerepel, *multilineáris függvény*nek nevezünk, ha argumentumai mindegyikének lineáris függvénye. R-nek egy $e_1, \ldots, e_n$ bázisát és ehhez $\bar{R}$-nak $f^1, \ldots f^n$ reciprok bázisát véve, pl. egy $l(x, y; f)$ multilineáris függvény az

$$l(x, y; f) = \sum_{i, j, k} a_{ij}^k \xi^i \eta^j \zeta_k$$

alakra hozható, ahol ξ^i az $x = \sum_i \xi^i e_i$, η_j az $y = \sum_j \eta^j e_j$, ζ_k pedig az $f = \sum_k \zeta_k f^k$ vektor koordinátáit jelölik, az a_{ij}^k konstansok értékét pedig a multilineáris függvény segítségével az $l(e_i, e_j; f_k)$ alakban adhatjuk meg. Egy multilineáris függvény új bázisra való áttérés esetén az

$$(*) \qquad a_{ij\ldots}^{rs\ldots} = \sum_{\substack{\alpha, \beta, \ldots \\ \sigma, \tau, \ldots}} c_i^\alpha c_j^\beta \ldots b_\sigma^r b_\tau^s \ldots a_{\alpha\beta\ldots}^{\sigma\tau\ldots}$$

formulák szerint transzformálódik, ahol $\|c_i^j\|$ az e_i, $\|b_i^j\|$ pedig a reciprok f^k bázis transzformációját kísérő mátrix. Mármost egy n^{p+q} számú $a_{ij\ldots}^{rs\ldots}$ elemből álló s a $(*)$ transzformációs képletekkel együtt adott rendszert (p alsó és q felső indexszel) p-szeresen kovariáns és q-szorosan kontravariáns *tenzor*nak nevezünk. A tenzorokkal való műveleteknek s tenzorok kontrakciójának tárgyalása után a szimmetrikus és ferdén szimmetrikus tenzorokról, valamint a szimmetrizálás és alternálás műveletéről kapunk rövid áttekintést.

A könyvhöz két függelék csatlakozik. Az egyik a lineáris algebra egyes számítási módszereivel, mint pl. determinánsok kiszámításával, lineáris egyenletrendszerek megoldásával, az inverz mátrix kiszámításával, a karakterisztikus polinom meghatározásának Krülov- és Danilevszkij-féle módszerével, valamint sajátértékeknek iterációs eljárással történő kiszámítási módjával ismerteti meg az olvasót. A másik függelék az önadjungált lineáris transzformációk sajátértékeinek és sajátvektorainak perturbációval való kiszámítási módját mutatja be. A feladat itt abból áll, hogy meghatározzuk azokat a korrekciókat, amelyeket a sajátértékre és sajátvektorra alkalmazni kell, ha egy ismert sajátértékű és -vektorú A önadjungált transzformációról $A + \varepsilon B$-re térünk át, ahol B szintén önadjungált lineáris transzformáció.

A könyv élvezetes, könnyed stílusban, nagy pedagógiai érzékkel van megírva. A részletes kidolgozás és a világos megfogalmazás nagyon megkönnyíti azon olvasó dolgát, aki e könyvből kíván megismerkedni a lineáris algebra alapvető fogalmaival s eredményeivel. A jobb megértést segíti elő a sok tanulságos illusztráló példa is, míg az elszórtan közölt feladatok azt a célt szolgálják, hogy kidolgozásuk révén még mélyrehatóbban sajátíthassák el az olvasók szerzett ismereteiket.

A jólsikerült magyar fordításon a fordító s a szerkesztő gondos munkája tükröződik. Zavaró sajtóhiba csak igen kevés akad a szépen kiállított könyvben. Örömmel vettük volna, ha a könyvet tárgymutatóval kiegészítve kaphattuk volna kézbe. Úgy véljük, ideje volna, hogy az Akadémia Matematikai Főbizottsága állást foglaljon a „mátrix“ szó írásának kérdésében (a könyvben végig „matrix“ van nyomtatva).

Melegen ajánljuk e könyvet mindenkinek, aki a lineáris algebra főbb eredményeivel kíván megismerkedni.

Fuchs László
a matematikai tudományok doktora

D. Ivanenko és A. Szokolov „Klasszikus térelmélet" című könyvének ismertetése

A fizikai kutatás utóbbi évtizedeinek eredményeképpen kétségtelenné vált, hogy az anyag elemi részecskékből épül fel és az atomfizikai vizsgálatok egyik igen fontos célkitűzése ezen elemi részek alapvető tulajdonságainak, ill. ezen elemi részecskék közti kölcsönhatásoknak a felderítése.

A legrégebben ismert elemi részecske az elektron. Az elektronnal kapcsolatos vizsgálatok megállapították, hogy az elektronnak jól meghatározott töltése és nyugalmi tömege van. Kölcsönhatásba lép azzal az elektromágneses térrel, amelyben mozog. Ezen kísérleti megállapítások után az volt az elektronelmélet célja, hogy az elektronnal kapcsolatos problémákat tisztázza. Ilyen alapvető probléma pl. annak a kvantitatív meghatározása, hogy milyen az elektromágneses térnek a mozgó elektronra gyakorolt hatása, hogyan adható meg a mozgó elektron által keltett elektromágneses tér, van-e és ha igen, milyen ennek az elektron által keltett térnek magával az elektronnal való kölcsönhatása, milyen szerepet játszik a kölcsönhatások során az elektron sajátmágnesesnyomatéka, végül mindezt összefoglalva az elektronelmélet alapvető feladata volt adott külső elektromágneses térben az elektronra érvényes mozgásegyenleteknek a meghatározása.

A klasszikus elméletben, századunk elején LORENTZ foglalkozott ezekkel a kérdésekkel és a MAXWELL-elmélet általánosításaival megvetette a modern elektronelmélet alapjait. A relativisztikus alakba átírt MAXWELL—LORENTZ-elmélet volt a további fejezet az elektronelmélet fejlődésében, mely már a huszas évek elején elérte a maga legtökéletesebb formáját. Annak ellenére, hogy a továbbiakban számos érdekes, újabb kísérleti eredmény vált ismeretessé, mint amilyenek pl. a harmincas évek elején felfedezett Cserenkov-effektus és később a negyvenes években a betatron kísérletekkel kapcsolatban a „világító elektron" problémája, az elektronelmélet fejlődésének a történetében hosszabb, kissé terméketlenebb időszak következett be. A modern „klasszikus" elektronelmélet csak 1938-ban DIRAC alapvető vizsgálataival indult meg. Ennek valószínűleg az az oka, amint azt DIRAC kifejti, hogy a huszas években a kvantumelmélet annyira lekötötte a kutatók figyelmét, hogy mintegy nem maradt idő az elektronelmélet tovább fejlesztésére. Ezenkívül kétségtelenül fontos volt az a szempont is, hogy sokan remélték, hogy a kvantumelmélet, ill. az annak kvantumelektrodinamika néven ismeretes változata majd automatikusan fogja a problémákat kiküszöbölni. Lassankint azonban nyilvánvalóvá vált, hogy ez a remény hiába való és azóta általánosan elfogadottá vált DIRACnak az a véleménye, hogy az elektrodinamikának, ill. az elektronelméletnek a kvantumelméleti általánosítása előtt, még a klasszikus elméletben át kell hidalni a fellépett nehézségeket és csak azután érdemes a revideált klasszikus elmélet kvantálására gondolni. Így került a klasszikus elektronelmélet az utóbbi két évtizedben ismét az érdeklődés középpontjába.

Időközben azonban mind előtérbe lépett a többi elemi részecskék problémája is. Különösen a magerők kapcsán felismert, mezon-terek problémája vált égetővé, ahol a tér kvantált elméletét dolgozták előbb ki és ezen kvantált elmélet keretei között még súlyosabb problémák jelentkeztek, mint a harmincas évek kvantumelektrodinamikájában. Ekkor az elektronelmélet példája arra indította a kutatókat, hogy kísérletezzenek egy a klasszikus elektrodinamikához hasonló mezodinamika kidolgozásával, hogy a mezonterekkel kapcsolatos alapvető kérdések mélyebb megvilágításba kerüljenek.

Ezekkel a problémákkal foglalkozik IVANENKO és SZOKOLOV könyve, mely néhány hónappal ezelőtt jelent meg (sajnos igen kis példányszámban) az Akadémiai Kiadó kiadásában.

A könyvet a szerzők, amint azt az előszóban olvashatjuk, haladottabb egyetemi hallgatók, aspiránsok és a témakörben kevésbé járatos érdeklődőnek szánják bevezető olvasmányul. A könyv lényegesen különbözik e problémakörről írt más monográfiáktól és elektrodinamikai tankönyvektől. Előismeretként feltételezi a klasszikus elektrodinamika ismeretét, kiegészíti az átlagos ismereteket a relativisztikus elektrodinamika köréből, és előkészít mindazokra az ismeretekre, melyek a terek kvantumelméletének és az elemi részecskék elméletének a tanulmányozásához szükségesek. Ebből a szempontból IVAVENKO és SZOKOLOV könyve a világirodalomban is egyedülálló és igen nagy nyeresége a hazai fizikai szakirodalomnak. Minden kétséget kizáróan jelentékeny hatással lesz az új fizikus generációnkra.

A könyv öt fejezetben és egy igen tartalmas függelékben lényegében véve négy problémakörrel foglalkozik. Ismerteti a DIRAC-féle δ-val végrehajtható számítási technikát, a relativisztikus elektrodinamikát, ill. elektronelméletet, a mezodinamikát és végül a függelékben az elektromágneses vákuummal kapcsolatos problémákat.

A továbbiakban ezeket a nagyobb egységeket fogom kissé részletesebben ismertetni.

1. Az első három fejezet a „δ-függvény" általános elméletével foglalkozik és megmutatja, hogyan lehet a GREEN-függvényt megkonstruálni az elliptikus parciális differenciálegyenletek körébe vágó jól ismert klasszikus problémák esetében, majd bemutatja a „δ-függvény" alkalmazását egyes hiperbolikus és egyéb időtől függő differenciálegyenletek megoldásánál. A könyvnek ez a része, mely az egész mű terjedelmének kb. ötödrészét teszi ki, kevésbé szerencsés és matematikailag több helyen súlyosan kifogásolható. A szerzők maguk is azt írják a könyvük 1948-ban megjelent első kiadásához írt előszóban, hogy ezekkel a fejezetekkel többek között az a céljuk, hogy felhívják a matematikusok figyelmét ezen a fizikusok szempontjából oly fontos számítási módszer exakt megalapozására és kifejlesztésére. Azóta a disztribucióanalízis kidolgozásával ez megtörtént. A könyv második kiadásakor 1950-ben már ez az új módszer ismeretes volt és széleskörű alkalmazást nyert a matematikai fizikában. Igen sajnálatos, hogy a második kiadás során e fejezetek átdolgozása nem történt meg és igen kívánatos lenne, ha erre esetleges további kiadás során sor kerülne.

Sajnálatos módon az egyetemi analízis oktatásunk egyelőre nem jut el addig, hogy akár a disztribuciók elméletének elemei megalapozását adná, éppen ezért lenne igen fontos, hogy lényegében ezt a módszert ismertető bevezető tankönyvben az eljárás matematikai alapjai pontosabban lennének körvonalazva. Céltalannak minősíthető pl. az 1. §-ban a „δ-függvényre" érvényes alapvető relációnak a középértéktétel segítségével való bizonyítása, amikor a „δ-függvény" definíciója DIRAC 1926-os eredeti, azóta sokat kritizált, módszerével történik. Ismeretes, hogy ezen definíció szerint a $\delta(x'-x)$ egy olyan függvény, mely az egész valós tengelyen eltűnik eltekintve az $x'=x$ pontot, ahol úgy válik végtelenné, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x'-x)\,dx' = 1$$

legyen. Hasonlóképpen nem célszerű a „δ-függvényt" folytonos függvények sorozatának határértékeként előállítani, mikor ma már ismeretes, hogy ezen függvénysorozatoknak nincs határértékük.

Helyesebb lett volna talán a DIRAC-féle δ-t, ha már nem kívánunk a disztribúciók elméletének részleteivel foglalkozni, úgy bevezetni, hogy az nem más, mint egy bizonyos (pl. mint az a fizikai alkalmazások szempontjából sokszor elegendő, folytonos) függvények halmazán értelmezett integráloperátor magja. Ily módon el lehetett volna érni azt, hogy az olvasó előtt világossá váljék, hogy végeredményben az alkalmazott számítási technika korrekt.

Vonatkoznak az itt elmondottak a GREEN-függvénynek a DIRAC-féle δ-val való előállítására is.

Kétségtelen, hogy ezeknek a kérdéseknek a tisztázása terén még sok tenni való van, az általános elvi kérdések tisztázásán túlmenően is és igen helyes a szerzőknek az a törekvése, hogy ezekre a kérdésekre világosan felhívják a matematikusok figyelmét. A kiválasztott problémák különben önmagukban is érdekesek és kiválóan alkalmasak a DIRAC-δ segítségével történő számítási technika elsajátítására.

2. A könyv legjelentékenyebb része a klasszikus elektrodinamikáról szóló fejezet, mely magasabb szempontból összefoglalja az elektromágneses tér relativisztikus elméletét és a modern elektronelméletet. Az előzőkben már említettem, hogy miért került az utóbbi években a klasszikus elektronelmélet az érdeklődés középpontjába. A fejezet bevezető részéből azonban megtudhatja az olvasó, hogy miért szolgáltat az az elmélet számos atomfizikai alkalmazás során is olyan jó közelítést, holott ismeretes, hogy az atom- és molekula fizikai jelenségek kielégítő leírását általában csak a kvantumelmélet tudja biztosítani és a klasszikus elmélet csak olyankor szolgáltat a kvantumelmélettel megegyező eredményt, ha a h PLANCK-féle állandó zéróhoz tart. Számos atomfizikai alkalmazásnál az elektron COMPTON-hullámhossza: $\Lambda = h/p$, vagy kisebb sebességnél $\Lambda = h/m_0 v$ (ahol p az elektron impulzusa, m_0 a nyugalmi tömege és v a sebessége), általában megegyezik az atomokban és molekulákban előforduló méretekhez képest. Ilyenkor a jelenségek leírásánál nem nélkülözhető a kvantummechanika. Más esetekben azonban, amikor az elektronok sebessége megközelíti a fénysebességet (pl. betatronban felgyorsított elektronok, relativisztikus sebességekkel mozgó egyéb részecskék esetében) a COMPTON-hullámhossz elhanyagolhatóan kicsi: $\Lambda \to 0$. Ekkor a klasszikus számítások közel a helyes eredményeket adják és a kvantumelmélet csak jelentéktelen korrekciókat szolgáltat. A modern klasszikus elektronelmélet célkitűzése ezen jelenségek kvantitatív tárgyalása. Ez a fejezet igen nívósan és ugyanakkor didaktikailag is elsőrendűen vezeti be az olvasót a problémakörbe.

Az elektronelméletben és ugyanúgy a többi elemi részecskék elméletében is (mutatis mutandis) elméleti szempontból talán a legalapvetőbb és legérdekesebb kérdések egyike az, hogy milyen elemi részecske modellből indulunk ki. Véges kiterjedésűnek vagy pontszerűnek tekintjük-e az elektront, ill. a részecskét, tömegét mechanikai vagy elektromágneses eredetűnek tételezzük-e fel, stb. Eltekintve az utóbbi 1—2 évben publikált néhány kezdeményezéstől, amelyek, ha igen nagy reményekre jogosítanak is, még távol vannak a probléma kielégítő megoldásától, az elemi részecskéknek sem a klasszikus, sem pedig a kvantumelmélete nem tudta teljesen elfogadhatóan felderíteni az elemi részecskék természetének ezen legelemibbnek látszó problémáit.

Az elektromágneses tömeggel kapcsolatban pl. a probléma lényegében a következőképpen fogalmazható meg. Minden töltés maga körül elektromágneses teret kelt. Ennek a térnek az energiáját és impulzusát a MAXWELL—LORENTZ-elmélet alapján (relativisztikus, vagy nemrelativisztikus közelítésben) egyszerűen kiszámíthatjuk. Ez a számítás azt eredményezi, hogy a tér impulzus- és energiakomponensei abban a koordinátarendszerben, melyben az elektron az x-tengely mentén v sebességgel mozog, a következők:

$$G_1 = \frac{U_0 v}{c^2 k}\left(1+\frac{1}{3}\right); \quad G_4 = \frac{iU_0}{ck}\left(1+\frac{1}{3}\beta\right),$$

ahol

$$k = \sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad c = \text{fénysebesség}$$

és

$$U_0 = \frac{1}{8\pi}\int E^2(dv_0)$$

az elektron által keltett tér teljes energiája az elektronnal együttmozgó koordinátarendszerben, ahol a tér elektrosztatikus.

LAUEnak egy — a könyvben részletesen diszkutált — eredménye alapján könnyen belátható, hogy ezek a G_ν komponensek szemben a m_0 nyugalmi tömegű és v sebességgel mozgó elektron impulzus-energia-négyes vektorával

$$\mathfrak{p} = \frac{m_0 \mathfrak{v}}{k}, \quad p_4 = \frac{iE}{c} = \frac{m_0 ci}{k}$$

nem alkotnak négyesvektort. Ez egy nagyon fontos eredmény. A klasszikus elektronelmélet alapján ugyanis LORENTZ, ABRAHAM és POINCARÉ bizonyos mértékig felelevenítve és részleteiben is továbbfejlesztve J. J. THOMSON elképzelését, feltették, hogy az elektron nyugalmi energiája (ami az EINSTEIN-féle reláció értelmében megegyezik az $m_0 c^2$ szorzattal), azonos az elektron által keltett elektromágneses tér energiájával, az elektron impulzusa pedig megegyezik ennek a sajáttérnek az impulzusával.

Ily módon, bár az az elmélet egyébként számos érdekes eredményre vezetett, nyilvánvalóvá vált, hogy az elektron tömege nem lehet pusztán elektromágneses eredetű, az azonban kétségtelenné vált, hogy a tömeg egy része elektromágneses eredetű, amint azt az olvasó e fejezetnek az elektron mozgásegyenletének a problémájával foglalkozó fejezeteiben részleteiben is kifejtve megtalálhatja.

Ezzel azonban ez a kérdés még távolról sincsen elintézve. A helyzet ugyanis az, hogy az elektron fenti elektrosztatikus sajátenergiája és vele együtt az elektron nyugalmi tömege pontszerű elektron esetében végtelenné válik. Véges kiterjedésű elektron esetében pedig szintén speciális nehézségek merülnek fel. Részint a véges térbeli kiterjedésű elektron a relativisztikus elektronelméletbe igen nehezen illeszthető be, részben pedig az elektrosztatikus energia kvantitatív értéke lényegesen függ az elektron szerkezetétől, pontosabban attól, hogy milyennek tételezzük fel a töltéseloszlást a véges kiterjedésű elektronban. Függetlenül attól, hogy igen kétséges, hogy az elektronnak ilyen klasszikus értelemben vett szerkezetéről beszélhetnénk, a véges kiterjedésű elektron már a nem-relativisztikus mozgásegyenleteknél is súlyos nehézségeket okoz és nehezen egyeztethető össze az elektromos töltés minden kétségen kívül kvantált voltával.

Annak ellenére, hogy az eddigi kísérletek nem vezettek teljesen kielégítő eredményre, mindezek a problémák egyrészt nyilvánvaló módon elintézhetőek a klasszikus elmélet keretei között, hiszen pusztán az e elektrontöltés, az r_0 elektronsugár (gömbszimmetrikusnak feltételezve az elektront) és a c fénysebesség felhasználásával a h PLANCK-féle állandó bevezetése nélkül megkonstruálható egy tömeg jellegű mennyiség

$$m_0 = \frac{e^2}{c^2 r_0},$$

mely az elektron tömegével azonosítható. Ilyen körülmények között vizsgálat tárgyává lehet tenni azt a kérdést, hogy voltaképpen mit is jelent az elektron véges kiterjedésének a hipotézise?

Másrészt az elektronhoz rendelhető egy tipikusan kvantummechanikai mennyiség, az elektron COMPTON-féle hullámhossza:

$$\Lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} = \frac{2\pi e^2}{m_0 c^2} \cdot \frac{hc}{2\pi e^2},$$

mely $2\pi \cdot \alpha^{-1} = 2\pi$. 137,02-szer nagyobb ($\alpha$ a finom struktúra állandó), mint az elektronsugár. Ez a COMPTON-hullámhossz megszabja azt a hullámhossz tartományt, melyen belül a klasszikus közelítés helytálló lehet. Ezzel ismét pontos becslést kapunk a klasszikus — és egyben a könyvben ismertetett elmélet — hatósugarára.

Számos érv szól tehát amellett, hogy az elektront pontszerűnek kell tekintenünk. Ebben az esetben azonban ki kell küszöbölnünk az elektrosztatikus sajátenergiával kapcsolatos divergencianehézséget. Az elektronelmélet fejlődése során több ilyen irányú kísérlet történt. A legnevezetesebb ezek között a BORN—INFELD-féle (nem-lineáris), a BOPP—PODOLSKY-féle (magasabb rendű téregyenletekre vezető) és a POMERANCSUK—PAIS—SZOKOLOV-féle (kétszeres térhipozisen felépülő) elektrodinamika. Ezeknek a modern elméleteknek igen részletes kritikai ismertetését találjuk ennek a fejezetnek a további részében.

Majd ezen elvi kérdéseket tartalmazó paragrafusokon túlmenően az elmélet legaktuálisabb alkalmazásaival ismerkedünk meg. Így pl. megtaláljuk a Cserenkov-sugárzás TAMM—FRANCK-féle klasszikus elméletét, a szabad elektronon való fényelhajlás problémáját, a koharensen rezgő elektronok által kibocsátott sugárzások problémáját, a betatron elméletét, a körpályán mozgó elektronok által kibocsátott elektromágneses sugárzások elméletét, mely azután a könyv szerzőinek és TERLEZKInek az eredményei után a „világító elektronnal" kapcsolatos problémák megoldására vezet.

Talán túlzásnak minősíthető, hogy egy ilyen gazdag tartalmú fejezetnél hiányosságról beszélek, meg kell azonban említenem, hogy szívesen olvastunk volna e fejezetben a mágneses momentummal rendelkező elektronnal kapcsolatos problémákról, melyek az utóbbi években szintén az érdeklődés középpontjába kerültek.

3. Ismeretes, hogy a könyv egyik szerzője, D. IVANENKO, egyike a modern magelmélet legmaradandóbb eredményeket elért úttörőinek. Az a felismerése, hogy az atommag protonokból és neutronokból áll, a modern magelmélet alapját képezi, a beta-sugárzásra vonatkozó elméletei pedig előkészítették a talajt a magerők mezon-elmélete számára. Ezek után az olvasó igen sokat várhat a mezodinamikával kapcsolatos fejezettől és várakozásában nem is csalatkozik.

Külön ki szeretném emelni ennek a fejezetnek az első paragrafusát, mely a magerőkkel kapcsolatos problémák szinte páratlan áttekintését adja, történeti fejlődésében mutatva be a fenomenologikus magelmélet kibontakozását.

A továbbiakban előbb a skalár-, pszeudo-skalár- és vektormezonterek klasszikus elméletével ismerkedünk meg. Ez a bevezetés azonban egyúttal az egyes klasszikus térelméletek HAMILTON-féle és POISSON-zárójeles formalizmusát is adja, úgyhogy tökéletesen előkészíti az ismereteket a megfelelő kvantumelmélet számára. Különösen érdekes a pszeudo-skalár elméletbe való bevezetés, mely a többi hasonló természetű tankönyvekből általában hiányzik és így kezdő olvasónál különösen nagy érdeklődésre tarthat számot.

Már fentebb említettem, hogy a mezonterek elmélete esetében kezdetben a klasszikus rész nem váltott ki nagyobb érdeklődést és pl. a magerők esetében is lényegesen nagyobb figyelmet szenteltek a megfelelő kvantum térelméletre. Szinte csak az utóbbi évtizedben fordult az érdeklődés a klasszikus mezonelméletek önálló művelése felé, mely számos érdekes eredménnyel gazdagította a mezodinamikát. Ezekkel a problémákkal ismerkedünk meg a fejezet hátralévő részében.

Külön kell még szólnom a fejezet utolsó paragrafusáról, mely a gravitáció-elmélet fejlődéséről ad rövid és érdekes áttekintést, kapcsolatba hozva az ezen a téren elért eredményeket az elemi részecskék elméletével. Nálunk ez a fejezet különös érdeklődésre tarthat számot, mert itt a gravitáció-elméletének, az EINSTEIN-féle általános relativitáselméletén bizonyos mértékig túlmenő eredményeit vagy legalább is a szokástól eltérő interpretálását ismerjük meg, ami előkészíti a gravitációs tér kvantumelméletét és a gravitonok bevezetését.

4. A függelék a modern vákuumelmélet alapjait ismerteti. Ez az elmélet tulajdonképpen túlmegy a klasszikus térelmélet keretein és a szerzők célkitűzéseinek megfelelően azt a célt szolgálja, hogy a könyv teljesértékű bevezetőül szolgáljon a terek kvantumelméletébe.

Az újabban ismertté vált kísérleti eredmények ismertetése után, igen szemléletes és könnyen áttekinthető előadásban, olvashatjuk a LAMB-féle eltolódásnak a WELTON-féle félklasszikus elméletét, amely megadja az eltolódás BETHE-féle formuláját.

Majd a továbbiakban — a virtuális foton, elektron- és nukleonpárok szerepének a tisztázása után — a PAULI—VILLARS-féle renormalizációs eljárás rövid, de igen lényegre tapintó ismertetése következik.

5. Az előzőekből láthatjuk, hogy IVANENKO—SZOKOLOV könyve a legaktuálisabb elméleti fizikai problémák tanulmányozásához szolgál nagyszerű bevezetőül és így a legnagyobb érdeklődésre tarthat számot.

A könyv magyar változata tartalmához méltó kiállításban kerül az olvasó kezébe, ami a lektor, a szerkesztő és az Akadémiai Kiadó gondos és jó munkájának az eredménye.

Horváth János
a fizikai tudományok kandidátusa

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Makai Endre doktori disszertációjának nyilvános vitája

1955. március 18-án folyt le MAKAI ENDRE, a matematikai tudományok kandidátusa *„Homogén lineáris differenciálegyenletrendszerek egy osztálya és annak vizsgálata a matrixszámítás segítségével"* c. doktori értekezésének nyilvános vitája. A vitában SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA levelező tag elnökölt. Az értekezés opponensei EGERVÁRY JENŐ s TURÁN PÁL akadémikusok, valamint CSÁSZÁR ÁKOS, a matematikai tudományok doktora voltak.

Miután a disszertáns életrajzát felolvasták, MAKAI ENDRE ismertette disszertációjának főbb eredményeit. Értekezése az

$$X\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{1}$$

alakú differenciálegyenletrendszerekkel foglalkozik, ahol

$$X = \begin{pmatrix} x-a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x-a_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix};$$

itt a_i 0-tól különböző, a_{ik} pedig tetszőleges komplex számok lehetnek. Az (1) alatti rendszer az

$$(I - Dx)\mathbf{y}' = B\mathbf{y} \tag{2}$$

alakra hozható, ahol I az egységmátrix, D az $\frac{1}{a_i}$ diagonális elemekkel bíró diagonális mátrix, míg B az A mátrixtól abban különbözik, hogy az i-edik sor elemei $-a_i$-vel vannak osztva. MAKAI a (2) rendszer megoldásait hatványsor alakjában keresi, együttható-összehasonlítással egyszerű rekurziós formulát nyer az együtthatók kiszámítására, amely az együtthatók explicit előállítására is alkalmas. Bebizonyítja, hogy a kapott vektor-hatványsor abszolút konvergens az origó köré írt minden olyan kör belsejében, mely az a_i pontok egyikét sem tartalmazza. A dolgozat további részében MAKAI a

$$P_n(x)y^{(m)} + P_{n-1}(x)y^{(m-1)} + \dots + P_{n-m}(x)y = 0 \qquad (n \geq m) \tag{3}$$

alakú differenciálegyenleteket tekinti, ahol $P_j(x)$ legfeljebb j-edfokú polinom, $P_n(x)$ pedig pontosan n különböző, nemzérus gyökkel bíró polinom. (3) megoldása visszavezethető (1) típusú rendszerek megoldására. Kiderül, hogy ily módon számos fontos eset tárgyalható (1) alapján. Ezek után MAKAI megmutatja, hogy (1) típusú rendszer megoldására közelítőleg visszavezethetők a sokkal általánosabb alakú

(4) $$\sum_{i=0}^{n} f_i(x) y^{(i)} = 0$$

differenciálegyenletek, ill. az

(5) $$y_i' = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(x) y_k \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

alakú differenciálegyenletrendszerek, ha az együtthatók egy G zárt tartományon belül regulárisak. A dolgozat egyik legfontosabb része az, melyben MAKAI az (1), ill. (2) rendszer polinom-megoldásait vizsgálja. m-edfokú polinom-megoldás létezésének szükséges feltételeként adódik, hogy A-nak az m szám sajátértéke legyen; e feltétel elégséges is, ha $0, 1, \ldots, m-1$ egyike sem sajátértéke A-nak Ha az N mátrix μ_k sajátértékeinek különbségei közt egész szám nem fordul elő, úgy az $X\mathbf{y}' = (N + \lambda I)\mathbf{y}$ rendszernek akkor s csak akkor van m-edfokú polinom-megoldása, ha λ az $m - \mu_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ számok egyikével egyenlő. MAKAI oly eljárást is közöl, mely ezeket a polinom-megoldásokat explicit alakban szolgáltatja, majd néhány alkalmazás bemutatása után egyes kivételes eseteket tárgyal.

Ez után az opponensek ismertették bírálatukat. Mindhárman elismeréssel szólottak a dolgozat eredményeiről, elegáns tárgyalásmódjáról. EGERVÁRY akadémikus ügyesnek tartja az értekezés alapfeladatainak megválasztását s azt, hogy a dolgozatban foglalt eredmények egységes szempontból való tárgyalását nyújtják számos régebbről ismert, fontos differenciálegyenlet-típusnak is. Néhány lehetőséget is említ az eredmények továbbfejlesztésére. Ő, valamint TURÁN akadémikus kiemeli a dolgozatnak a mátrix-differenciálegyenletrendszer polinom-megoldásának létezésével s effektív megszerkesztésével foglalkozó részét. TURÁN a mátrix-kalkulus alkalmazásával járó egyszerű tárgyalásmódra mutat rá. Kívánatosnak tartotta volna a polinom-megoldások problémájának fontosságát illusztrálni, ill. a vizsgálatokat inhomogén egyenletekre kiterjeszteni. Lehetőséget lát a dolgozat alapján a Jacobi-polinomok elméletének egyszerűbb felépítésére. CSÁSZÁR hangsúlyozta: az értekezésből kitűnik, hogy a szerző igen alaposan ismeri a differenciálegyenletek s rendszerek elméletének irodalmát, speciálisan a mátrixszámítás apparátusát felhasználó modern műveket is. Fontos eredménynek tartja az (1) típusú differenciálegyenletrendszerek fontosságának felismerését. Úgy véli, hasznos lett volna az eredmények alkalmazhatóságának alátámasztására példákat bemutatni. Az opponensek bírálatukban rámutatnak arra, hogy a dolgozatban foglalt eredmények további kutatások kiindulópontjai lehetnek. A bírálóbizottságnak az értekezés elfogadását javasolják.

Az elhangzott bírálatokra válaszolva, MAKAI a felvetett kérdésekre ad feleletet. Vázolja azokat a nehézségeket is, amelyek a dolgozat eredményeinek bizonyos irányú továbbfejlesztését hátráltatják.

A vitában többen szólaltak fel s intéztek kérdést a disszertánshoz. RÉNYI levelező tag azon véleményének adott hangot, hogy az értekezés értékét emelte volna, ha sikerült volna szükséges és elégséges feltételt adni arra, hogy egy függvény a vizsgált típusú egyenletnek tegyen eleget. Ő, valamint KALMÁR levelező tag az iránt érdeklődött, mit tart a jelölt dolgozata fő eredményének. MAKAI e kérdésre adott válaszában a polinom-megoldásokra vonatkozó eredményeit jelölte meg.

A vita befejezése után a bizottság határozatot hozott, melyben megállapította: MAKAI értekezésében „a lineáris differenciálegyenletrendszerek elméletének egy speciális, eddig részletesen nem vizsgált típusával foglalkozik és rámutat annak jelentőségére egyrészt a speciális lineáris differenciálegyenletek tárgyalása, másrészt az általános elmélet szempontjából. A vizsgálat lényegében klasszikus módszerekkel történik, de még olyan sokat vizsgált esetekben is, mint pl. a Jacobi-polinomok, az ismertnél lényegesen egyszerűbb tárgyalásmódra ad lehetőséget. A dolgozat fő érdeme a polinom-megoldások létezésének és explicit alakjának elegáns tárgyalása. Hiánya a dolgozatnak, hogy nem törekszik a mátrixelmélet finomabb módszereinek falhasználására és a problémakörnek a modern analízis szellemében való általánosítására, pedig ezen az úton feltehetően további egyszerűsítéseket, ill. általánosabb eredményeket érhetett volna el. A dolgozat fogalmazása általában szabatos és világos, azonban néhány kisebb elírást tartalmaz."

A bizottság javaslata alapján a Tudományos Minősítő Bizottság MAKAI ENDRÉt a matematikai tudományok doktorává nyilvánította. Sok sikert kívánunk neki további tudományos munkájához!

Fuchs László
a matematikai tudományok doktora

Szász Gábor kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

1955. március 18-án rendezte meg a Tudományos Minősítő Bizottság SZÁSZ GÁBOR „A hálóelméleti komplementer-fogalom általánosításairól" című kandidátusi értekezésének nyilvános vitáját a Bolyai János Matematikai Társulat előadótermében. Az értekezés opponensei FUCHS LÁSZLÓ és SZELE TIBOR, a matematikai tudományok doktorai voltak. A vita elnökéül a Tudományos Minősítő Bizottság RÉDEI LÁSZLÓt, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagját kérte fel.

Az elnöki megnyitó után a bíráló bizottság titkára ismertette SZÁSZ GÁBOR eddigi tudományos munkásságát, majd a jelölt előadta értekezésének téziseit. Mint kifejtette, dolgozatában a hálóelméleti komplementer-fogalmat két irányban általánosítja, majd e két új fogalomnak a komplementer klasszikus fogalmához, illetve ennek másoktól származó általánosításaihoz való logikai viszonyát vizsgálja. Kutatásaihoz az adta meg az alapot, hogy a hálóelmélet a matematika egyre szélesebb területein talál alkalmazásra, s az új alkalmazások számára a klasszikus komplementer-fogalom már szűknek bizonyult.

A hálóelmélet igazi fejlődése nem egészen három évtizedes múltra tekint vissza, de ma már a hálókat kétségtelenül az egész matematika szempontjából alapvető fontosságú algebrai struktúráknak tekinthetjük. A nagymértékű fejlődést igen hathatósan segíti elő az a szoros kapcsolat, amely a hálóelmélet és alkalmazásai között fennáll. A hálóelmélet, éppúgy mint a matematika többi fiatal ága is annak köszönheti keletkezését, hogy érdemesnek bizonyult kiemelni több olyan matematikai jelenség közös elvi magvát, amelyek tárgykörük és külső formájuk szerint látszólag távol esnek egymástól. Így a hálóelmélet fogalomrendszere számos konkrét matematikai fogalom általánosítását tartalmazza, s ezekre az általános fogalmakra vonatkozó tételeknek igen széleskörű alkalmazásaira nyílik lehetőség. A fejlődésnek ezt a dialektikus kölcsönhatását figyelhetjük meg a komplementer fogalmával kapcsolatban is, amely a matematikai logikában, a halmazelméletben, az affin és projektív geometriában konkrét formában jelentkezett, s amelyre az általános hálóelmélet több, másutt is alkalmazható tételt állapított meg.

A Boole-algebrákra már régebben értelmezett komplementer fogalmát G. BERGMANN 1929-ben átvitte tetszőleges korlátos hálókra a következőképpen: az L korlátos háló valamely x elemének *komplementere* egy olyan $x'(\in L)$ elem, amelyre $x \cap x' = 0$ és $x \cup x' = I$ teljesül. Ha L bármely elemének van legalább egy komplementere, akkor L-et *komplementeres hálónak* nevezzük. A komplementer és a komplementeres hálóknak ez a fogalma hosszabb ideig kielégítőnek bizonyult, később azonban az alkalmazásokban olyan hálók léptek fel, amelyek bár nem voltak komplementeres hálók, de minden elemükhöz lehetett találni a hálóban olyan elemet, amely a komplementer bizonyos tulajdonságaival rendelkezett. Ilyenféle alkalmazások tették szükségessé a klasszikus komplementer-fogalom általánosítását. SZÁSZ GÁBOR a hálóelméletnek az algebrai struktúrák direkt felbontásaival kapcsolatos alkalmazásait vizsgálva bevezeti a *félkomplementer* fogalmát. Így nevezi egy tetszőleges 0-elemes háló valamely a eleméhez tartozó olyan x elemet, amelyre $a \cap x = 0$. Egy L háló félkomplementeres, ha L-ben minden (az esetleg létező) I-től különböző elemnek van legalább egy 0-tól különböző félkomplementere. Megemlítjük a hálóelméleti félkomplementer fogalmának két érdekes absztrakt algebrai alkalmazását, amely máris mutatja e fogalom életképességét és használhatóságát: egy csoport akkor és csak akkor állítható elő két adott normális részcsoportjának szorzataként, ha e két normális részcsoport az összes normális részcsoportok hálójában egymásnak félkomplementere a hálóelméleti egyesítésre nézve, továbbá, egy algebrai struktúra akkor és csak akkor szubdirekt felbonthatatlan, ha kongruencia-relációinak hálójában a legkisebb elemet kivéve egyetlen elemnek sincsen valódi félkomplementere. A félkomplementer algebrai alkalmazhatóságával kapcsolatban érdemes kiemelnünk, hogy e fogalomnak félhálóban is van értelme, s így olyan részstruktúrahálókra vonatkozó vizsgálatokban is felléphet, amelyeknél a tekintett struktúra két tetszőleges részstruktúrája nem mindig tartalmaz közös részstruktúrát. SZÁSZ GÁBOR a félkomplementer fogalmával kapcsolatban bebizonyítja, hogy minden végtelenül disztributív félkomplementeres háló korlátos és komplementeres, továbbá, hogy véges hosszúságú félig-moduláris háló akkor és csak akkor félkomplementeres, ha egyszersmind komplementeres. Ez utóbbi tételnek igen érdekes következménye, hogyha egy véges csoport bármely valódi normális részcsoportjához található egy másik valódi normális részcsoport, amellyel való szorzata az egész csoport, akkor minden normális részcsoport direkt tényező is. A félkomplementeres félig-moduláris hálók szerkezetébe enged bepillantást SZÁSZ GÁBOR következő tétele: legyen L olyan félkomplementeres félig-moduláris korlátos háló, amelyben bármely $a \neq 0$ elemhez található a $p \leqq a$ feltételnek elegettevő pont.* Ha L összes pontjainak száma r, akkor L hosszúsága legfeljebb r. Ennek a tételnek bizonyításában fontos szerepet tölt be a félig-moduláris hálók maximális láncaira vonatkozó DEDEKIND—BIRKHOFF-féle tételnek a szerzőtől való élesítése, amely önmagában is érdekes és értékes eredmény. Mutatja ezt az a körülmény is, hogy ezt az eredményt SZÁSZ GÁBORral lényegében egy időben, de tőle függetlenül CROISOT francia matematikus is megkapta. E tétellel kapcsolatban SZÁSZ GÁBOR két problémát vet fel, amelyek

* Alulról korlátos háló olyan elemét nevezzük pontnak, amely közvetlenül követi 0-t.

közül disszertációjában még csak az egyiket válaszolja meg, de téziseinek ismertetése közben már a másik kérdésre is feleletet ad.

A komplementer fogalmának az értekezésben tárgyalt másik irányú általánosítása a szerző által bevezetett és *általánosított komplementernek* nevezett fogalom. Ez még közelebb áll a klasszikus komplementer-fogalomhoz, mint a félkomplementer. A szerző általánosított komplementeresnek nevez egy olyan hálót, amelyben bármely x elemhez és tetszőlegesen előírt u, v elempárhoz található a hálónak olyan y eleme, amelyre $x \cap y \leqq u$ és $x \cup y \geqq v$ teljesül. Ennek a fogalomnak nagy előnye a komplementeresség klasszikus fogalmával szemben az, hogy nem-korlátos hálókra is van értelme, továbbá, hogy e fogalom a relatív komplementeresség fogalmának is általánosítása. Az elnevezést az indokolja, hogy — mint azt SZÁSZ GÁBOR vizsgálatai mutatják — az általánosított komplementeresség fogalma korlátos hálók esetében ekvivalens a komplementeresség klasszikus fogalmával, moduláris hálók esetében pedig a relatív komplementerességgel. További vizsgálataiban a szerző alulról korlátos, általánosított komplementeres hálókra általánosítja G. BIRKHOFF-nak a komplementeres moduláris hálók főideáljainak projektivitásáról szóló jelentős tételét.

Az értekezés hátralévő részében a jelölt a BIRKHOFF-féle pszeudokomplementer és az ARESKIN-féle gyenge komplementer eredeti, továbbá a félkomplementer fogalmának segítségével adható definícióját tárgyalja. Utóbbival kapcsolatban nemcsak a definíció átfogalmazásáról van szó, hanem egyszersmind lényeges egyszerűsítésről is.

SZÁSZ GÁBOR igen világos beszámolója után az opponensek olvasták fel bírálatukat.* Mindkét opponens igen szerencsésnek ítélte meg SZÁSZ GÁBOR disszertációs témaválasztását nemcsak azért, mert a hálóelmélet a modern algebra napjainkban igen gyorsan fejlődő fontos fejezete, hanem azért is, mert rajta kívül nincsen hazánkban kimondottan hálóelméleti érdeklődésű kutató. SZELE TIBOR a félkomplementeresség fogalmának értékelésénél kiemeli, hogy e fogalom a komplementer fogalmának olyan általánosítása, amely algebrai struktúrák lényegesen bővebb kategóriáira teszi lehetővé direkt és szubdirekt összegként való előállíthatóságra vonatkozó eredmények levezetését, majd az általánosított komplementerességgel kapcsolatban hangsúlyozza, hogy ez a fogalom a komplementeresség fogalmának két lényeges fogyatékosságát küszöböli ki s éppen ezért alkalmazhatóságára szélesebb körben nyílik lehetőség. Összefoglalásképpen megállapítja, hogy SZÁSZ GÁBOR értekezése rendkívül értékes új eredményeket tartalmaz, és ugyanakkor tökéletes képet nyújt a hálóelméleti komplementer-fogalom összes jelenleg ismert általánosításairól, valamint ezeknek egymáshoz való viszonyáról.

FUCHS LÁSZLÓ bírálatában kiemeli a DEDEKIND—BIRKHOFF-féle tétel élesítését jelentő eredményt, majd a komplementer fogalmának általánosításaival kapcsolatban felveti azt a kérdést, hogy lehetséges-e a komplementernek olyan általánosítása, amelyből a dolgozatban szereplő összes komplementer-fogalom deriválható. Erre alkalmasnak látszik a következő fogalom: nevezzünk *általánosított félkomplementeresnek* egy olyan hálót, amelynek bármely $a(a \neq I)$ eleméhez tetszőlegesen megadott u mellett létezik a hálóban olyan x elem, amelyre $a \cap x \leqq u$ és $x \nleqq a$. Egy ilyen fogalomnak a dolgozat élére való állítása a dolgozat anyagának természetesebb elrendezésben való tárgyalását biz-

* SZELE TIBOR betegsége miatt távol van. Opponensi véleményét a bizottság titkára olvassa fel.

tosítaná. FUCHS LÁSZLÓ a dolgozat eredményeivel kapcsolatban megállapítja, hogy ezek érdekes új adatok egy fontos hálóelméleti fogalomra vonatkozóan. A dolgozatból kiviláglik a szerző alapos tájékozottsága az irodalomban, továbbá, hogy jól ismeri a hálóelmélet módszereit, és hogy azokat munkájában jól fel is tudja használni.

Mindkét opponens hangsúlyozza, hogy a dolgozat rendkívül gondosan, világos stílusban és külső alakját tekintve is mintaszerűen van megírva, s az értekezést érdemei alapján alkalmasnak tartják arra, hogy vele szerzője a matematikai tudományok kandidátusa fokozatot elnyerje.

SZÁSZ GÁBOR válaszában legelőször is megköszöni SZELE TIBOR és FUCHS LÁSZLÓ professzoroknak az értekezés gondos áttanulmányozását és az értékes építő bírálatot. Kielégítő választ ad az opponensek kritikai megjegyzéseire, majd FUCHS LÁSZLÓnak azzal az igen értékes megjegyzésével foglalkozik, amely a komplementer általánosításait összefoglaló még általánosabb fogalomra vonatkozik. Ezzel kapcsolatban megjegyzi, hogy ilyen általánosítás lehetőségének kérdésével SZENDREI JÁNOSsal együtt foglalkozott, de nem sikerült az általánosítás természetes útját megtalálniuk, bár SZENDREI igen közel jutott a FUCHS LÁSZLÓ által javasolt definícióhoz. Utóbbit minden tekintetben kielégítőnek és életképesnek látja, minthogy ennek a definíciónak az esetleges későbbi alkalmazásokon kívül mindenesetre máris meg van az a haszna, hogy belőle mint egységes alapból vezethető le a komplementer, ill. a komplementeres háló fogalmára vonatkozó számos általánosítás.

Ezután hozzászólások következnek. KALMÁR LÁSZLÓ felvilágosítást kér a disszertáció több részletére vonatkozóan és újabb problémákra hívja fel a jelölt figyelmét. Ezenkívül SZELE TIBOR hasonló javaslatához kapcsolódva kívánatosnak tartja, hogy ez a kitűnően megírt dolgozat minél hamarabb jelenjék meg nyomtatásban, mert remélhető, hogy ennek az értekezésnek tanulmányozása más kutatókban is fel fogja ébreszteni a hálóelmélet iránti érdeklődést. HAJÓS GYÖRGY a „komplementer" helyett a FUCHS LÁSZLÓ által használt „komplementum" kifejezést javasolja és megkérdezi a jelöltet, hogy mi adta az indítékot számára az új fogalmak bevezetéséhez? RÉDEI LÁSZLÓ néhány megjegyzést tesz a terminiológiára vonatkozólag és megjegyzi, hogy a dolgozat bevezető részét aránytalanul hosszúnak tartja a főrészhez viszonyítva. SERES IVÁN az értekezés bevezetésében említett egyik algebrai alkalmazással kapcsolatban intéz kérdést a jelölthöz.

SZÁSZ GÁBOR megköszönve a hozzászólásokat, a kérdésekre a jelenlévőket kielégítő válaszokat ad.

A bíráló bizottság a lefolyt vita alapján megállapította, hogy SZÁSZ GÁBOR munkája lényeges adalék a hálóelmélet további kiépítéséhez. A dolgozatból kiviláglik a szerző megfelelő tájékozottsága az absztrakt algebra irodalmában, különösen a hálóelméleti módszerek területén. Kiemeli a bizottság, hogy SZÁSZ GÁBOR a megvédés alkalmával már olyan kérdésre is választ adott, amely disszertációjában még nyitott problémaként szerepel. SZÁSZ GÁBOR disszertációjával bebizonyította önálló kutatásra való képességét.

Ennek alapján a bizottság egyhangúan javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy SZÁSZ GÁBORT nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.

Kertész Andor
a matematikai tudományok kandidátusa

Ladányi Károly kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

Ladányi Károly „*A nemesfémek elmélete*“ című kandidátusi értekezésében a nemesfémek kötésére vonatkozó elméleti vizsgálatokat, melyek addig csak Cu-ra voltak meg, kiterjesztette Ag és Au-ra is.

Mind az alkáli, mind a nemesfémeknél az alapállapotban a valencia-elektron *s*-elektron. Az alkáli fémek ionjainak legkülső zárt héja azonban nemesgázszerű (s, p)-héj, míg a nemesfémeknél az ion legkülső zárt héja *d*-héj. Ennek megfelelően a nemesfém elméleti tárgyalása több nehézséggel jár, mint az alkáli fémeké. Ennek a következménye az is, hogy az irodalomban közölt számítások eredményei kevésbé jó egyezést mutatnak a tapasztalattal a nemesfémek esetében, mint az alkáli fémek esetében.

A jelölt disszertációjában részletesen tárgyalja a fémek különböző elméleteit, a klasszikus elektronelméletet, a Pauli—Sommerfeld fémelméletet, a sávelméletet, az elektromos vezetés elméletét, a fémek kötésének statisztikus elméletét a félempirikus Hellmann-módszert. Önálló munkája ezen a téren a fémek kötésének statisztikus elméletéhez kapcsolódik. Eszerint a GOMBÁS által kidolgozott elmélet szerint a fémek a pozitív ionok rácsából és igen jó közelítéssel állandó sűrűségű (valencia) elektrongázból állanak. A rácsenergia eszerint a következő részekből tevődik össze: a valencia-elektronok saját energiája, a valencia-elektronok és az iontörzsek közötti kölcsönhatás, végül pedig az ionok elektronfelhőinek egymásbamerülése okozta kölcsönhatás.

A nemesfémeknél a problémát a valencia-elektronok és az iontörzsek közötti kölcsönhatási energia számítása okozza. A fémion modifikált potenciálterének birtokában ez igen egyszerűen meghatározható. A nemesfém ionok *d*-héjának következtében a modifikált potenciálteret tisztán elméleti úton csak Hartree-, vagy Hartree—Fock-táblázatok alapján lehet meghatározni. Mivel a disszertáció megírásakor Au^+ és Ag^+-ra nem álltak rendelkezésre ilyen táblázatok, LADÁNYI a modifikált potenciált félempirikusan állította elő

$$V_{mod} = -\frac{1}{r}\left[1 - Ae^{-2\varkappa r} - Be^{-4\varkappa r^3}\right]$$

alakban, ahol r az atommagtól való távolság atomi egységekben és az A, B valós paramétereket úgy határozza meg, hogy a V_{mod}-dal számított legmélyebb és első gerjesztett s term szabad atomnál a kísérleti értékekkel megegyezzék adott $\varkappa$ mellett. Ily módon a modifikált potenciálban még egy paraméter, $\varkappa$ szerepelt. Ennek meghatározása az előbbiekhez hasonlóan elvileg lehetséges lett volna azzal, hogy a második gerjesztett s term is megegyezzék a kísérleti adatokkal. Ez azonban olyan óriási numerikus számítást kívánt volna, hogy célszerűnek látszott más utat választani. Ez a másik út az volt, hogy a második gerjesztett s termmel való egyeztetés helyett az első p termmel való egyeztetésből határozta meg LADÁNYI a $\varkappa$-t, ami sokkal kevesebb numerikus munkával jár, majd az így megkapott tájékoztató $\varkappa$ érték körüli különböző $\varkappa$ értékekre elvégezve a számítást, azt a $\varkappa$-t választotta, mely a második gerjesztett s termet legjobban (bár nem jól) megközelítette. (Meg kell jegyeznem, hogy $\varkappa$ meghatározásának fenti menetét csak LADÁNYI szóbeli közlése alapján adom, a disszertációban a $\varkappa$ meghatározásáról csak annyit ír, hogy előre felvett értékkel dolgozik s ezen érték megváltoztatása nem változtat lényegesen az eredményeken.)

A V_{mod} meghatározása után a számítások már simán megadták a nemesfémek rácsenergiáját. Az eredmények azt mutatták, hogy az alkáli fémekkel ellentétben, a nemesfémek kötésénél az elektronfelhők egymásbamerüléséből származó energia lényeges szerepet játszik. Végezetül a rácsenergia-távolság függvény ismeretében a fém térfogat-nyomás függvénye, valamint a kompreszszibilitás meghatározható.

A fenti kandidátusi értekezés opponensei HORVÁTH JÁNOS és KÓNYA ALBERT, a fizikai tudományok kandidátusai voltak. Az 1955. február 11-én megtartott nyilvános vita bírálóbizottságának elnöke NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus volt, a bírálóbizottság titkára HOFFMANN TIBOR, a fizikai tudományok kandidátusa, tagjai pedig NEUGEBAUER TIBOR, a fizikai tudományok doktora, GÁSPÁR REZSŐ és PAUNCZ REZSŐ, a fizikai tudományok kandidátusai voltak.

Az opponensek általánosságban a disszertációt kielégítőnek tartották. Helytelenítették azonban a dolgozat általános, bevezető részének felépítését, mely túlságosan hosszú és olyan részleteket is tartalmaz, melyek felhasználására a dolgozat érdemi részében nem kerül sor. Ugyanakkor helytelenítették azt is, hogy az előzmények ilyen részletes és általánosan ismertető tárgyalásában egyes modernebb fémelméleteket meg sem említ. Nehezményezték azt is, hogy sok helyütt a formális tárgyalás előtérbe tolásával a fizikai tartalom elsikkad. Ezeken kívül több részletre vonatkozóan tettek fel kérdéseket.

LADÁNYI KÁROLY válaszában kiegészítette a bevezető rész ismertetését a disszertációban nem tárgyalt fémelméletet összefoglaló ismertetésével, majd a részletkérdésekre adott válaszokat.

Az opponensek a választ általában kielégítőnek tartották. HORVÁTH kandidátus azonban még szükségesnek tartotta volna a modifikált potenciál meghatározásánál „nem jó“ egyezésűnek minősített második gerjesztett *s* termtől való eltérés megadását. KÓNYA kandidátus ezenkívül a dolgozat felépítésének egységes szempontjait hiányolta.

A nyilvános vita részvevői közül GÁSPÁR REZSŐ és HOFFMANN TIBOR kandidátusok szólaltak fel. GÁSPÁR kiegészítő megállapítást tett arra vonatkozóan, hogy a taszító potenciálnak LADÁNYI által megadott alakja egyszerű analitikus megközelítést ad. HOFFMANN rámutatott LADÁNYInak egy integrál eltűnésének magyarázatára adott igazolásának formális voltára, továbbá a paraméterek közül egyesek önkényes felvételének a disszertációban való ki nem hangsúlyozására. Felvetette, hogy Cu és Au esetén a számított rácstávolságok nagyobbak a mértnél, míg Ag-nél kisebbek. Ennek okaként LADÁNYI azt jelölte meg, hogy a három fém mindegyikénél lényegileg más módszerrel történt az egyik energiatag meghatározása és ez okozza a különbséget. HOFFMANN szerint viszont ez nem okozhat ilyen jellegű különbséget, s a fellépő szabálytalanságot a számítás alapját képező empirikus ionizációs energiaértékben látja, mely (szabad atomnál) hasonló kiugrást ad Ag-ra

A vita után a bírálóbizottság határozatában megállapította, hogy a nemesfémek elmélete, mint a szilárd testek fizikájának érdekes része, helyesen képezi kandidátusi disszertáció tárgyát. A dolgozat és a megvédésénél folytatott vita igazolja, hogy a jelölt e témakörben biztonsággal jártas. Felhívta azonban a jelölt figyelmét arra, hogy a dolgozatban és az adott válaszokban helyenkint helytelenül a formális tárgyalást helyezi előtérbe és nem emeli ki eléggé a fizikai tartalmat. A bizottság leszögezte, hogy a kutatások elvégzése igen nagy számítási készséget és munkát követelt. Ennek alapján a bizottság egyhangúan javasolta a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy LADÁNYI KÁROLYt nyilvánítsa a fizikai tudományok kandidátusává.

Hoffmann Tibor
a fizikai tudományok kandidátusa

Rapcsák András kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

RAPCSÁK ANDRÁS „A differenciálinvariánsok teljes rendszere a reguláris Cartan térben" címmel nyújtotta be a Tudományos Minősítő Bizottsághoz kandidátusi értekezését, melyet a kiküldött bíráló bizottság 1955. április hó 1-én nyilvánosan megvitatott.

A disszertáció opponensei HAJÓS GYÖRGY akadémikus és VARGA OTTÓ az MTA levelező tagja voltak, a bíráló bizottság elnöki tisztét EGERVÁRY JENŐ akadémikus látta el.

RAPCSÁK ANDRÁS ismertette disszertációjának téziseit. Vizsgálatai egy differenciálgeometriai térre az ún. Cartan-féle térre vonatkoznak, amelyre vonatkozólag még bizonyos regularitási feltételt köt ki. Differenciálgeometriai tér egy, az aritmetikai tér valamilyen n-cellájával homeomorf sokaságot jelent, amely bizonyos differenciálgeometriai struktúrával van ellátva. Metrikus struktúrát akkor kapunk, ha a térben a görbék ívhosszának a mérése definiálva van. A görbék hosszmérésére vonatkozó legegyszerűbb kikötés a Riemann-geometriához, a legáltalánosabb pedig a Finsler-geometriához vezet. E. CARTAN azáltal vezetett be metrikus struktúrát, hogy görbék mérése helyett hiperfelületek mérését definiálta. A dolgozat éppen e legújabban bevezetett differenciálgeometriai tér vizsgálatával foglalkozik. E tér reguláritására vonatkozó kikötés a tárgy természetéből eredő és az analitikus apparátus alkalmazhatóságát biztosító kirovás.

RAPCSÁK ANDRÁS e témán belül két alapvető kérdésnek adja megoldását. Az egyik az ekvivalencia probléma, tehát annak vizsgálata, hogy két különböző módon megadott tér valójában különböző-e, vagy pedig csak a megadási módok különbözőségéből adódó nem lényeges különbségről van-e szó. (Pontosabban: két Cartan tér ekvivalens, ha a hiperfelület felszínét értelmező alapfüggvényeik bizonyos egyszerű transzformációval egymásba átvihetők.) RAPCSÁK megadja két reguláris Cartan tér ekvivalenciájának szükséges és elegendő feltételét s ezzel előkészíti a másik alapvető problémának: a differenciálinvariánsok teljes rendszerének meghatározására irányuló problémának megoldását.

RAPCSÁK e vizsgálatai továbbfejlesztését jelentik T. I. THOMAS, O. VEBLEN és különösen VARGA OTTÓ hasonló irányú eredményeinek. Az előbbi két szerző affinösszefüggő ponttér, az utóbbi affinösszefüggő vonalelemterekre nézve intézik el a megfelelő kérdést, amely terek a RAPCSÁK által vizsgáltnál egyszerűbbnek mondhatók.

A disszertáció mintegy negyven gépelt oldal terjedelmű. Rövid bevezetés után szerző ismerteti a Cartan-féle tereket, majd négy paragrafusban foglalkozik az ekvivalenciaproblémával, a differenciálinvariánsok tárgyalását lehetővé tevő normálkoordináták bevezetésével (VARGA OTTÓ gondolatához csatlakozva), a differenciálinvariánsok rendszerének egy redukciójával és végül a differenciálinvariánsok teljes rendszerének jellemzésével.

HAJÓS GYÖRGY opponensi véleményében megállapította, hogy szerző disszertációjában aktuális és jelentős kérdést tárgyal, hogy a felvetett kérdésekre tételeivel választ ad. Kiemelte szerzőnek azt az érdemét, hogy magáénak tudhatja a differenciálgeometriai terek elméletének hatalmas szimbolikus apparátusát és nagy analitikus segédletét. Ez a körülmény érdemlegessé teszi e tudományos munkát még akkor is, ha figyelembe vesszük, hogy más — egyszerűbb — területen már sikerrel alkalmazott gondolatokat kellett új, ismeretlen területen felhasználni.

HAJÓS GYÖRGY opponensi véleményében kifejezésre juttatta azt a meggyőződését, hogy a disszertáció nyert volna értékben, ha — még a terjedelem rovására is — jobban kidomborította volna a geometriai lényeget. Különösen vonatkozik ez a megállapítás a Cartan-féle tereket ismertető bevezetésre.

HAJÓS GYÖRGY azzal zárta opponensi véleményét, hogy a benyújtott munkát alkalmasnak tartja kandidátusi disszertációként való elfogadásra.

VARGA OTTÓ opponensi véleményében a dolgozat lényeges mozzanatainak alapos elemzése után megállapítja, hogy a kapott eredmények teljesen helyesek és módszertanilag az eddig rendelkezésre álló kalkulus szerint a legegyszerűbben vannak kivitelezve. A dolgozatnak két — nem alapvető fontosságú — hiányosságát említi meg. Ezek egyike szerint a Cartan-féle elmélet alapjainak összeállításánál itt egy új szempontból való felépítés kínálkozott volna. A másik megjegyzés szerint az ekvivalencia probléma tárgyalásánál a három előzőleg bevezetett görbületi tenzor közül csak az első lép fel és azt a látszatot kelti, mintha feleslegesen bevezetett görbületi tenzorok volnának.

VARGA OTTÓ a benyújtott disszertációt nagyon értékesnek ítélte és elfogadását a legmelegebben ajánlotta.

RAPCSÁK ANDRÁS válaszolt az opponensek itt ismertetett és néhány további megjegyzésére. VARGA OTTÓ második megjegyzésére vonatkozólag részletesen rámutat a Cartan-féle tér három görbületi tenzorának a tér strukturális meghatározásában való alapvető szerepére s a konkrét kérdésnek éppen opponens egy legutóbbi dolgozatával való kapcsolatára. VARGA OTTÓ első megjegyzésére szintén részletes tájékoztatást ad. — Ami a geometriai tartalom kidomborítását illeti, RAPCSÁK elsősorban CARTAN tárgyalásmódjára utalt.

VARGA OTTÓ a válasz után néhány megjegyzést tesz a kérdés szemléletes geometriai vonatkozásaira nézve és a háromdimenziós Cartan tér tulajdonságaira vonatkozólag egy példát mutat be. Megjegyzi, hogy ezzel kissé túlment a disszertáció határain és a kérdést sajátmaga egy dolgozatban kívánja kifejteni.

HAJÓS GYÖRGY megjegyezte, hogy e tárgykör klasszikusainak az a tárgyalásmódja, amely a geometriai lényeget sokszor valósággal elrejti, nem követendő.

A vita eredményeként a bírálóbizottság megállapította, hogy RAPCSÁK ANDRÁS disszertációja, a tárgy alapos ismeretén túl elmélyültségről és matematikai alkotó készségről is tanúskodik. Ezért javaslatot terjesztett a Tudományos Minősítő Bizottsághoz, hogy RAPCSÁK ANDRÁSt nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.

Vincze István
a matematikai tudományok kandidátusa

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója   Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat beérkezett: 1955. IX. 9. — Terjedelem: $11^{3}/_{4}$ (A/5) ív, 13 ábra.

Szegedi Nyomda Vállalat 55-4386   Felelős vezető: Vincze György

Ára: 25,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

KÖNYVISMERTETÉSEK

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI